巨大基数の集合論

The Higher Infinite

A.カナモリ
渕野 昌 訳

Springer
シュプリンガー・フェアラーク東京

謝辞

まず最初に，このプロジェクトを示唆し，忍耐強く励ましてくれた Gert Müller に感謝したい．初期の段階で困難なタイプの仕事を何度もやってくれた Thomas Orowan にも感謝したい．James Baumgartner, Howard Becker, Jose Ruiz はテキストの多くの部分を読んで，いくつもの指摘をしてくれた．長年にわたっていくつもの指摘や情報を与えてくれたり，声援を送ってくれた人々のリストは長くて書ききれないが，Matthew Foreman, Thomas Jech, Alexander Kechris, Menachem Magidor, Tony Martin, Marion Scheepers, Stevo Todorčević, Hugh Woodin の名前はあげておきたいと思う．もちろん，こういう場合に通常な，これらの人々の無罪宣言はしておかなければならない．最後に Burton Dreben と Gerald Sacks に感謝する．*Honi soi mal y pense*（思い邪なる者に災あれ）．

改訂第一版に関するノート

この版では主に誤殖や文法的なミスを正し，4 つの証明で細部を訂正し，引用された論文の出典を更新している．また 265 ページで新しい埋め込みの概念 $\prec^-$ を導入し，これに続くいくつかの個所で保証のない初等的埋め込み $\prec$ の使用をこの概念で置き換えている．初等的埋め込みが保証されないことを指摘してくれた Kai Hauser に感謝する．また Sakaé Fuchino, Richard Laver, Jose Ruiz その他何人かの人々にも，訂正や指摘を送ってくれたことに感謝する．当然のこととして，第一版の出版以来様々な方面での進歩がみられる．しかしこの版では，これらをテキストに付け加えることは試みていない．

1997 年 1 月 20 日
ブルックリン，マサチューセッツにて

著者前書き

本書は改訂第一版 (Springer 1997) の日本語訳である．しかし実際には，翻訳にはそれより後に著者の注意にとまった訂正も組み込まれている．この機会に，渕野 昌 教授には，彼がこの翻訳を作成するために費やした多大の時間と労力に対して心から感謝したい．本書により，日本で，この美しく洗練された数学の分野が身近なものとなることを，切に望むものである．

1998 年 10 月 23 日
ボストン，マサチューセッツにて

訳者はしがき

本書は，Akihiro Kanamori（金森晶洋）著，The Higer Infinite (Corrected Second Printing), Springer-Verlag 1997 の全訳である．しかし著者の前書きにもあるように，1997 年版の後になされたいくつかの訂正も組み入れられている．

本書で述べられていことからも読み取れるように，集合論の研究，特に本書で扱われている巨大基数の理論に関連する研究は，近年目をみはるような発展を見せており，深い内容を持った結果が次々と得られているのであるが，日本語圏では，この分野の研究者がそれほど多くないことや，大学の数理科学に関連する学科で現代集合論の講義を置いているところが皆無に等しいことなどの事情から，このことは今まであまり正しく認識されていなかったのではないか，という印象を受ける．

本書の日本語訳が，日本語の読者に現代集合論の現状の一端を知らしめ，その意義に対する議論の契機となり，この分野への入門を志す若い人たちを鼓舞するものとなることを，願ってやまない．

神奈川大学の阿部吉弘氏には，翻訳の原稿の前半に目を通していただき，訳語や誤殖などに関する多くの指摘を頂いた．

翻訳に際しては，シュプリンガー東京の編集部の方々には色々とお世話になった．また翻訳が大幅に遅れてしまったことで大変ご迷惑をおかけしてしまった．心からお詫びするとともに，遅々として進まない翻訳の作業に忍耐強く付き合って頂けたことに対し，ここで改めて感謝したい．

1998 年 8 月 24 日
北海道，北見にて

目次

第 5 章 強い仮説

第 6 章 決定性

序論

“超無限”(the higher infinite) とは様々な**巨大基数の仮説**として分類される集合論における無限基数の崇峻な領域を指す．これらの仮説は，それより小さな基数に対する超越性を有し，強力な数学的命題の分析を可能にさせる基数の存在を主張するものであり，そのようなものとして，数の概念の無限への拡張，定義可能な実数の集合の研究という，集合論の創設者ゲオルグ・カントル Georg Cantor の 2 つの精神の遺産を継承するものとなっている．巨大基数の仮説の探究は，実際，現代集合論の中心的な研究分野とみなされており，実数の定義可能な集合，特にそのような集合のルベーグ可測性の研究において決定的な役割を果してきた．これらの巨大基数の仮説は，集合論の発展の様々な局面において，異なる動機によって導入されたものであるにもかかわらず，基本概念から出発して，その矛盾する拡張に向かって**線型**な階層を形作ることが知られている．考えられるかぎりの集合論的命題が，無矛盾性の強さに関して，この階層に照らし合わせて測られてきたが，これによって得られた諸命題間の相関関係の構造により，我々は強力な数学が集合論内で精密かつ整合的に豊饒な展開をとげるさまを見ることができる．

本書は，執筆を予定している双書の第 I 巻 (［訳注］: 本文中で言及されている II 巻は現在未刊で，著者により執筆が進められている) で，巨大基数の理論の始まりから 1970 年代の初期にかけて，また幾つかのテーマについては，さらに現代の研究の最前線にまで及ぶ発展を，分かりやすく記述したものである．これに続く巻で，強制法による無矛盾性証明の様々な結果や内部モデルの理論について述べて，これらの研究の最前線の状況を，さらに子細に見て行く予定である．本書では，歴史的な発展に沿った生成的な記述が試みられているが，これは，そのようなやり方が，数学の整合的な記述をするのに最も適しており，また，認識論的な議論への足がかりを供することにもなる，という理由による．しかし，歴史的発展を振り返って見ているのであるから，記述は因果関係の道筋を強調して，最もエレガントな，あるいは最も分かりやすい説明を与えるというような，ウィッグ党的立場をとらざるを得ない．各節はユニットとして機能しており，後の方の節では，しばしば，前の節で議論した概念が，どのようにして次の発展を促すことになったか，ということが説明されることになる．推測や未解決問題は至るところで述べられているので，読者はこの素晴らしい壮大な企てを傍観するにとどまらず，いくつかの特定の分野での将来の研究のためのヒントを得ることもできるであろう．

以下で，歴史的かつ概念的な通論を与えるが，これは，本書の各節をより大きな枠組の

中で見るためのものである．付録では，巨大基数の研究に付随して生じる，もっとつかみどころのない哲学的な問題について議論する．集合論の発展に関するより詳しい記述は，Hallett [84], Lavine [94], Moore [82], Fraenkel-Bar-Hillel-Levy [73] などに見いだすことができる．ここでは簡単に触れるにとどめる幾つかのテーマについても，これらの文献のどれかで深く掘り下げた議論がなされているはずである．

集合論の草創期

集合論が始まったのは，解析の算術化，抽象化と一般化の新しい気運で特色付けられる 19 世紀の偉大な数学の転換期であった．多くの新しい数学が古い数学から生まれることになったが，集合論はカントルの頭脳からアテネの女神のように鎧をつけた姿で一気に生まれ落ちたのではなく，数理解析の問題の研究を通して次第に形成されていったのであった．ライプニッツやニュートンにより解析学の基礎がなされた後，関数の概念は，“解析的な表現” から “任意の対応” へと，たゆまず拡張されていったが，その過程と並行して，考察の焦点は総体としての連続体から，それを構成する点の集まり，つまり実数の全体へと移行していった．最初の重要な進展はオイラーの研究から触発されたもので，これは無限級数の方法と物理現象，特に弦の振動の問題に起因するものであった．

この伝統から出発して，1870 年代初期に若きカントルは，三角級数の一意性を，その収束する点の集合に依存する形で示したが，これは無限回繰り返すことのできる極限操作によって**定義される**実数の集合に関した定理となっている．ここで決定的な発想の転換を行なって，カントルはそのような集合や無限の枚挙について，それ自身を研究対象として調べ始め，まず実数の集合の研究に必要な基本概念を確立し，超限順序数の定式化へと進んだ．集合論は，カントルが実数の全体は非可算である，つまり，実数の全体と自然数の全体の間に一対一対応が存在しない，ということを発見した 1873 年 12 月の，その日に確立されたのである．それに続く何十年かは，順序数や基数の理論の構築が，彼によって驚異的なまでに押し進められることになる．しかし，連続体の表現としての実数と，整列集合の表現としての新しい数の概念との統合は得られないままになっていた：カントルは，実数の集合の濃度 $2^{\aleph_0}$ が最小の非可算濃度 $\aleph_1$ になる，という連続体仮説を証明することができなかったのである．そして，それは一つには，実数上に整列順序がうまく定義的ない，という困難に起因していた．

カントルは，有限と超限は，すべて一様に数学の中に包含され，“絶対” によって制限される，と考えるようになった．カントルにとって，この “絶対” とは，数学的には，順序数の全体のクラスに対応し，メタフィジカルには神に対応するものだった．このような実存主義的視点から，カントルは，1880 年代初期頃まで，集合を，その要素間の整列順序を内在させたものとして見ており，集合 x からその順序型 $\overline{x}$, を抽出し，さらにその濃度 $\overline{\overline{x}}$ を抽出するという抽象操作の結果として順序数と基数を捉えていた．

しかし，まさにこのような構造化された見方が，そもそも無限の集合は数学内での研究の対象になり得るのか，また，関数の概念はどこまで一般化してよいものなのか，という問題意識をすでに持っていた数学者たちの懐疑を強める要因となった．任意の関数を積極

的に用いることがなされるようになり，ツェルメロ Ernst Zermelo [04] が，そのすぐ後で選択公理と呼ばれるようになる公理を定式化して，すべての集合は整列できる，という彼の整列可能性定理がこの公理から導かれることを示すと，激しい論争が巻き起こった．

公理化ということの数学での普遍的な方法論的役割を踏まえて，ツェルメロ Zermelo [08a] はすぐに集合論の最初の公理化を発表した．しかし，カントルの仕事がそうであったように，これは，むしろ新しい状況での数学的な窮状に対しての対応であり，ここでは，集合論を逆理から救うという目的以上に，彼の整列可能性定理での集合の存在の仮定を明らかにするということが問題であった．この過程を通じて，ツェルメロの考察の焦点は超限順序数から，$\in$ と単純な演算のみによって構造化された集合，という抽象的なものに移行していった．(彼の Zermelo [08] での整列可能性定理という) 特定の証明から抽出されたツェルメロの公理系は，単純で，拡張に対して開かれている，ということがその長所であった．生成的な，集合の形成に関する公理群，特に巾集合の公理は，Zermelo [30] での累積的な階層として集合の全体を捉える考え方を予示していた．分出公理での“明確な”性質は，後にスコーレム Thoralf Skolem [23] に，これを一階の論理に基づいて定式化するべきだ，という提案をさせることになる．

スコーレムのこの提案は，集合論を新しい視点とテクニックのもとに拡張し，より強固な基礎づけのもとに研究しようという気運の高まり呼応するものであった．フレーゲ Gottlob Frege は彼の 1879 年の *Begriffsschrift* (量化子論理) で算術の論理学的基礎を確立し，一般に哲学での**分析哲学の伝統**を興して，論理学ではアリストテレス以来の重要な哲学者とみなされるようになった．この伝統での建設者はラッセル Bertrand Russell であった．彼は，若い時にフレーゲやペアノ Giuseppe Peano の影響を受けて，全数学を論理学の確実性の上に基礎付けようと考えた．ホワイトヘッド Alfred Whitehead とラッセルによる，1910–3 年の *Principia Mathematica* 全三巻は，この野望の，自信に満ちた表出であるはずであった．しかし，ラッセルは，良く知られているように，フレーゲの形式的体系の整合性を脅かす，彼自身の発見した逆理に足をとられ，その結果，*Principia* は，複数のタイプと，彼の還元可能性公理のもとで結局は破綻をきたしてしまう内包的述語とによって，見るも恐ろしい，つじつま合わせのようなものになってしまったのであった．

土俵を移して，数理論理学が数学の分野として確立されるにはヒルベルト David Hilbert を待たなければならなかった．ラッセルの哲学的性向は彼が論理を公理化する際の妨げになったが，ヒルベルトは，ユークリッド幾何を公理主義的な枠組の中で確立し，無矛盾性，そして後に完全性に関する問題を提起した際に，これをさらに深く吟味することで，成功を得たのであった．この殆んど形式論（シンタクティック）的アプローチは，ヒルベルトがブラウアー Luitzen Brouwer やヴァイル Hermann Weyl の直観主義陣営からの批判に応えて証明論を展開し，古典的数学の無矛盾性を彼の超数学により確立する，というプログラムを提言したとき，さらに充実したものとなった．ヒルベルトがその卓越した数学の能力をもって，非構成的証明や超越的手法を駆使して数学全般を拡張していったまさにそのときに，これらの問題は今までに増して重要性を持つに至ったのであった．例えば，代数における極大性を用いた証明がなされるようになり，また，高階の関数空間の研究が盛んになるにつれ任意の関数という概念が次第に受け入れられるようになってきたが，これにより，選択公理は数学的

に不可欠なものとなっていった．また，数学的構造に焦点が当てられるようになって，巾集合の演算は普通の数学に組み込まれてゆくようになったのである．

ツェルメロの集合論は，数学の基礎に関する関心や創造の受け皿として，さらに成長していった．公理的集合論での一番最初の結果として，ツェルメロ Zermelo [08a] はラッセルの逆理での議論を用いて，任意の集合 x に対し，集合 $y \subseteq x$ で，$y \notin x$ となるものが存在する（したがって汎用集合は存在しない）ことを示した．ハルトークス Friedrich Hartogs [15] はさらに，ブラリ=フォルティ Burali-Forti の逆理の変形により，任意の集合 x に対し整列可能な集合 y で x に埋め込むことのできないようなものの存在を示した．ツェルメロ [08] の証明の分析により，クラトフスキー Kazimierz Kuratowski [21] はラッセルのタイプに支配された理論とは対照的な順序対の定義を得たが，これは関係の理論を集合論に還元する際の標準的な手法となった．その後，スコーレム Skolem [23] はツェルメロの分出公理を一階の論理で表現可能な性質に対して与えることにしてはどうか，という提案をしたのである．

のみならず，スコーレムは，集合論を，形式的に構築され特権的な解釈を持たない $\in$ 記号上の一階の論理に基づくものとして構想したのであった．このことは，彼がレーベンハイム=スコーレムの定理を応用して，集合論では非可算集合が存在しなくてはいけないにもかかわらず，集合論の可算モデルが存在する，という**スコーレムの逆理**を得ているのを見れば明らかである．スコーレムはこれによって集合論が数学の基礎となることを阻止しようとしたのであったが，皮肉なことに，ゲーデル Kurt Gödel の仕事により，スコーレムの集合論への形式論的アプローチは逆に一般に認められるようになったのであった．ここでもまた，逆理での方法は，集合論に組み込まれることになる．つまり，タルスキー Alfred Tarski による意味論的手法の導入により，レーベンハイム=スコーレムの定理は集合論において重要で本質的な役割を果たすことになるのである．

スコーレム Skolem [23]，および，フレンケル Abraham Fraenkel [21, 22] は独立に置換の公理をツェルメロの公理のリストに加えることを提案したが，この公理はある種の反革命の中でその重要性が明らかになってゆく．フォン・ノイマン John von Neumann [23] は順序数を $\in$ で整列された推移的集合として導入しするが，これによりカントルの超限順序数を**集合として**再確立したことになる．新しい定式化では，数は抽象作用ではなくなり，$\in$ と単純な演算から組み立てられ，ツェルメロの枠組の中に組み込まれたものとなったのであった．フォン・ノイマンのこの公理化へのアプローチは集合論での真のクラスをふんだんに使っており，置換の公理が重要な役割を担うような超限帰納的定義を行うことで，この公理に脚光を当てたのである．

これらの展開の後でツェルメロ Zermelo [30] は，置換の公理と基礎の公理も組み込んだ彼の最終的な集合論の公理系を発表する．この公理系は，2階の項を使って書かれており，ウアエレメントを許し，無限の公理を含んでいなかったが，上の特徴を保存して，すぐに後に現れることになる一階の論理の言葉に置き換えることで，標準的なツェルメロ=フレンケルの公理系 (ZFC) が得られたのであった．基礎の公理は，ミリマノフ Dmitry Mirimanov [17]，スコーレム Skolem [23]，フォン・ノイマン von Neumann [25] により，制限の可能性として予示された．ツェルメロは集合論の自然なモデルのそれぞれが次のものの元になっ

て連っている，という統合的な見方を提出して，実質的には基礎の公理がこれらのモデルに属す集合を累積的な階層に振り分けることを，示した．今日の用語で言えば，この公理は形式的な集合のユニヴァース V を $\bigcup_\alpha V_\alpha$ として階層分けする．ここに，V_0 は $\emptyset$ で，$V_{\alpha+1}$ は V_α の巾集合，δ が極限順序数のときには V_δ は $V_\alpha, \alpha < \delta$ の和集合とする．この反復的なとらえ方は，後にゲーデルが，集合論の公理系の正統性を論じる際の発見的方法として，また，拡張に対して開かれている集合論においてカントルの絶対と折り合うような新しい仮説を見つけようとする際の寛容の原理を奨励するものとして擁護してから，ようやく広く認められるようになった，という点は注目に値する．基礎の公理 (Foundation) は，数学を集合論の言葉で記述しなおす際には必要にならないが，集合論固有の構造的な研究においては，重要な役割を果たすことが明らかになってきた．実際，現代の集合論は，カントルの整列順序主義の，ツェルメロの集合の組合せ論的認識への適応化であるところの，整順性 (well-foundedness) の研究であると言っても過言でない．

1930 年代のゲーデルによる一連の鋭い分析は，数学的証明に対する新しい見方をもたらし，数理論理学の性格を大きく変えることになった．このうちの最も根本的なものは，もちろん彼の不完全性定理 Gödel [31] で，これにより，一階の論理での正しさの決定不可能性が示され，帰納関数論が発展することになる．しかし，これに先立つ底流として完全性定理 Gödel [30] が，一階の論理の意味論と形式論との間の相違を明確にし，一階の論理の要となる性質であるところのコンパクト性を確立したのであった．この後，タルスキー Tarski [33, 35] は集合論の言葉により真理の定義を系統化して，哲学者の間に未曾有の活発な議論を巻き起こさせた．これによりモデル理論の発展の下地ができたわけであるが，1950 年以降モデル理論の手法は，集合論に多くの豊かな成果をもたらすようになる．一階の論理は，その意味論の巧みさにより，標準的な言語として受け入れられるようになってゆくが，これに伴って，集合論を一階の論理に基づいて形式化する，というスコーレムのかつての提案は次第に市民権を得るようになり，これに対し，高階の論理は，巾集合演算で置き換えられるものとして次第に顧みられなくなる．

公理系と多くの結果と新しい技術に支えられて，公理的集合論はゲーデルの L の構成 Gödel [38, 39] へと進んで行くが，これにより，選択公理と連続体仮説の相対的無矛盾性が得られることになる．すでに存在していたアイデアを統合することで，ゲーデルはノイマンの順序数に則し置換の公理に支えられる形で，論理的定義可能性に基づいて，カントルの考えたような順序を吹き込みながら，相対的なツェルメロの集合のユニヴァースを構築したのであった．

巨大基数

上で手短に（主観的な解釈を加えて）述べたものがカントルからゲーデルに至る集合論の主流の伝統とすれば，巨大基数の理論は，カントルの定義可能な集合と超限順序数の研究から直接に派生した，もっと古い伝統の継承と言えるであろう．超限順序数と直接的に関わる，このより連続的な発展について取り上げる前に，60 年代に入ってからの新しい展開により再び活発に研究されることになる，もう一つ別の伝統について述べることにする．

記述集合論は連続体の定義可能性に関する理論である．カントルの連続体仮説の研究の主要なアプローチにおいて，彼はこの問題を完全集合を通じて構造化し，閉集合は**完全集合の性質**を持つことを示した (11.3). カントルの，測度論への寄与もこれに関連しているが，この理論はボレル集合，そしてもちろん，ルベーグ測度の概念に到達することになる．記述集合論の中心的な動機はカントルがすでに行なったような，実数の集合への定義可能性からのアプローチであり，ルベーグ可測性やカントルの完全集合の性質などの**正則性**がどこまで成立するかを調べることである．出発点となったルベーグ Henri Lebesgue の Lebesgue [05] では，ボレル集合の階層が初めて与えられ，カントルの対角線論法により，この階層が真の上昇列になっており，しかも定義可能な実数の集合がすべては網羅されていないことが示されている．しかし，この分野が真に確立されるのは，スースリン Mikhail Suslin [17] による**解析集合**の発見と，この，後に**射影的階層**と呼ばれるものの一番始めの階層に関する基本的な結果によってであった．これに続く，ルジン Nikolai Luzin, シルピンスキー Wacław Sierpiński, および，彼らの共同研究者たちによる研究は，実数の集合の**木による表現**ということに集約される．そして，この新展開で，整順的関係が初めて数学の現場で実際に用いられることになった．後に整順性の研究は，基礎の公理や繰り返しの概念といった全く別の展開と発見法へと導かれることになる．超限順序数，あるいは，少なくとも，可算の超限順序数は，この研究分野で不可欠なものとなってゆき，このことにより順序数の概念はさらに正統性の保証を得られた形となり，これが，この概念が一般に数学で受け入れられてゆくようになることを促進した．解析集合の研究は射影的階層を昇ってゆく形で進んでいったが，1930 年代には袋小路に入り込んでしまったように見えた．この状況は後にゲーデルの L での限定的な結果により説明がつくことになる（これについては§§12, 13 で取り上げる）.

他の，もっとカントルの精神に直結する研究への足掛かりは，超限性に関するもので，これは，ハウスドルフ Felix Hausdorff [08] により，高無限に向かって精力的に押し進められた．彼は，数学の基礎に関する議論には無頓着に，超限基数の順序型の構造をそれ自身として追求してゆき，その過程で，自然な極限として**弱到達不可能基数**を導入するが，これは数学の歴史に現れた最初の巨大基数であった．これに続き，マーロ Paul Mahlo [11, 12, 13] はもっと強い極限であるところの**マーロ基数**を考察する．ツェルメロの集合の概念で中心的な役割を果たす巾集合の演算に関する閉包は，シルピンスキー=タルスキー Sierpiński-Tarski [30] とツェルメロ Zermelo [30] により後に**（強）到達不可能基数**の概念に組み込まれることになる．一階の論理が広く受け入れられるようになる以前の，初期の意味論的な研究において，これらの基数は，集合論の自然なモデルを供給することになる，つまり，累積的階層でのこれらの基数に対応する始片がそれである（これらの話題については，§1 でとりあげる）.

可測性は，巨大基数の仮説のなかでも最も重要なものであるが，これは，カントルの二つの精神の伝統の最初の合流点でもあった．この概念はウラム Stanisław Ulam [30] によりルベーグ測度に関する測度論的な考察から抽象化されたものであったが，同時に超限的な到達不可能性を内包していた．さらに，この最初の試論は，これに続く 30 年を照射する巨大基数の火花となるところの未解決問題：**最初の到達不可能基数は可測基数であり得る**

か？ を提起することになった（可測性については§2で議論する）．

高無限の研究がさらに進むためには，モデル理論の発展に伴い，モデル理論的な手法が導入されることが必要であった．ゲーデルの L は**内部モデル**の最初の例となった．内部モデルとは，(一階の論理の論理式で定義できる）すべての順序数を含むクラスで，$\in$ をこのクラスに制限したものと共に考えたときに，集合論の公理系のモデルとなるようなものである．実際，ゲーデルは L により可能な集合のユニヴァースのうち最小のものの存在を示したのであった．そして巨大基数の理論は，まず制限として，それから，後には拡張の可能性として，これに対する補足を与えることになる．ゲーデルの実存主義的な考察，特にカントルの連続体問題は，次のような，彼が後に展開することになる巨大基数の仮説に関する発見法的な議論の萌芽を含んでいた：

集合論のユニヴァース V は，累積的階層 $\bigcup_\alpha V_\alpha$ として見たとき，開かれたものとなっており，集合論の公理系に関しても，未決定な部分が多い，したがって，反映の原理と一般化に基づく更なる仮説が待たれている．ゲーデルは，1946年の覚書 Gödel [90: 151] で，反映の原理を“集合論より高階のシステム”で証明できる集合論的命題というようなものとして捉えている．これを V にあてはめて考えると，カントルの絶対は数学的にとてつもなく広大なので，それに付与されていると考えられる性質のすべては，すでに，ある十分に大きな V_α で成り立っているはずだ，というアイデアとなるが，実際，幾つかの性質にこれを適用すると，直ちに，様々な巨大基数の仮説を得ることができる．一方，1966年の Gödel [90: 260ff] での脚注では，ゲーデルは，“強い形の無限の公理はまったく新しい種類のものであり，類推による強い議論に支えられて”，$\aleph_0$ の性質を一般化する，と述べている．カントルの有限と超限を統一的に見る，という立場に照応して，到達不可能性や可測性など，たまたま $\aleph_0$ で成り立っている性質は，もっと大きな基数でも同様に成り立ってよいのではないか，と考えるわけである．上の反映の原理も，この一般化も，ツェルメロが Zermelo [30] で夢想した，集合論の領域の連なりの永遠の回帰に，すでに潜在的に表明されている．しかし，発見的方法論がどうであろうと，他の数学の研究分野と同様に，巨大基数の研究も，未解決問題と構造的な理解の進歩に促されて進んで行くことになるのである（ここでの事項については§3でとりあげる．ここで述べなかった発見的方法論に関する議論は，Maddy [88, 88a] にある）．

無限の論理演算を許すような一階の論理の拡張が，最小の到達不可能基数が可測基数であり得るか，という問題を解決に導くことになった．タルスキー Tarski [62] は，一階の論理の決定的な性質であるところのコンパクト性を無限論理に自然に拡張したものを対応させることで，**強コンパクト基数**および**弱コンパクト基数**を定義した．強コンパクト基数は可測基数で，可測基数は弱コンパクトとなる．タルスキーの学生だったハンフ William Hanf [64] は，**弱コンパクト基数の下にはたくさんの到達不可能基数（およびマーロ基数）が存在する** (4.7) ということを証明することに成功した．特に，**最小の到達不可能基数は可測基数ではない**．ハンフのこの仕事は，巨大基数と関連する性質に関する大きさに対する直観を根底から覆すことになった（これらの事項については§4で論ずる）．

1960年代の初めに，集合論は，整順的モデルの新しい構成法と，それによる相対的無矛盾性に関する多くの結果による新しい進展により，大きく変革されることになる．これは，

コーエン Paul Cohen [63, 64] による**強制法**の発明によるところが大きい．コーエンはこの発明により，集合論のモデルの拡張を構成するための，驚くほど実りの多い手法を捜し当てたのである．これとは別の文脈で，スコット Dana Scott の論文 Scott [61] は，内部モデルの**初等的埋め込み**の研究を促すことになった．超積の研究がちょうど盛んになった時に，スコットは，V 自身の超巾を用いて，**可測基数が存在すれば，$V \neq L$ がなりたつ** (5.5) という結果を得た．これにより，巨大基数の仮説は，ゲーデルの限定的な構成から大きくかけ離れた状況を作るための手段としての，新しい意義を得ることになったわけである．スコットの構成法は，カントルの絶対にもあきたらないといった風な，集合論での作為的な内部モデルの構成の自由な取り扱いを促進することになる．このような豊かな枠組の中で，可測基数は整順的な超巾を得るために必要であるため，中心的な構造的役割を果たすことになる：**初等的埋め込み $j\colon V \to M$ がある内部モデル M に対し存在することと，可測基数が存在することは同値である**（5.6 とその前を参照 —— これについては§5 でとりあげる）．

集合論でのモデル理論的アプローチから生まれた反映の原理の議論に関し，レヴィAzriel Levy [60a] は，その普遍的な重要性を明らかにし，マーロ基数がこれと深い関連を持つことを示した．この後，ハンフとスコット Hanf-Scott [61] は，反映の原理を高階の論理の言語に関して記述することにより，一連の**記述不可能**基数を定義して，これらの基数が巨大基数の大きさに関する比較のための汎用的なアプローチの方法を与えることを示した．これに続いて，レヴィLevy [71] は，さらに系統的な解析を行うことになるが，これについての説明は，後に述べる文脈の中で与えることにする（記述不可能性については§6 で詳説する）．

スコットの，可測基数が存在すれば $V \neq L$ となる，という結果に対しては，さらに，この命題の仮定を弱めることと結論を強化することの両方での改良が試みられた．このような動向の最初のものが，エルデシュPaul Erdös と彼の共同研究者たちによって当時作り出されたばかりだった無限組合せ論の文脈での，ラムズィー Frank Ramsey [30] の結果の無限への一般化である**分割の性質**の研究を介して行なわれていることは注目に値する．ローボトム Frederick Rowbottom [64, 71] は，可測基数が分割の性質を持つこと (7.17) を示し，モデル理論的手法により，さらに，この性質から，L の中に可算個しか実数が存在しないことが導かれる (8.3) ことを示した．このモデル理論と無限組合せ論の結合により，レーベンハイム=スコーレムの定理を強化したものを成り立たせる一連の巨大基数が導入された．特に，**ローボトム基数**と**ジョンソン基数**に関しては幾つもの面白い問題が提供されることになる．この後，シルバー Jack Silver [66, 71] は，モデル理論で重要な**識別不可能集合**の概念を織り込むことで，後に L からの超越性の本質と見なされ，彼とソロヴェイ Robert Solovay [67] により，識別不可能性の条件により一意に決まる文の集合をコードする自然数の集合 $0^{\#}$ に凝縮されることになる性質の分析を行なった．$0^{\#}$ の存在は，否定的な結論でしかない $V \neq L$ を取り巻く帰結の編み目をはるかに越えて，超越的な V の中で L の構成がいかに硬直したものになっているか，ということについて驚くほど多くの情報を与える．これに続く結果により，$0^{\#}$ の重要性はさらに明らかとなり，この性質の抽出は，集合論の構造の解明における巨大基数の理論の最初の実質的な大勝利となった（これについ

ては第 2 章でとりあげる）.

1960 年代初期にもどろう．ゲーデルの L の構成が公理的集合論を数学の独立した分野として確立したとすると，コーエンの強制法は，それを現代的な洗練されたものに変えたと言えるであろう．彼の連続体仮説に関する仕事を出発点として，それまで未解決問題として残されていた多くの命題の独立性が示されたが，これは集合論の研究者たちが，この集合論のモデルの構成に対する直観的な支えを備えた，驚くほど汎用で柔軟性に富んだ手法を手に入れたからであった．研究が着実に進んで新しいモデルが次々に構成されてゆくにつれて，カントル=ゲーデルの実存主義的な視点は次第に色あせて見えてくるようになった．集合論は，数学の基礎に絡んだ重荷を捨てて，形式化された真理と無矛盾性の問題は，代数でと同様に，組合せ論的な技巧の問題となり，興味深い数学の一分野という性格を次第に強めていった．スコーレムの相対主義からコーエンの相対主義へと進む間に，集合論の数学に対する役割は，問題を解決する基礎としてより，開かれた枠組として確立されてゆくようになる．この視点から見ると，ZFC の公理系が実数の集合の濃度 $2^{\aleph_0}$ を決定しないというのは全く問題のないことであるように思える．任意の実数と写像の可能性の豊かさにかんがみて，直接に上から構造を要求しないかぎり，どんな公理も実数の集合やその整列の多様な可能性のようなオープンエンドな集合を規制することができるはずがないからである．

この変貌の過程の初めから，到達不可能基数はひときわ目立つ役割を果していた．それは，まず，**レヴィ崩壊**の概念において，それから，これの応用による，ソロヴェイ Solovay [65b, 70] の，**到達不可能基数が存在すれば，ある強制法によるモデルの部分モデルで，すべての実数の集合は可測となり完全集合の性質を持つ**（もちろん，この部分モデルでは選択公理は成り立たない）という驚くべき結果においてであった．コーエンの連続体仮説の独立性の証明が超限に対してそうだったように，この実数の集合の正則性に関する結果は，公理系に関する古くからの問題を解決しただけでなく，新しい数学的可能性を示すことで，カントルの研究の精神を再び甦らせた．この直後にソロヴェイ Solovay [69] は彼の証明のアイデアを用いて，可測基数から直接に，ゲーデルにより L では限定的な結果が得られていたレヴェルでの正則性が導かれることを示した．この後，マルティン Donald Martin とソロヴェイ Martin and Solovay [69] は $0^{\#}$ の程度の大きさの巨大基数の仮説のもとで，これらの仮説を整順性の保証をするものとして捉えることにより，古典的理論での木による表現に基づくアイデアをさらに押し進めた（これらについては第 3 章でとりあげる）.

完全集合の性質に関する結果は，強制法と内部モデルという相補的な手法により**無矛盾等価性**の結果が得られる，という集合論における新しい現象の最初の例となった．巨大基数の仮説は，多くの場合，この基数を強制法により $\aleph_1$ に “崩壊” すること，あるいは，連続体の濃度をこの基数に “拡大” することにより，実数の集合に関する命題に変換される．一方，この命題が，ある内部モデルで同じ巨大基数の存在することを保証する．ソロヴェイの結果は，到達不可能基数から，すべての実数の集合は完全集合の性質を持つという命題を導く強制法による方向を示したのだったが．逆方向については，スペッカー Specker [57] が，すべての実数の集合が完全集合の性質を持っていれば，（そして $\aleph_1$ が正則であれば） $\aleph_1$ は L で到達不可能基数になる，という証明をすでに得ていたのであった (11.6).

したがって，ソロヴェイの証明での到達不可能基数の使用は必然的であり，この $\aleph_1$ への崩壊による結果はスペッカーの結果をちょうど補足するものとなったわけである．これから，だいぶ後になってシェラハ Saharon Shelah [84] は，ソロヴェイの結果で，すべての実数の集合がルベーグ可測になるためにも，到達不可能基数の存在が必要であることを示している．

このような無矛盾等価性の結果の出現は，ゲーデルがかつて抱いていた，順序数がたくさんあれば命題は決定されるはずで，どれだけ順序数が存在するかは巨大基数が示唆するはずだ，という希望的予測を微妙に変形して実現するものとなった．つまり，決定はヒルベルト的な無矛盾性の概念の意味で与えられ，そこでは，強制法と内部モデルが議論での機能的な叙述法となったのであった．このカントルの二つの精神の新しい統合において，超限の高さに関する仮説が，実数の集合に関した幅に対する仮説と関連付けられた．ゲンツェン Gerhard Gentzen [36, 43] の，算術の無矛盾性の強さは，正確に，順序数 ε_0, つまり記号列の形式的体系におけるこの順序数までの超限帰納として計測される．という画期的な結果は，上のような現象の前兆となっていた．有限な手段のみによって無矛盾性を確立するというヒルベルトのプログラムは実現不可能となってしまったわけだが，ゲンツェンにより，順序数の大きさによる，確定的な解析が与えられたわけである．1960 年代の証明論は，このような量，つまり証明論的順序数に関して，他の数学理論の解析をするという研究により，たいへん盛んなものとなった．

1960 年代の後半には，可測性に関する広域な研究が，強制法と内部モデルを用いておこなわれた．これらの研究の進展は，構造的な理解を促進させたばかりでなく，さらに新しい問題を示唆し，これに続くもっと強い諸仮説の研究でのパラダイムを提供した．ソロヴェイ Solovay [66, 71] は**飽和イデアル**の概念を導入して，**実数値可測性**に関する無矛盾等価性の結果を得た．これに続く仕事により，飽和イデアルは，可測性の柔軟性を持った一般化であり，累積的階層のはるか下の部分で現れ得ることが示された．ガイフマン Haim Gaifman [64] によって開発された**超巾反復**の手法を縦横に用いて，クーネン Kenneth Kunen [70] は**可測性の内部モデル**の族に関する，主要な構造定理を確立した．これらのモデルは，ゲーデルの L の内部構造を持っているばかりでなく，片方はもう一方の超巾になっているという関係で結ばれており，このような緻密な結合は，可測性の整合性を強く示唆するものとなっている．クーネンは，$0^\#$ の存在を，L が剛性を持たないことで特徴付けた．つまり，**$0^\#$ が存在するのは，初等的埋め込み $j\colon L \to L$ が存在する，ちょうどそのときである．**ソロヴェイは，$0^\#$ の可測性に対すものと同様の役割を内部モデルの族に対して果たす集合 $0^\dagger$ を導入して，これの存在が，やはり非剛性の言葉で特徴付けられることを示した（これらの事項は第 4 章で述べる）．

可測性が，組織的に研究されるようになると，ソロヴェイとラインハート William Reinhardt はさらに強力な仮説を考えるようになった．初等的埋め込みの概念を基礎において，彼らは独立に，可測性と強コンパクト性の両方の一般化により，**超コンパクト**基数を定式化した．ラインハートは**拡張可能**というさらに強い概念を導入したが，これは，直接に反映の原理に基づくものであった．ラインハートはさらに，この線に沿って，最終的な反映の原理の性質となるはずのものを考えたが，ここで劇的な展開があって，この一見して明ら

かに思える拡張は実は矛盾することが，クーネン Kunen [71b] によって示されたのであった．つまり，**初等的埋め込み** $j: V \to V$ **は存在しない**．クーネンの証明は組合せ論的な偶発と思えるものを示したにすぎなかったが，彼の選んだその記述はまさに巨大基数の上限に立つものだったのである．この初めの指導的アイデアが数学的な結果によって具体的な形をとってゆき，また制約をはたされ，これらの矛盾にすれすれのいくつかの仮説や，それよりは弱い n-**膨大基数**，**ヴォピェンカ (Vopěnka) の原理**などが，拡張可能基数の領域をもはるか下に見て研究されていった．超コンパクト基数は，特にこれが新しい集合論的組合せ論や相対的無矛盾性の結果の源となってゆくことで，その重要性を増していった．また，初等的埋め込みの方法の精密化が**エクステンダー**として定式化されると，超コンパクト性を弱めた，**強基数**，**ウディン基数**，**超強基数**などが，後の発展において決定的な役割を果たすようになる（これについては第 5 章で述べる）．

このような高無限の展望が開けてくるにつれ，1970 年代から 1980 年代にかけての広範囲な研究の成果が，ここに出現した巨大基数の階層が，すべての可能な無矛盾性の強さを測ることのできる，万能の物差しとなっている，という見解を擁護することになった．様々な仮説は初めは異なる動機や歴史の偶然から生まれたものであったにもかかわらず，これらの巨大基数の仮説は，線型な階層を形作っている．二つの巨大基数の仮説をとったときの特徴的な状況は，その一つを満たす基数の下に，他のものを満たす基数が一方の規定するような意味でたくさん存在する．さらに，累積的階層の下層のレヴェルに関する組合せ論的命題を含む様々な無矛盾等価性の結果が，弱い仮説から，可測性を強めたものまでを支えている．この意味で，特に興味深いのは，**特異基数問題**で，ここでは，強極限となっている特異基数 κ に対して 2^κ を大きな値にする，というごく基本的な問題が本質的に巨大基数を必要とすることが示されている．最後に，様々な強力な命題においては，その無矛盾性の強さが，二つの巨大基数の仮説によって，両側から押えられる．つまり強い方の仮説からは，この命題が成り立つ強制法による拡張の存在が導かれ，一方，この命題が成り立つとすると，弱い方の仮説を成り立たせるような内部モデルの存在が示せる．超コンパクト性は，このような場合の上限として機能することが多いが，ある場合には，n-膨大基数や，さらにクーネンの矛盾に隣接した仮定がこの役割を果たすこともある（この多義に渡る事柄の解説は第 II 巻の主題となる）．

集合論が，数学のために開かれた枠組を提供したとすれば，自律的な数学の一分野としての集合論は，整順性の研究であり，これは驚くべき成功をおさめるに至ったが，そのことは多分に，無矛盾性の強さの研究に対して，エレガントで十二分に使い勝手のある上部構造を，巨大基数が与えることができたことによるものである．

決定性

巨大基数の研究での大きな成功の一つは，ひときわ目につく非常に興味深い現代集合論での発展と関連している．**ゲームの決定性**の研究はツェルメロ Zermelo [13] にまで遡れるが，無限ゲームの概念が本格的に研究されるようになったのは，1960 年代に，それから実数の集合の正則性が導けることが認識されるようになってからである．ミシェルスキーと

シュタインハウスは，Jan Mycielski and Hugo Steinhaus [62] で，**決定性の公理**を，すくなくともある内部モデルに対して提案した．ここで，ある内部モデルに対して，と言ったのは，この公理は選択公理と矛盾するからである．この後，1967 年になって初めてソロヴェイにより巨大公理との関係付けがなされ，ブラックウェル David Blackwell [67] によって，記述集合論の手法との関連が示された．決定性からの帰結について更に研究が進むと，ソロヴェイ，マルティン，モショヴァキス Yiannis Moschovakis, クーネン，ケクリス Alexander Kechris といった一流の数学者たちによって，間もなく，それ自身で閉じた構造研究としての精妙な関係性の網目が確立された．決定性の公理により多くの問題が解決できそうで，決定性を整列可能性の代わりに原動力となる原理として用いることで，実数の集合と超限に関するカントルの精神の不透明な実現に導く新しい議論の方法が得られそうにみえた．1970 年代後半には，射影集合の完全な理論がほぼできあがり，この記述集合論の主要なプロジェクトの成就により，関心は無矛盾性の問題に移行していった．

マルティン Martin [70] は可測基数の存在が，解析集合に対するゲームの決定性を導くことを早い時期に示していたが，彼は，1970 年代に，たくさんの可測基数が存在することと解析集合の差分階層の各レヴェルとの同等性を示し，さらにクーネンの矛盾性に隣接する巨大基数の仮説から決定性が次の射影集合のレヴェルで成り立つことを示した．この後，1980 年代なかばにフォアマン Matthew Foreman, マギドア Menachem Magidor, シェラハらは強い巨大基数の仮説に関する重要な研究で，突破口をひらいた，この結果自身は直接には決定性に関するものではなかったが，これを踏まえて，マルティン，スティール John Steel, ウディン Hugh Woodin は決定の公理の巨大基数に対しての相対的無矛盾性を得ることに成功した．実際，ウディンは，**決定の公理は無限個のウディン基数の存在と無矛盾等価である**，ということを示し，この無矛盾性の強さが，可測基数よりは上だが，超コンパクト基数よりは遥かに下に位置することを示したのであった．この結果は，現代集合論の手法の完全な勝利であり，また，巨大基数の重要性は，これにより予期しなかったような是認を得ることになった．これに続く，ウディンによる決定性の仮定とそこでの無限組合せ論に関する仕事は，大きな進歩を示し，さらに深い直観が得られてゆくであろうことを示唆している（これらの事項については第 6 章でとりあげる）．

§0 準備

この節では，本文で必要となる数学的な予備知識について述べる．基本的には，集合論の構成的階層 L や強制法の基礎にいたる発展，および，モデル理論での構成法に関する基礎的な概念に関する知識を仮定している．しかしながら，歴史的アプローチをとるので，よく知られた概念の多くを新たに定式化し直したり，それらの基本的性質を復習したり，参考文献についても述べたりすることは，本文中で行う．特に，強制法に関する議論は，この手法が実際に用いられるところでなされる．以下では，このように文脈内で導入しにくいいくつかの基本的な用語や概念を確立する．

集合論に関する表記

集合論に関しては Jech [78], Kunen [80], Drake [74], Levy [79] といった教科書で，基礎的な事柄や，それより高級な話題が述べられている．最初の 3 つのものでは，L に関しての十分な予備知識について述べられており，最初の 2 つでは，強制法の予備知識についても述べられている．また最初のものは，巨大基数についてかなりの量の情報を含んでいる．

$\mathcal{L}_\in$ で集合論の言語，つまり，等号と 2 変数述語記号 $\in$ を持つ一階の述語論理を表す．この言語において AC で，選択公理を表し，CH で連続体仮説，GCH で一般連続体仮説を表す．ZF で $\mathcal{L}_\in$ でのツェルメロ=フレンケル集合論を表し，ZFC でこの公理系に AC を加えたものを表す．ZF^-, ZFC^- はそれぞれこれらの公理系から巾集合の公理を除いたものとする．節の初めあるいは結果を述べるところで，特に別の公理系を指定しない限り，

本書で述べる結果は ZFC での定理である．

したがって，“クラス” とは定義可能なクラスのことである．しかしながら，単一のクラスとして定義可能であるなら，クラスの順序対，さらにクラスの超限列も扱うことにする．本文で用いられている集合論的表記法はおおむね標準的なものである．標準からの逸脱である可能性のある事項は以下のように要約できる：

特に別に指定しない限り，ギリシャ文字の小文字の初めのもの $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ は順序数を表す．これに対し，中ほどの，$\kappa, \lambda, \mu, \nu, \ldots$ は無限基数を表すのに用いる．この約束は，しばしば拡大解釈されて，これらの中ほどの文字は，あるモデルでの基数を表すのに用いられるが，これは文脈から明らかなはずである．α 番目の無限基数を表すのに，慣例では，これの順序型を ω_α で表し，これの濃度を $\aleph_\alpha$ で表すが，この区別はそれほど厳密にはおこなわない．区別を常に厳密にすると，もっと分かりやすくなる，というわけでもなさそうである．$\mathrm{cf}(\gamma)$ は γ の共終数を表し，γ^+ で γ より大きな基数のうちで最小のものを表す．基数 κ が**強極限**であるとは，すべての $\lambda < \kappa$ に対し，$2^\lambda < \kappa$ が成り立つこととする．

On は順序数の全体のクラスを表し，V は集合のユニヴァースを表す．V_α は，ランクが α 以下の集合の全体，H_κ は遺伝的に濃度が κ 未満の集合の全体を表す．累積的階層 $\bigcup_\alpha V_\alpha$ は巾集合の公理の潜在力を使いきって，基本的な V の層状化を与えるが，V の近似としては H_κ の方がより適切であることが多い．通常 H_κ の方が V_κ よりずっと小さいため，節約した使い方ができる，というだけでなく，正則な κ では，H_κ が置換の公理を

満たすからである．

集合 x に対し $|x|$ でその濃度を表す．$\mathcal{P}(x)$ は x の巾集合で，$\mathcal{P}_\kappa x = \{y \subseteq x \mid |y| < \kappa\}$ とする．α^β は，基数 α, β に対しては**基数の指数関数**で，任意の α, β に対しては，文脈からそれが順序数の指数関数を意味しないことが明らかなときには，$\alpha^\beta = |\alpha|^{|\beta|}$ を表すことにする．また，$\alpha^{<\kappa} = \bigcup\{\alpha^\beta \mid \beta < \kappa\}$ とする．したがって，$\lambda^{<\kappa}$ は，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の濃度である．

関数 f に対し，$\mathrm{dom}(f)$ でその定義域を表し，$\mathrm{ran}(f)$ でその値域を表す．$f``x = \{f(y) \mid y \in x\}$ は $x$ の $f$ による像を表し（この記法はホワイトヘッドとラッセルによるものである），$f|x = f \cap (x \times V)$ は $f$ の $x$ への制限を表す．より一般的には，二項関係 $R$ に対し，$R``x = \{b \mid \exists a \in x(\langle a, b\rangle \in R)\}$ とする．${}^y x$ は y から x への関数の全体を表す．したがって λ^κ は ${}^\kappa\lambda$ の濃度となる．また，${}^{<\alpha}x = \bigcup_{\beta<\alpha} {}^\beta x$ とする．$1 \leq n < \omega$ に対し，n-組は，$(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ と帰納的に定義される n-重の直積集合 $X_1 \times \cdots \times X_n$ の元とも，列，つまり定義域 n を持つ関数とも考えることにする．例えば，$0 < k < \omega$ に対し，${}^k X \times Y$ は，$u_i \in X$, $i < k$, $u_k \in Y$ として，$\langle u_0, \ldots, u_{k-1}, u_k\rangle$ の形のものから成り立っているものと見る．n-組に関して，連結 $\frown$ と始片は期待されるような意味を持つものとする．有限列 s に対し $|s|$ はその長さの便利な表記となっている．関数 f とその定義域に入っている $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ に対し，$f(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)$ と書く代わりに $f(x_1, \ldots, x_n)$ と書くことにする．

$x \subseteq y$ は集合の包含関係を表し，$x \subset y$ は真の包含関係を表す．$\supseteq$ と $\supset$ も同様に定義される．$x - y$ で差集合を表す．$x \triangle y$ は対称差 $(x-y) \cup (y-x)$ を表し，$\mathrm{tc}(x)$ は x の推移的閉包，つまり x を含む最小の推移的集合とする．$x \subseteq \mathrm{On}$ に対し，$\mathrm{ot}(x)$ でその順序型を表す．$x \neq \emptyset$ のとき，$\min(x) = \cap x$ とし，$\sup(x) = \cup x$ とする．$\cup x \in x$ のとき，$\max(x) = \cup x$ とする．$[x]^\alpha = \{y \subseteq x \mid \mathrm{ot}(y) = \alpha\}$; $[x]^{<\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha}[x]^\beta$ とする．したがって，$\mathcal{P}_\kappa\lambda = [\lambda]^{<\kappa}$ となる．$[x]^{\leq\alpha} = \bigcup_{\beta\leq\alpha}[x]^\beta$ とする．また x の**始片**とは，ある α に対し，$x \cap \alpha$ の形になる集合のことである．さらに，$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ が $[x]^{<\omega}$ の元を表していときには，常に $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ となっていると仮定する．また，定義域が $[x]^{<\omega}$ の部分集合となる関数 f に対しては，$f(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ を $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ とも書く．真のクラスに対しても，上記のような記法をクラスに適用したとき，結果として得られる表現がふたたび定式化可能なとき，つまりそれがふたたびクラスを表すときには，これを用いることにする．

閉非有界集合と定常集合

$X \subseteq \mathrm{On}$ として，γ は $\bigcup(X \cap \gamma) = \gamma > 0$ となるとき，X の**極限点**であるという．C が δ で**閉非有界**であるとは，C は δ の有界でない部分集合で，δ より小さい C の極限点で共終数が ν となるものをすべて含むこととする．正則の $\nu < \delta$, に対し，C が，δ で **ν-閉非有界**であるとは，C は δ の有界でない部分集合で，その δ より小さいすべての共終数が ν での極限点を含むこととする．極限順序数 δ に対し S が δ で**定常**であるとは，$S \subseteq \delta$ で，すべての δ で閉非有界な C に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となること．文脈からそれが

明らかなときには “δ で” は省略する．$\langle X_\alpha \mid \alpha < \delta\rangle \in {}^\delta\mathcal{P}(\delta)$ なら，この**対角共通部分**は，$\{\xi < \delta \mid \xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} X_\alpha\}$ で，これを $\triangle_{\alpha<\delta} X_\alpha$ で表す．$X \subseteq \mathrm{On}$ で，$f\colon X \to \mathrm{On}$ のとき，f が**退行的**であるとは，$f(\alpha) < \alpha$ がすべての $\alpha \in X - \{0\}$ で成り立つことをいう．次の命題は基礎的である：

0.1 命題 $\lambda > \omega$ を正則とする．

(a) $\gamma < \lambda$ で，$\langle C_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle$ を λ で閉非有界な集合の列とするとき，$\bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha$ も λ で閉非有界となる．

(b) $\langle C_\alpha \mid \alpha < \lambda\rangle$ を λ で閉非有界な集合の列とするとき，対角共通部分 $\triangle_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ も λ で閉非有界となる．

(c) (Fodor [56]) S を λ で定常で，$f\colon S \to \lambda$ を退行的とするとき，$\alpha < \lambda$ で，$f^{-1}(\{\alpha\})$ が λ で定常になるものが存在する．

(d) $\nu < \lambda$ を正則として，$S \subseteq \{\xi < \lambda \mid \mathrm{cf}(\xi) = \nu\}$ は λ で定常とし，C を ν-閉非有界とする．このとき，$S \cap C \neq \emptyset$ となる． ⊣

フィルターとイデアル

空でない集合 S に対し，$F \subseteq \mathcal{P}(S)$ が S **上のフィルター**（または，**イデアル**）とは F が，ブール代数としての $\mathcal{P}(S)$ の真の非単項フィルター（または，イデアル）であることとする．前の文は “のフィルター（イデアル）” という言い方と “上のフィルター（イデアル）” という言い方の区別の例となっている．$E \subseteq \mathcal{P}(S)$ に対し，E **から生成された** S **上のフィルター**（または，**イデアル**）とは，$\{X \subseteq S \mid \exists Y \in E(Y \subseteq X)\}$（または，$\{X \subseteq S \mid \exists Y \in E(X \subseteq Y)\}$)）のこととする，ただし，これらが真で非単項になるときに限る．フィルター（または，イデアル）が **λ-完備**とは，任意の $\gamma < \lambda$ と $\{X_\alpha \mid \alpha < \gamma\} \subseteq F$ に対し，$\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in F$（または，$\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in F$）となること．$U$ が S **上の超フィルター**とは，U は S 上の極大なフィルターであること，つまり，任意の $X \subseteq S$ に対し，$X \in U$ または $S - X \in U$ が常に成り立つこと，とする．S 上のフィルター F が**一様**とは，すべての $X \in F$ に対し，$|X| = |S|$ となること．

ここでは便宜のため，**基数 λ 上のフィルター F は，すべての終片を含むことを仮定する，つまり $\lambda - \alpha = \{\xi \mid \alpha \leq \xi < \lambda\} \in F$ がすべての $\alpha < \lambda$ で成り立つ**ようなフィルターのみを考えることにする．これの双対として，**基数 λ 上のイデアル I は，すべての始片を含む，つまり $\alpha = \{\xi \mid \xi < \alpha\} \in I$ がすべての $\alpha < \lambda$ に対し成り立つ**とする．正則基数 $\lambda > \omega$ に対し，$\mathcal{C}_\lambda$ で λ **上の閉非有界フィルター**，つまり，λ の閉非有界な部分集合の全体から生成されるフィルターを表す．0.1(a) により，$\mathcal{C}_\lambda$ は，λ-完備である．これに対応するのは，λ **上の非定常イデアル** NS_λ で，これは，定常でない λ の部分集合の全体からなる λ-完備なイデアルである．

モデル理論での記法

モデル理論に関しては，構造，充足関係，初等的同値性，部分構造と埋め込み，コンパク

ト性，スコーレム閉包の手法，超積の構成法に関する基本的な知識を仮定する（最後の二つについては以下でも復習をする）．また，集合構造に対し充足関係が定式化できることも知識として仮定する．モデル理論の標準的な教科書は Chang-Keisler [90] があり，集合論における定式化は，Devlin [84], Kunen [80], Moschovakis [80], Drake [74] などで論じられている．

$\mathcal{L}_\in$ の論理式 φ に対し，φ^M で，量化子をクラス M に相対化したものを表す．これは φ の複雑さに関する帰納法により定義される．この記法は，定義可能な項またはクラス t にも拡張できて，t^M を導入することができる．さらに一般的には，$\mathcal{M}$ を構造として t をそれに対応する言語で定義できる項とするとき，$t^{\mathcal{M}}$ で t の $\mathcal{M}$ での解釈を表す．項に対して $t(v_1, \ldots, v_n)$ という書き方をしたときには，この項の変数はすべて，$v_1, \ldots, v_n$ に含まれるものとし，論理式を $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ と書いたときには，この自由変数はすべて $v_1, \ldots, v_n$ に含まれるものとする．便宜上変数の添数は通常 1 から始めるが，時おり 0 から始めることもある．いずれにしても，φ が論理式のメタ変数と見なされるのと同様に，上のような変数 v_i も形式的体系での変数のメタ変数として捉えられているので，このような添数つきの表現は実際の変数を特定するものではない．上のような，$t(v_1, \ldots, v_n)$ と $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$, および，項 $t_1, \ldots, t_n$ に対し，$t(t_1, \ldots, t_n)$ は，t に現れる v_i をすべて t_i で置き換えたもので，$\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ は，φ に自由変数として現れる v_i をすべて t_i で置き換えて得られる結果である．後者は，t_i に現れる変数がどれも φ で量化子によって束縛されていないときのみ許される．最後に，$\mathcal{M} \models \varphi[x_1, \ldots, x_n]$ は，変数 v_i を 構造 $\mathcal{M}$ の領域の元 x_i に付値して解釈した時，φ が $\mathcal{M}$ で成り立つ，ということを表す．$\models$ は論理式の集合に対しても拡張されて，例えば $\mathcal{M} \models \mathrm{ZFC}$ は，期待されるような意味を持つ．

公理系 T に対し，$\mathrm{Con}(T)$ は，この公理系の言語の算術化による，これの無矛盾性に対する形式的体系での命題である．理論 T_1 と T_2 に対し，T_2 が T_1 に**相対的に無矛盾**とは $\mathrm{Con}(T_1) \to \mathrm{Con}(T_2)$ が成り立つことで，T_1 と T_2 が**無矛盾等価**とは $\mathrm{Con}(T_1) \leftrightarrow \mathrm{Con}(T_2)$ が成り立つことである．しかし，このような命題は，日本語による普通の数学用語で表した方が分かりやすいであろう．このような場合，少なくともその証明を見れば，それの真に意味していることが明らかになるであろう．

これらの取り決めは，充足性や定義可能性について論じるときには守るようにするが，実際の議論では $\mathcal{L}_\in$ での個々の論理式は，通常そうであるように，変数へ直接集合を代入した形のものを数学的日本語で書き表した形で与えられる．構造について，特に注意深く議論がなされるときでも，このような形式論と意味論の混同は $\models$ の右側に現れることがある．このようなときには，混乱のおそれがあるときには，文章の残りの部分から区別できるように論理式を クワインの引用記号 $\ulcorner\urcorner$ で括ることにする．論理式 φ に対しては，$\ulcorner\varphi\urcorner$ で，文脈で与えられている算術化による，この論理式のコードも表すことにする．

本書では，$\mathcal{L}_\in$ 構造で，領域と本当の要素関係をこの領域に制限した $\langle M, \in \cap (M \times M)\rangle$ の形をしたものを頻繁に考察することになる．簡単のため，このような構造は $\langle M, \in\rangle$ あるいは，文脈から明らかなときには単に M で表すことにする．$\mathcal{L}_\in$ での公理系 T に対し，M が T の **$\in$-モデル**とは，$\langle M, \in\rangle$ が T のモデルであることである．$\langle M, \in \cap (M \times M), R\rangle$ の形に拡張された構造も取り扱われる．ここに $R \subseteq M$ である．このような構造は $\langle M, \in, R\rangle$

と書き表すことにする．このときには，R は新しい単項述語記号の解釈となっていると考える．しかしながら，集合論的な文脈では，$R(x)$ と書かずに $x \in R$ と書くことが多い．同様の注意はさらに拡張された構造についても言える．明記する必要があるときには，$\mathcal{L}_{\in}^{X}(\dot{R}_1, \ldots, \dot{R}_n)$ で集合論の言語 $\mathcal{L}_{\in}$ を各々の $x \in X$ に対する定数記号 $\dot{x}$ と，それぞれに変数の数が確定された述語記号 $\dot{R}_1, \ldots, \dot{R}_n$ で拡張したものを表すことにする．$\mathcal{L}_{\in}(\dot{R}_1, \ldots, \dot{R}_n)$ は $\mathcal{L}_{\in}^{\emptyset}(\dot{R}_1, \ldots, \dot{R}_n)$ のこととする．

しばしば，V のように，その領域が真のクラスであるような構造を考察することが必要になる．この場合にも上記の取り決めは同様に適用されるが，ここで非常に重要な注意すべき点がある：ゲーデル=タルスキーの真理の定義不可能性（Jech [78: 125] を参照）により，充足関係 $\langle \ulcorner\varphi\urcorner, \langle x_1, \ldots, x_n\rangle\rangle \in S \Leftrightarrow V \models \varphi[x_1, \ldots, x_n]$ は ZF では形式的には定義することができず，したがって，もっと一般的に真のクラスに対する充足関係 $\langle \ulcorner\varphi\urcorner, \langle z_1, \ldots, z_k\rangle, \ulcorner\psi\urcorner, \langle x_1, \ldots, x_n\rangle\rangle \in S^{+} \Leftrightarrow \{y \mid \varphi[y, z_1, \ldots, z_k]\} \models \psi[x_1, \ldots, x_n]$ も定義できない．このことが本文中で形式化が不可能になることのある原因であるが，それについては，そのような事態が起こった場所で議論する．

論理式の階層

定義可能性に関連して，特に，絶対性や反映の原理の議論において，幾種類かの論理式の階層が考察される．任意の（一階の論理での）$\mathcal{L}_{\in}$ の拡張 $\mathcal{L}$ に対し，$\mathcal{L}$ の論理式のレヴィ**階層**は次のように述べることができる：論理式の量化子がすべて**有界**であるとき，つまり，$\forall v \in w$ または $\exists v \in w$ という形に書き表すことができるとき，このような論理式を Σ_0 かつ Π_0 であるという．帰納的に，論理式が Σ_{n+1} であることを，この論理式が，ある Π_n の論理式 φ により，$\exists v_1 \ldots \exists v_k \varphi$ と表せることとし，Π_{n+1} であることを，これが，ある Σ_n の論理式 φ により，$\forall v_1 \ldots \forall v_k \varphi$ と表せることとする．簡便のために，この用語をさらに拡張して，すべての論理式は Σ_ω かつ Π_ω であるとする．定義可能な概念の，この階層による分類は，考えている公理系に依存する．$\mathcal{L}$ での公理系 T に対し，論理式 φ が Σ_n^T であるとは，ある Σ_n の論理式 φ' があって，$T \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ となることとする．Π_n^T も同様に定義する．論理式が Δ_n^T であるとは，これが Σ_n^T と Π_n^T の両方であることをいう．この用語は，クラスに対しても，それを定義する論理式を介して適応される．

Σ_n^{ZF} および Π_n^{ZF} の論理式は，対の公理を使うことで，同じ種類の量化子のブロックを一つにまとめた形のものと同値になることが分かる．有界な量化子の適用も ZF では複雑さの増加をおこさない：

(i) φ が Σ_n^{ZF} なら，$\exists v \in w \varphi$ も $\forall v \in w \varphi$ も Σ_n^{ZF} となる．

(ii) φ が Π_n^{ZF} なら，$\exists v \in w \varphi$ も $\forall v \in w \varphi$ も Π_n^{ZF} となる．

これを帰納法で示すために，(i) と (ii) が n のところに任意の $k < n$ を代入したときに成り立つと仮定する．(ii) は，(i) から否定をとることで得られる．また (i) の最初のものは明らかである．(i) の二つめのものを示す．φ は，ある Π_{n-1} の論理式 ψ に対し $\exists v_0 \psi$ と書ける．このとき，置換の公理により

$$\forall v \in w \exists v_0 \psi \ \leftrightarrow\ \exists v_1 \forall v \in w \exists v_0 \in v_1 \psi$$

となるが，右側の論理式は帰納法の仮定により Σ_n^{ZF} である．

超限帰納法の議論の典型的なパターンの一つを用いることにより，以下のような非常に有用な命題が得られる：

0.2 補題 「$\mathrm{rank}(v_0) = v_1$」は Δ_1^{ZF} で，「$V_{v_0} = v_1$」は Π_1^{ZF} である．

証明 $\varphi(f)$ を論理式

$$f \text{ は関数 } \wedge\ \forall x \in \mathrm{dom}(f)(x \subseteq \mathrm{dom}(f) \wedge f(x) = \bigcup\{f(y)+1 \mid y \in x\})$$

とする．この論理式は，f が推移的な定義域を持ち，ランク関数の通常の帰納的定義を満たすことを主張している．したがって，

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}(v_0) = v_1 \quad &\Leftrightarrow\ \exists f(\varphi(f) \wedge \langle v_0, v_1\rangle \in f) \\ &\Leftrightarrow\ \forall f(\varphi(f) \wedge v_0 \in \mathrm{dom}(f) \to \langle v_0, v_1\rangle \in f) \end{aligned}$$

となる．$\varphi(f)$ は Δ_0^{ZF} だから，一番目の主張が証明できる．二番目のものについては，

$$V_{v_0} = v_1 \ \Leftrightarrow\ v_0 \text{ は順序数} \wedge \forall v_2(v_2 \in v_1 \leftrightarrow \exists v_3 \in v_0(\mathrm{rank}(v_2) = v_3))$$

となることに注意する．これの右辺は，上で述べた有界な量化子が吸収可能であることから，Π_1^{ZF} となることが分かる． ⊣

論理式の複雑さに関する帰納法によって証明できる次の命題はよく知られている：Σ_0 論理式は**推移的構造に対して絶対的である**，つまり，$\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ が Σ_0，M が推移的で，$x_1, \ldots, x_n \in M$ なら，

$$\langle M, \in\rangle \models \varphi[x_1, \ldots, x_n] \ \Leftrightarrow\ \langle V, \in\rangle \models \varphi[x_1, \ldots, x_n]$$

が成り立つ．さらに，Δ_1^{ZF} 論理式は，**ZF の推移的な $\in$-モデルに対し絶対的である**，つまり，$\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ が Δ_1^{ZF} で，M がこのようなモデルで，$x_1, \ldots, x_n \in M$ なら

$$\langle M, \in\rangle \models \varphi[x_1, \ldots, x_n] \ \Leftrightarrow\ \langle V, \in\rangle \models \varphi[x_1, \ldots, x_n]$$

となる．0.2 の証明を例にとって，これを見てみよう：$\langle M, \in\rangle \models \mathrm{rank}(x) = \alpha$ なら，これの Σ_1 論理式による記述により，M で，φ を満たす f で $f(x) = \alpha$ となるものがある．これは $V \supseteq M$ でも成り立っているから，V で $\mathrm{rank}(x) = \alpha$ である，つまり**上方向への保存**が成立する．$\mathrm{rank}(x) = \alpha$ なら，これの Π_1 論理式による記述により，任意の f で φ を満たし $x \in \mathrm{dom}(f)$ となるものに対し，$f(x) = \alpha$ が成立する，したがって，これは $M \subseteq V$ でも成り立っているから，$M \models \mathrm{rank}(x) = \alpha$ となる，つまり**下方向への保存**が成立する．φ が上方向へ保存されるなら，$\exists v \varphi$ もそうであり，φ が下方向へ保存されるなら，$\forall v \varphi$ もそうである，という基本的な事実も頻繁に使われることになる．

レヴィ階層に関したさらに詳しいことについては，Levy [65], Jech [78: 114ff], Devlin [84: 27ff], あるいは Drake [74: 75ff] を参照されたい．

充足関係については後の2つの教科書では，集合構造で Δ_1^{ZF} となり，したがって，ZFC の推移的な $\in$-モデルで絶対となるような，この関係の定式化が与えられている．我々は次のような作戦を採用する：M が推移的で，$y \in M$ も推移的とし，$\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ が $\mathcal{L}_\in$ の論理式で，$x_1, \ldots, x_n \in y$ のとき，

$$\langle y, \in\rangle \models \varphi[x_1, \ldots, x_n] \ \Leftrightarrow\ \langle M, \in\rangle \models \varphi^{(y)}[x_1, \ldots, x_n]$$

となる．したがって，$\langle M, \in\rangle$ は必ずしも ZF のモデルではないにも関わらず，ここで φ の $\langle y, \in\rangle$ での充足の是非が絶対的な Σ_0 論理式 $\varphi^{(y)}$ の形で定式化できてしまう．

真のクラスに対しては，充足関係が定式化できないことは，すでに述べた．個々の n と推移的なクラス M に対しては，Σ_n 論理式に制限された充足関係 $\models_M^n$ は ZF で定式化可能である，という事実は有用である：$n = 0$ に対しては，

$$\begin{aligned} \models_M^0 \ \varphi[x_1, \ldots, x_k] \ \Leftrightarrow\ & \varphi(v_1 \ldots, v_k) \text{ は } \Sigma_0 \text{ で } \exists y \in M (y \text{ は推移的} \\ & \wedge\ x_1, \ldots, x_k \in y \ \wedge\ \langle y, \in\rangle \models \varphi[x_1, \ldots, x_k]) \end{aligned}$$

とでき，帰納的に，

$$\begin{aligned} \models_M^{n+1} \ \varphi[x_1, \ldots, x_k] \ \Leftrightarrow\ & \varphi(v_1 \ldots, v_k) \text{ は } \Sigma_{n+1} \text{ で，ある } \Sigma_n \text{ の論理式} \\ & \psi \text{ に対し，} \exists v_{k+1} \ldots \exists v_{k+r} \neg\psi(v_1, \ldots, v_{k+r}) \text{ と表せ，} \\ & \exists y_1 \ldots \exists y_r \neg(\models_M^n \ \psi[x_1, \ldots, x_k,\, y_1, \ldots, y_r])\,, \end{aligned}$$

と定義できる．

一般の高階言語は，すべての有限のタイプ（あるいは階）に対する，タイプ付けされた変数の集合と，これらの変数の量化子による束縛，また言語によって規定される原子論理式以外に，タイプ付けされた変数 X, Y に対して $X \in Y, X = Y$ も許すものとする．これの解釈は，D を構造の領域とすると，タイプ 2 の変数は，普通の一階の論理での変数の役割を果たし，タイプ 2 の変数は $\mathcal{P}(D)$ を走るものとし，一般に，タイプ $n+1$ の変数は $\mathcal{P}^i(D)$ 上を走るものとする．ここに $\mathcal{P}^i$ は巾集合の演算の i 回の繰り返しとする．論理式が Π_n^m とは，それが タイプ $m+1$ の変数の全称量化子のブロックで始まり，それにタイプ $m+1$ の変数の存在量化子が続くというふうに最大で n 個のブロックがあったあと，これにタイプが最大で $m+1$ となる変数のみを含み，束縛された変数はタイプが最大で m であるよう論理式が続いているようなものをいう．論理式が Σ_n^m とは，それが，上と同様だが，存在量化子で始まっているようなものをいう．もちろん，タイプ 1 の変数のみを含むような論理式は普通の一階の論理の論理式となる．この論理式の分類は，“最大で” という言い回しにより，累積的なものになっていることに注意しよう．したがって，$r > m$ あるいは，$r = m$ で $s > n$ なら，Π_n^m または Σ_n^m 論理式は，Π_s^r かつ Σ_s^r ともなっている．ここで考察される構造では，これらの論理式は，常に，量化子のブロックがそれぞれ一つの量化子にまとめられた論理式と同値になる．

整順性

集合 X を領域に持つ非反射的な 2 項関係 R に対し，R が**整順的**とは，任意の空でない

$Y \subseteq X$ が R に関する極小元をもつことである．ここで R が推移的であることは特に仮定しない．次のことは基本的である：

0.3 補題 集合 X をその領域として持つ 2 項関係 R が整順的となるのは，$\rho\colon X \to \mathrm{On}$ で順序を保存する，つまり $\langle x, y\rangle \in R$ なら $\rho(x) < \rho(y)$ となるようなものが存在するときである．特に，「R は整順的」は，Δ_1^{ZF} である．

自明でない方向の証明のためには，ランク関数 ρ を帰納的に

$$\rho(y) = \sup(\{\rho(x) + 1 \mid \langle x, y\rangle \in R\})$$

と定義すればよい．整順性の定義は Π_1^{ZF} で，ランク関数の定式化は Σ_1^{ZF} となっている．

次の**崩壊の補題**も重要である：

0.4 補題 (Mostowski [49], Shepherdson [51]). $\langle M, E, \ldots\rangle$ を，2 項関係 E を持つ構造で，M は集合または真のクラスとし，次を満たすものとする：

(a) E は整順的である；

(b) $\langle M, E\rangle$ は外延的である，つまり，$a, b \in M$ で，$x \mathrel{E} a \iff x \mathrel{E} b$ がすべての $x \in M$ で成り立つなら，$a = b$ となる；

(c) E は集合的である，つまり，すべての $a \in M$ について，$\{x \mid x \mathrel{E} a\}$ は集合とる．

このとき，ある推移的な $\overline{M}$ と，同型写像 $\pi\colon \langle M, E, \ldots\rangle \to \langle \overline{M}, \in, \ldots\rangle$ が一意に存在する． ⊣

$\langle \overline{M}, \in, \ldots\rangle$ は $\langle M, \in, \ldots\rangle$ の**推移的崩壊**と呼ばれる．π は，E に関する帰納法により，$x \in M$ に対し，$\pi(x) = \{\pi(y) \mid y \mathrel{E} x\}$ と定義される．“...” には，他の関係や関数が含まれていてよい．例えば，$R \subseteq {}^nM$ として，$\langle M, E, R\rangle$ については，$S \subseteq {}^n\overline{M}$ と，$\langle M, E, R\rangle \to \langle \overline{M}, \in, S\rangle$ で，$x \in R \iff \pi(x) \in S$ がすべての $x \in {}^nM$ に対し成り立つようなものがとれる．

上の補題で，条件 (b) と (c) が成り立つことは，この補題の応用でのほとんどの場合，直ちに導ける．最初のものは，通常，考察している $\langle M, E, \ldots\rangle$ がある推移的な X に対する $\langle X, \in, \ldots\rangle$ と初等的同値であることから成り立っている．(a) は一番本質的であるが，この補題が用いられる時には，$\langle M, E, \ldots\rangle$ がある $\langle X, \in, \ldots\rangle$ の初等的部分モデルとなっていることが多いので，このときには，これも自明なものとなる．これらの条件や補題自身については，この補題の適用に慣れてくるにしたがって，だんだんといちいち言及しなくなる．

スコーレム閉包の手法

スコーレム閉包の手法と言ったときには，Chang-Keisler [90: §3.3] に詳説されている以下の構成法に類似の議論を指す．$\mathcal{M} = \langle M, \ldots\rangle$ を言語 $\mathcal{L}$ の構造とする．$\mathcal{L}$ の論理式 $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ に対し，$f\colon {}^nM \to M$ が φ の**スコーレム関数**とは，任意の $x_1, \ldots, x_n \in M$ に対し，

$$\mathcal{M} \models \exists v_0 \varphi[x_1, \ldots, x_n] \;\Rightarrow\; \mathcal{M} \models \varphi[f(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n]$$

が成り立つことである．このような関数は，M が整列順序を持つなら，これに関して最小の例をとることで得ることができる．したがって，$\mathcal{M}$ が定義可能な整列順序を持つなら，すべての φ に対し，定義可能なスコーレム関数が存在する．$\mathcal{M}$ に対する**スコーレム関数の完全族**とは，各 f_φ が φ のスコーレム関数となるような集まり $\{f_\varphi \mid \varphi \text{ は論理式}\}$ の関数の合成に関する閉包のことをいう．このような関数の族は $\mathcal{L}$ の論理式の数 $|\mathcal{L}|$ の濃度を持つ．

$\mathcal{M}^*$ を $\langle \mathcal{M}, f_\alpha \rangle_{\alpha<|\mathcal{L}|}$ という拡張としよう．ここに $f_\alpha\colon {}^{k(\alpha)}M \to M$ で，$\{f_\alpha \mid \alpha < |\mathcal{L}|\}$ は $\mathcal{M}$ に対するスコーレム関数のすべてとする．f_α に対応する拡張された言語での関数記号をこのスコーレム項と呼ぶ．$X \subseteq M$ に対し，

$$\{f_\alpha(x_1, \ldots, x_{k(\alpha)}) \mid \alpha < |\mathcal{L}| \ \wedge \ x_1, \ldots, x_{k(\alpha)} \in X\}$$

は $\mathcal{M}^*$ の部分構造の領域となり，これのもとの言語への還元 $\mathcal{H}(X)$ は X の $\mathcal{M}$ での $\{f_\alpha \mid \alpha < |\mathcal{L}|\}$ に関する**スコーレム閉包**とよばれる．（タルスキーの）判定条件から，$\mathcal{H}(X) \prec \mathcal{M}$, つまり，$\mathcal{H}(X)$ は $\mathcal{M}$ の初等的部分構造となることが分かる．これにより，以下のような**レーベンハイム=スコーレムの定理**の便利な形のバリエーションが得られる：

0.5 定理 (Tarski-Vaught [57: 92]). $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ を言語 $\mathcal{L}$ の構造として，$X \subseteq M$ とする．このとき，$\mathcal{M}_0 = \langle M_0, \ldots \rangle \prec \mathcal{M}$ で，濃度が $|X| + |\mathcal{L}|$ と等しいか小さく，$X \subseteq M_0$ となるものが存在する． $\dashv$

さらに，スコーレム関数の完全族により，与えられた初等的部分構造をたくさん生成するための**統一的**な方法が得られる．

超積

超積の構成法に関する基礎をここで復習するが，これはひとつにはここで記法を固定するためである（より詳しくは Chang-Keisler [90: §4.1] を参照されたい）．U を集合 S 上の超フィルターとして，各 $i \in S$ に対し，$\mathcal{M}_i = \langle M_i \ldots \rangle$ をある固定された言語 $\mathcal{L}$ の構造とする．$\prod_S M_i$ で $M_i, i \in S$ の直積集合，つまり，定義域が S で，$f(i) \in M_i$ がすべての $i \in S$ で成り立つような関数 f の全体の集合を表す．$f, g \in \prod_S M_i$ に対し，

$$f =_U g \ \Leftrightarrow \ \{i \in S \mid f(i) = g(i)\} \in U$$

とすると，$=_U$ は $\prod_S M_i$ 上の同値関係となる．そこで，$(f)_U$ を f に対応する同値類として，$\prod_S M_i/U = \{(f)_U \mid f \in \prod_S M_i\}$ とする．ここで，$\mathcal{M}_i, i \in S$ の U による**超積**を次のように定義する：(i) 超積の領域は $\prod_S M_i/U$ で，(ii) $\mathcal{L}$ の n-変数述語記号が，各 $\mathcal{M}_i$ で n-項関係 $R_i \subseteq {}^n M_i$ と解釈されているとき，この超積での解釈 R_U は，

$$\langle (f_1)_U, \ldots, (f_n)_U \rangle \in R_U \ \Leftrightarrow \ \{i \in S \mid \langle f_1(i), \ldots, f_n(i) \rangle \in R_i\} \in U$$

により定義される．関数記号と定数記号の解釈も同様に定義する．各 R_i が要素関係を M_i に制限したものであるとき，超積での対応する解釈 E_U は

$$(f)_U \ E_U \ (g)_U \ \Leftrightarrow \ \{i \in S \mid f(i) \in g(i)\} \in U$$

で与えられることに注意したい．次の定理は**ウォッシュ（Łoś）の定理**と呼ばれる基本的な定理である：

0.6 定理 （Łoś [55]）．論理式 $\varphi(v_1,\ldots,v_n)$ と $f_1,\ldots,f_n \in \prod_S M_i$ に対し，

$$\begin{aligned}&\textstyle\prod_S \mathcal{M}_i/U \models \varphi[(f_1)_U,\ldots,(f_n)_U]\\ &\Leftrightarrow \ \{i \in S \mid \mathcal{M}_i \models \varphi[f_1(i),\ldots,f_n(i)]\} \in U\end{aligned}$$

が成り立つ．

証明は，φ の複雑さに関する帰納法によっおこなわれる，存在量化子のステップで選択公理が必要となる．

ある固定された $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ に対して各 $\mathcal{M}_i$ がすべて $\mathcal{M}$ となっているとき，この超積を $\mathcal{M}$ の U による**超巾**と呼び，${}^S\mathcal{M}/U$ で表す．このときには，0.6 により，初等的埋め込み j: $\mathcal{M} \to {}^S\mathcal{M}/U$ が，$j(x) = (f_x)_U$ によって与えられる．ただし f_x は定値関数 $S \to \{x\}$ である．V 自身の超巾は§5で導入され，これのいくつかのバリエーションはこれに続く節で考察される．

順極限

ここでは構造の初等的埋め込みの系に関する順極限の構成法について述べる．これをいくつかの明らかな変更により修正したものが，いくつかの異なる文脈の中で用いられることになる．**有向集合**とは半順序集合 $\langle S, \leq \rangle$ で，任意の $i, j \in S$ に対し，$k \in S$ で $i \leq k$ かつ $j \leq k$ となるものが存在するものである．**順系**とは，$\langle\langle \mathcal{M}_i \mid i \in S \rangle, \langle f_{ij} \mid i \leq j \rangle\rangle$ という組で，ここに，$\langle S, \leq \rangle$ は有向集合，各 $\mathcal{M}_i$ はある固定された言語 $\mathcal{L}$ の構造，また，各 f_{ij}: $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$ は初等的な埋め込みで，$f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ がすべての $i \leq j \leq k$ に対し成り立つものとする（したがって，各 f_{ii} は $\mathcal{M}_i$ 上の恒等関数である）．

このような系の順極限とは，$\mathcal{L}$ の構造 $\mathcal{M}$ で，初等的埋め込みの族 f_i: $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}, i \in S$ があって，各々の $\mathcal{M}$ の領域の元 x に対し，$x \in \mathrm{ran}(f_i)$ が ある $i \in S$ に対し成り立つようなものをいう．次の命題はこの概念の核心を示している：

0.7 命題 $\langle\langle \mathcal{M}_i \mid i \in S \rangle, \langle f_{ij} \mid i \leq j \rangle\rangle$ を順系として，$\mathcal{M}$ を対応する埋め込み f_i: $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}$ を持つ順極限とする．$\mathcal{N}$ は初等的埋め込み g_i: $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{N}$ で，$g_i = g_j \circ f_{ij}$ がすべての $i \leq j$ に対し成り立つようなものを持つものとする．このとき，初等的埋め込み g: $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ で，$g_i = g \circ f_i$ がすべての $i \in X$ に対し成り立つものが存在する． ⊣

g を $\mathcal{M}$ の領域の元 x に対し定義するには，ある $i \in S$ と $\mathcal{M}_i$ の元 $\overline{x}$ に対し $x = f_i(\overline{x})$ となっているとして，$g(x) = g_i(\overline{x})$ とおけばよい．"ダイヤグラム上の追跡"（"Une chasse sur les diagrammes"）により，g はうまく定義でき，初等的埋め込みとなることが確かめられる．

0.7 から，ある順系の任意の 2 つの順極限は同型になることが示せる．したがって，その存在が確立されれば，定冠詞つきの順極限を考えてよい．この存在は以下のようにして示せる：

$\langle\langle \mathcal{M}_i \mid i \in S\rangle, \langle f_{ij} \mid i \leq j\rangle\rangle$ を順系とし，各 $i \in S$ に対し M_i を $\mathcal{M}_i$ の領域とする．$B = \bigcup_{i\in S}\{i\} \times M_i$ とおく．これは M_i, $i \in S$ の互いに素なコピーの和集合となっている．B 上の二項関係 $\sim$ を，

$$\langle i,x\rangle \sim \langle j,y\rangle \;\Leftrightarrow\; \exists k \in S(i \leq k \;\wedge\; j \leq k \;\wedge\; f_{ik}(x) = f_{jk}(y))$$

で定義する．$\sim$ は同値関係となることが容易に確かめられるから，$[\langle i,x\rangle]$ を $\langle i,x\rangle$ に対応する同値類として，

$$M = B/{\sim} = \{[\langle i,x\rangle] \mid \langle i,x\rangle \in B\}$$

とおく．M を $\mathcal{L}$ の構造に拡張するには，例えば，$\mathcal{L}$ に n-変数述語記号が含まれ，これが $i \in S$ に対し，$\mathcal{M}_i$ で $R_i \subseteq {}^nM_i$ と解釈されているとき，対応する $R \subseteq {}^nM$ を次のようにして定義する：$[\langle i_1,x_1\rangle],\ldots,[\langle i_n,x_n\rangle] \in M$ が与えられたとき，まず $k \in X$ で $i_s \leq k$ がすべての $1 \leq s \leq n$ に対し成り立つようなものをとり，

$$\langle[\langle i_1,x_1\rangle],\ldots,[\langle i_n,x_n\rangle]\rangle \in R \;\Leftrightarrow\; \langle f_{i_1k}(x_1),\ldots,f_{i_nk}(x_n)\rangle \in R_k$$

とする．R がこのようにしてうまく定義できることを確かめるのはやさしい．関数記号や定数記号の解釈も同様に定義する．$\mathcal{M} = \langle M, R, \ldots\rangle$ をこうして得られる $\mathcal{L}$ の構造とする．各 $i \in S$ に対し，f_i: $\mathcal{M}_i \to \mathcal{M}$ を $f_i(x) = [\langle i,x\rangle]$ で定義すると，$\mathcal{M}$ が f_i, $i \in S$ により順極限となっていることが示せる．

測度とカテゴリー

連続体の研究で用いられるいくつかの基本概念を復習して，この節での準備を締めくくる．$\mathbb{R}$ で有理数の全体のデデキント完備化として定式化できる実数の全体の集合を表す．しかし，集合論での慣例にしたがって，${}^\omega\omega$ の元や，$\mathcal{P}(\omega)$ の元も "実数" と呼ぶことにする．集合論で $\mathbb{R}$ の構造的な性質を論じるときには，$\mathbb{R}$ ではなく，${}^\omega\omega$ に，各 $s \in {}^{<\omega}\omega$ に対する

$$O(s) = \{f \in {}^\omega\omega \mid s \subseteq f\}$$

を基本開集合として位相を入れたものを扱う方が便利なことが多い．この空間はベール空間として知られていて，これも ${}^\omega\omega$ で表す．この位相空間は無理数の全体と位相同型であるが，構造的な性質で重要なものは，この $\mathbb{R}$ への対応付けで保存される（例えば，Levy [79: VII§3] を参照）．

${}^{<\omega}\omega$ の枚挙 $\langle \mathbf{s}_i \mid i \in \omega\rangle$ で，$|\mathbf{s}_i| \leq i$ となるものを選ぶ．

以降では，この枚挙をずっと固定して用いる．さらに，この枚挙では各々の列はその始片がすべて数え上げられてから現れるものとし，また，この枚挙は何らかの具体的な方法により与えられているものとする．上に与えた位相に関する基本的な性質をいくつか調べておく：

0.8 演習 (ZF). $s, t \in {}^{<\omega}\omega$ とする．このとき，

(a) $O(s) \cap O(t)$ は $\emptyset$ か $O(s)$ か $O(t)$ かのいずれかである．

(b) $O(s) - O(t)$ は基本開集合の互いに素な和集合になっている．

(c) $O(t)$ は開閉集合である．つまり，閉集合であると同時に開集合でもある．

(d) すべての開集合は基本開集合の互いに素な和集合として表せる．

ヒント　(b) を示すには

$$O(s) - O(t) = \bigcup\{O(s) \cap O(u) \mid |u| = |t| \ \wedge \ u \neq t\}$$

に注意して (a) を用いればよい．(c) には，(b) を $s = \emptyset$ に適用する．最後に，(d) は，O を開集合として，上で固定した枚挙により，$O = \bigcup_{j\in\omega} O(\mathbf{s}_{i_j})$ となっているとする．$X_j = O(\mathbf{s}_{i_j}) - \bigcup_{k<j} O(\mathbf{s}_{i_k})$ とおく．このとき，$O = \bigcup_j X_j$ は互いに素な和集合となるが，(b) を繰り返し用いることにより，各 $X - j$ は基本開集合の互いに素な和集合として表せる．　⊣

上に述べた性質は ${}^\omega\omega$ を用いることの利点の一つであり，このカメレオンのような ${}^\omega\omega$ が次の意味で "ゼロ次元" であることを示している：$0 < k < \omega$ に対し，${}^k({}^\omega\omega)$ を積空間の位相で考える，つまり，

$$O(\mathbf{s}_{i_1}) \times \cdots \times O(\mathbf{s}_{i_k})$$

という形の基本開集合を用いる．このとき，$\mathbb{R}$ と異なり，位相同型 ${}^\omega\omega \to {}^k({}^\omega\omega)$ が存在する．実際，ω から $\omega \cdot k$ への任意の全単射はこのような位相同型を惹き起こす．**以下では記法を簡単にするために，${}^\omega\omega$ に対してのみ議論する場合にも，このような位相同型，あるいは直接に対応する積空間での議論により，この ${}^k({}^\omega\omega)$ への一般化も仮定する．**

まず，測度の概念を考察するにあたって，ボレル Emile Borel による公理的なアプローチを復習する：任意の集合 S と $F \subseteq \mathcal{P}(S)$ に対し，

F は S 上の **σ-代数** $\Leftrightarrow$ $\emptyset \in F$ で F は補集合と
可算な集合族の和集合に関して閉じている

とする．このような F と任意の $m\colon F \to [0,1]$（ただし $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ は実数の単位区間）に対し，

m は（確率）測度 $\Leftrightarrow$
(i) $m(\emptyset) = 0$ で，$m(S) = 1$, かつ
(ii) $\{X_n \mid n \in \omega\} \subseteq F$ が互いに素な族なら
$m(\bigcup_n X_n) = \sum_n m(X_n)$

とする．$\mathbb{R}$ の代わりに ${}^\omega\omega$ を用いて，

ボレル集合とは ${}^\omega\omega$ 上の $O(s)$, $s \in {}^{<\omega}\omega$ から生成される σ-代数の元のことである．

ボレル集合の族は自然な階層構造を持つ（§12 を参照）．よく問題となるのは，この階層の 2 番めのレヴェルの F_σ 集合と G_δ 集合である．この言い回しは，ハウスドルフ Hausdorff [14] による，現代まで生き残った，いささか古くさい用語である：

A が F_σ とは，A が可算個の閉集合の和集合と表せることである．
A が G_δ とは，A が可算個の開集合の共通部分と表せることである．

$\mathcal{B}$ に測度を入れるには，m_ω を $\mathcal{P}(\omega)$ 上の測度で，$m_\omega(\{i\}) = 2^{-(i+1)}$ を満たすものとする．つまり，$a \subseteq \omega$ に対し，$m_\omega(a) = \sum_{i \in a} 2^{-(i+1)}$ とする．これに，標準的な測度論での構成法（例えば Halmos [50: 157] を参照）を適用することにより，

$m_\mathcal{B}$ を m_ω によって惹き起こされる $\mathcal{B}$ 上の直積測度とする．

各 $s \in {}^{<\omega}\omega - \{\emptyset\}$ に対し，$m_\mathcal{B}(O(s)) = \prod_{i<|s|} 2^{-(s(i)+1)}$ が成り立ち，$m_\mathcal{B}$ は，この性質を満たす $\mathcal{B}$ 上の唯一の測度となる．${}^\omega\omega$ が $\mathbb{R}$ の代わりに用いられていることを除けば，$m_\mathcal{B}$ は，Borel [98: 46-47] でのボレルの測度で，これは Borel [02] でルベーグ測度に拡張されている．もちろん，これは現在では解析学で基礎的なものとなっている．この拡張を簡単に記述するには，まず $N \subseteq {}^\omega\omega$ に対し，

N が零集合とは，ボレル集合 X で $m_\mathcal{B}(X) = 0$ かつ $N \subseteq X$ となるものが存在することである

とする．ここで，$A \subseteq {}^\omega\omega$ に対し，

A が**ルベーグ可測**とは，あるボレル集合 B に対し，$A \triangle B$ が零集合になること

とする．このとき A のルベーグ測度を

$$m_L(A) = m_\mathcal{B}(B)$$

と定義する．明らかに

m_L は B 上の $m_\mathcal{B}$ を拡張する $\mathcal{M}_L$ 上の測度となる．

測度論のさらに詳しいことについては，例えば Halmos [50] を参照されたい．後で参照できるように 2 つのよく知られた性質を述べておく．このうちの最初のものは，$m_\mathcal{B}$ から惹き起こされる内測度と外側度による，m_L の標準的な特徴付けから直ちに導かれる．

0.9 補題

(a) 任意のルベーグ可測な集合 A と $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ に対し，閉集合 C と開集合 O で $C \subseteq A \subseteq O$ かつ $m_L(O - C) < \epsilon$ となるものが存在する．

(b) 任意のルベーグ可測な集合 A に対し，F_σ 集合 X と G_δ 集合 Y で，$X \subseteq A \subseteq Y$ かつ $m_L(X) = m_L(A) = m_L(Y)$ となるものが存在する． ⊣

(b) は (a) から直ちに導けるが，これは F_σ 集合と G_δ 集合の重要性を示すものとなっている．

次の定理は，よく知られたフビニの定理の平面上の零集合の場合を，集合論的に記述したものある．ここでの文脈では，${}^k({}^\omega\omega)$ 上のルベーグ測度は，k-重の m_L の直積測度である．ここでは $A \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ と $y \in {}^\omega\omega$ に対し，$A_y = \{x \mid \langle x, y\rangle \in A\}$ 書くことにする．

0.10 定理　$A \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ をルベーグ可測とする．このとき，A が ${}^2({}^\omega\omega)$ の零集合となるのは，$\{y \mid A_y$ は ${}^\omega\omega$ の部分集合として零集合でない$\}$ が ${}^\omega\omega$ の零集合となるときである． $\dashv$

ベールの性質は，ベール René Baire の位相空間論での分類の理論からでてきたものである．$F \subseteq {}^\omega\omega$ に対し，

$$\mathrm{int}(A) = \bigcup\{O \mid O \text{ は開集合 } \wedge\ O \subseteq A\},$$
$$\mathrm{cl}(A) = \bigcap\{C \mid C \text{ は閉集合 } \wedge\ C \supseteq A\}$$

とする．$\mathrm{int}(A)$ は A の**内点の全体**で，A に含まれる最大の開集合となり，$\mathrm{cl}(A)$ は A の**閉包**で，A を含む最小の閉集合となる．

A は**全疎** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = \emptyset$
A は**痩**（あるいは**第一類**） $\Leftrightarrow$ A は可算個の全疎集合の和集合
A は**ベールの性質を持つ** $\Leftrightarrow$ ある開集合 O に対し $A \triangle O$ は痩になる

とする．O **が開集合なら，閉集合** $\mathrm{cl}(O) - O$ **は全疎となる**ことは容易に確かめられる．また，**開集合および痩な集合はベールの性質を持つ**（後者については $\emptyset$ が開集合であることからよい）．ベールの性質の概念は次の**ベールの範疇定理**での考察に関連して生まれたものである：

0.11 定理　(Baire [99])．空でない開集合は痩でない．

証明　そうでないとして，O を空でない開集合で，全疎な集合 X_j, $j \in \omega$ に対し $O = \bigcup_{j\in\omega} X_j$ となっているとする．${}^\omega\omega$ での列 $\langle i_j \mid j \in \omega\rangle \in {}^\omega\omega$ で $j < k$ なら $O \supseteq O(\mathbf{s}_{i_j}) \supseteq O(\mathbf{s}_{i_k})$ かつ $|\mathbf{s}_{i_j}| < |\mathbf{s}_{i_k}|$ となるものを次のようにしてとる：

i_0 を $O(\mathbf{s}_{i_0}) \subseteq O$ となるような最小のものとする．i_j が選ばれたとき，$t \supseteq \mathbf{s}_{i_j}$ で $O(t) \cap X_j = \emptyset$ となるものが存在する．そうでなければ，$\mathrm{cl}(X_j) \supseteq O(\mathbf{s}_{i_j})$ となってしまい X_j は全疎でなくなってしまうからである．i_{j+1} を，$O(\mathbf{s}_i) \cap X_j = \emptyset$, $\mathbf{s}_i \supseteq \mathbf{s}_{i_j}$ かつ $|\mathbf{s}_i| > |\mathbf{s}_{i_j}|$ となる最小の i とする．

$x = \bigcup_j \mathbf{s}_{i_j}$ とすれば明らかに，$x \in O - \bigcup_j X_j$ となるが，これは矛盾である． $\dashv$

この定理は，実数の全体は非可算である，というカントルの結果の拡張と見ることができ，実際，この証明もカントルの 1873 年のもとの証明を一般化したものとなっている．ベールの性質はこの定理により意味のあるものになる：もしこの定理が成り立たなかったとすれば，位相同型により ${}^\omega\omega$ は痩になり，したがって，すべての $A \subseteq {}^\omega\omega$ がベールの性質を持つことになってしまうからである．

次の補題は，この定義からの直接的な帰結である：

0.12 補題　$A \subseteq {}^\omega\omega$ はベールの性質を持つものとする．このとき：

(a) ${}^\omega\omega - A$ もベールの性質を持つ．

(b) G_δ 集合 X と F_σ 集合 Y で $X \subseteq A \subseteq Y$ かつ $Y - X$ が痩になるものが存在する．

証明　O を開集合で $A \triangle O$ が痩になるものとする．(a) を示すには，

$$({}^{\omega}\omega - A) \triangle ({}^{\omega}\omega - O) = A \triangle O$$

で，$\mathrm{cl}(O) - O$ は全疎だから，$({}^{\omega}\omega - A) \triangle ({}^{\omega}\omega - \mathrm{cl}(O))$ は痩であることに注意すればよい．

(b) を示すためには，全疎集合の閉包は再び全疎となるから，全疎な F_σ 集合 F で，$A \triangle O \subseteq F$ となるものがあることに注意する．したがって $X = O - F$ は G_δ となり，$X \subseteq A$ で，$A - X$ は痩である．(a) により，同様に G_δ 集合 G で $G \subseteq ({}^{\omega}\omega - A)$ かつ $({}^{\omega}\omega - A) - G$ は痩であるようなものが存在する．したがって，$Y = {}^{\omega}\omega - G$ とすれば証明が完了する．　⊣

(b) は 0.9(b) と似ているが，F_σ 集合と G_δ 集合の役割がそこでとは逆になっていることに注意しよう．(a) と定義の直接的な帰結から，

ベールの性質を持つ集合の全体は $\mathcal{B}$ を含む σ-代数をなす

ことが分かる．ルベーグ可測性とベールの性質の間には他にも重要な類似性あるいは差異が多く存在する（Oxtoby [71] および Kunen [84] を参照されたい）．次の定理は，0.10 に対応する；ルベーグ測度と同じように，位相的な性質も ${}^{k}({}^{\omega}\omega)$ に自然に拡張することができる．

0.13 定理　(Kuratowski-Ulam [32]). $A \subseteq {}^{2}({}^{\omega}\omega)$ がベールの性質を持つものとする．このとき，A が ${}^{2}({}^{\omega}\omega)$ の痩な集合となるのは，$\{y \mid A_y$ は ${}^{\omega}\omega$ の痩な部分集合でない$\}$ が ${}^{\omega}\omega$ の痩な部分集合になるときである．　⊣

第 1 章　始まり

巨大基数の理論の始まりの糸口は歴史の早い段階にまでさかのぼることができる．§1 では，弱到達不可能性とマーロの性質およびこれらを強めた性質について議論するが，これらは基数の極限の操作の研究から生まれた概念で，これらが契機となって完全性や無矛盾性の議論が早い時期になされたのであった．§2 では，ウラム (Ulam) による可測性の議論について述べる．これは巨大基数の仮説のうちで最も重要なもので，実数の集合の測度の問題に関連して導入された概念である．ゲーデルの L に関する仕事は，公理的集合論が独立した数学の分野として確立される契機となったものであるが，そこでの結果にこたえ，またそれらを拡張する形で，これに続く巨大基数の理論の研究が形作られてゆくことになる．そこで，§3 では，L についての復習をする．§4 では，タルスキーの無限言語の研究から生まれた弱コンパクト，および，強コンパクト基数，また，可測基数の下には，強い意味でたくさんの到達不可能基数が存在する，というハンフの結果について議論する．§5 の話題の中心は初等的埋め込みと超巾による構成で，スコットの，可測基数が存在すれば $V \neq L$ が成り立つ，という重要な結果や，可測基数の超巾と初等的埋め込みによる特徴づけ，また，これに関連した正規性，などについて論じる．最後に，§6 で，反映の現象の高階の言語による自然な定式化で，巨大基数の大きさを比べるときの統一的アプローチの方法を供する記述不可能性について論じる．

§1　到達不可能性

ツェルメロの集合論の公理化に関する最初の論文 Zermelo [08a] の載っている *Mathematische Annalen* の同じ巻には，ハウスドルフの超限順序型に関する広範な論文 Hausdorff [08] が含まれている．カントルは彼の努力を有理数の集合と実数の集合の順序型，第二種の数のクラス，そしてもちろん，連続体仮説といったことがらに集中していたのに対し，ハウスドルフは数学の研究対象を，超限性のより高い領域へと拡張していった．同時代の数学者たちの数学の基礎に関する騒がしい議論に眉をしかめて (p. 436)，ハウスドルフは構造の探究を，それ自身を目的として精力的に進めた．この論文では，一般連続体仮説が始めて述べられ，飽和的モデルの理論のプロトタイプとなる η_α 集合の構成の他，$\kappa > \omega$ に対して，次の概念の最初の定式化が含まれている：

κ が **弱到達不可能基数**であるとは，κ が正則な極限基数であることである

（“到達不可能” という言い回しは，Sierpiński-Tarski [30] によればクラトフスキー Kuratowski の命名ということである；“弱” という接頭語は後に区別の必要ができてから付加された）．

ハウスドルフは，このような κ が $\omega_\kappa = \kappa$ をみたし，基数の極限操作に関して自然な閉包点になっていることに注目した．現代の用語で言えば，C が κ で閉非有界なら，$C' = \{\alpha \in C \mid |C \cap \alpha| = \alpha\}$ もそうであることが容易に示せる；$C = \kappa$ なら，$C' = \{\alpha < \kappa \mid |\alpha| = \alpha\}$, $C'' = \{\alpha < \kappa \mid \omega_\alpha = \alpha\}$, 等々，となる．しかしハウスドルフは彼の古典的な教科書 Hausdorff [14: 131] で，もし弱到達不可能基数が存在するとすれば，“それらのうちで最小のものですら実に途方もない大きさ [exorbitante Grösse] を持つことになるので，このようなものが普通の [übliche] 集合論の応用で考察されることはあり得ないであろう” と書くに至っている．今日では，弱到達不可能基数の存在は（このような κ に対しては $L_\kappa \models$ ZFC となるため —— §3 を参照），ZFC では証明できないことはよく知られている．

ハウスドルフの仕事に触発されて，マーロ Mahlo [11, 12, 13] はさらに高次の固定点の現象の観点から定式化される正則基数の階層を研究した．研究の発表された時代を考慮すると，この仕事の大胆さや，その洗練には驚かされる（マーロはハレでベルンシュタイン Felix Bernstein のもとで勉強し，そこでカントルのゼミにも参加しており，1908 年に（幾何学に関する）学位論文を書き上げている．彼は，Mahlo [13a] で，今ではルジン集合として知られている，すべての疎集合との共通部分が可算になるような非可算な実数の集合の CH での構成を最初に発表している．Gottwald-Kreiser [84] にマーロの生涯とその業績に関する議論がある）．マーロの π_α 数をここでの言葉で言い直すと，

κ が **0-弱到達不可能**とは，κ が正則基数であること

κ が **$(\alpha+1)$-弱到達不可能**とは，κ が正則で α-弱到達不可能な基数の極限であること

極限順序数 δ に対しては，

κ が **δ-弱到達不可能**とは，κ がすべての $\alpha < \delta$ に対し α-弱到達不可能となることとする．

この階層は，次に，ξ-弱到達不可能な ξ の正則な極限をとるという対角化により，さらに先に拡張することができる．κ が **β-弱到達不可能**で $\alpha < \beta$ なら，κ は **α-弱到達不可能**となることは帰納法により，容易に示せる．Reg を正則基数のクラスとして，Λ を，$X \subseteq$ On に対し，

$$\Lambda(X) = \{\alpha \in X \mid |X \cap \alpha| = \alpha\}\ ,$$

で定義すると，α-弱到達不可能基数は，$\Lambda^\alpha(\mathrm{Reg})$ の元に一致する．ここに，Λ の肩にのった α は，Λ の適用の繰り返しの回数を表す，ただし極限回のときには共通部分をとることにする．α-弱到達不可能基数の階層は，したがって，基数の極限をとる操作に対して正則

性を要求することの結果として考えることができる．

演算子 Λ は，どんどん大きな基数をもたらすが，このような場合に一般にそうであるように，質的な超越性を得るためには，新しい原理が必要になる．マーロは，定常集合の概念を初めて用いることにより，このような原理を定式化することに成功した（この用語自身は Bloch [53] で導入されている）．マーロの ρ_0 数は，今日では $\kappa > \omega$ に対する次の定義により知られている：

κ が**弱マーロ**とは，$\{\rho < \kappa \mid \rho$ は正則 $\}$ が κ の定常集合となることである．

このような κ は正則となる（もし，有界でない $X \subseteq \kappa$ で $|X| < \kappa$ となるものがあれば，$X - |X|$ の κ 以外の極限点の全体は閉非有界となるが，この集合は正則基数を含まない）．したがって，**弱マーロ基数は弱到達不可能である**．次の命題は，マーロがこのような基数を導入した経緯を明らかにする．

1.1 命題　(Mahlo [11]). κ が弱マーロなら，κ は κ-弱到達不可能である．

証明　$R = \{\rho < \kappa \mid \rho$ は正則 $\}$ として，$\alpha < \kappa$ に対し，κ で閉非有界な集合 C_α を帰納的に次のように定義する：$C_0 = \kappa$ とする．C_α が与えられたとき，$C_{\alpha+1}$ を $C_\alpha \cap R$ の κ 以外の極限点の全体からなる集合とする．κ が弱マーロであることから，$C_\alpha \cap R$ は定常集合となる．最後に，極限数 $\delta > 0$ に対しては，$C_\delta = \bigcap_{\alpha<\delta} C_\alpha$ とおく．帰納法により，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$C_\alpha \cap R$ は κ より小さい α-弱到達不可能基数の全体となることが容易に示せる．したがって，証明が完了した．　$\dashv$

この結果はまだ最適化さたものとなっていない：対角共通部分 $C = \triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ をとり，$C \cap R = \{\xi < \kappa \mid \xi$ は ξ-弱到達不可能 $\}$ は κ で定常集合となっていることが示せ，さらに先に続けることができるからである．大変面白いことに，ガイフマン Gaifman [67] は，弱マーロ基数が，対角化による極限操作を下からおこなっていったときの最小の上限となるという意味を持つ結果を得ている．このように下から上り詰めてゆくやり方は，後に出てくるもっと大きな基数では不可能になる．

マーロは，彼の ρ_α 数を次のようなプロセスの反復によって記述した：

κ が 0-弱マーロとは，κ が正則であること；
κ が $(\alpha+1)$-弱マーロとは，$\{\xi < \kappa \mid \xi$ は α-弱マーロ $\}$ が κ で定常集合となること；

また，極限順序数 $\delta > 0$ に対しては，

κ が δ-弱マーロとは，κ がすべての $\alpha < \delta$ に対し α-弱マーロとなることとする．

ここでもまた，対角化をおこなって，$\{\xi < \kappa \mid \xi$ は ξ-弱マーロ $\}$ が定常集合となるような κ を考えることにより，この階層をさらに先に伸ばすことができる．帰納法により，κ が **β-弱マーロで $\alpha < \beta$ なら，κ は α-弱マーロとなる**ことが容易に示せる．$X \subseteq \mathrm{On}$ に対

して定義される次の演算 M は，今日では**マーロの演算**として知られている：

$$M(X) = \{\alpha \in X \mid X \cap \alpha \text{ は } \alpha \text{ の定常集合}\}.$$

Λ と α-弱到達不可能基数のときと同様に，α-弱マーロ基数は，$M^\alpha(\mathrm{Reg})$ の元と一致する．1.1 は M の Λ 上の超越性を示している．マーロの演算は，発表当時はあまり注目されなかったが，今日では標準的なものとして現代的な理論に組みこまれている．

順序数の量という最初の関心が，巾集合の演算で拡張されてゆく集合論のユニヴァースの幅をも考慮したものに拡張されるのには，殆んど 20 年を要した．シルピンスキー=タルスキー Sierpiński-Tarski [30] および，ツェルメロ Zermelo [30] では，次のような概念が $\kappa > \omega$ に対して定式化されている：

> κ が**強到達不可能**とは，κ は正則で，かつ強極限であること，つまり，
> $\lambda < \kappa$ なら $2^\lambda < \kappa$ が常に成り立つことである．

このより本質的な概念を表すときに，以下では，“強” という接頭語は省略することにする．GCH **を仮定すると，**κ **が到達不可能であることと，弱到達不可能であることは同値になる．**

累積的階層による $V = \bigcup_\alpha V_\alpha$ という集合論のユニヴァースの捉え方は，ちょうどこの頃に起こったのであった．これに関する言葉で記述された次の命題からは，到達不可能基数の存在が集合論の中では証明できないことが帰結される：

1.2 命題　κ を到達不可能とする．このとき：

(a) $x \subseteq V_\kappa$ なら，$x \in V_\kappa$ は，$|x| < \kappa$ と同値になる．

(b) $\langle V_\kappa, \in \rangle \models \mathrm{ZFC}$.

証明　(a): 順方向の証明には，$|V_\alpha| < \kappa$ がすべての $\alpha < \kappa$ に対し成り立つことを示せばよいが，これは α に関する帰納法により直ちに示せる．逆に，$x \subseteq V_\kappa$ が $|x| < \kappa$ を満たすとしよう．κ は正則だから，ある $\alpha < \kappa$ に対し，$\{\mathrm{rank}(y) \mid y \in x\} \subseteq \alpha$ となる．したがって，$x \in V_{\alpha+1} \subseteq V_\kappa$ である．

(b): すべての極限順序数 $\alpha > \omega$ に対し，置換の公理以外のすべての ZFC の公理が，V_α で成り立つことは容易に示せる．V_κ で置換の公理が成り立つことを示すために，$x \in V_\kappa$ として，F を x から V_κ への関数としよう．このとき $|F``x| \leq |x| < \kappa$ だから，(a) により $F``x \in V_\kappa$ となる．　$\dashv$

ここで，IC を “到達不可能基数が存在する” という命題としよう．もし，IC が成り立ち，κ が最小の到達不可能基数とすれば，$V_\kappa \models \mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{IC}$ となることが分かる．したがって，**IC は ZFC から証明できない**．この歴史上最初の ZFC 上での独立性の結果は，実質的にはツェルメロ Zermelo [30] によって得られており，Sierpiński-Tarski [30] に書かれている（クラトフスキー Kuratowski [24] は集合の理論体系 —— 基礎の公理を除いた ZFC に相当するもの —— を考察して，置換の公理があっても，“（弱）到達不可能基数の存在を確立することはできない [on ne saurait établir]” と結論している．しかし，モストウ

スキーの解釈 Mostowski [49: 162] にもかかわらず，このことは，当時，何らかの形でのGCH の仮定なしでは示せなかった）．存在仮定 IC から直ちにそれ自身の独立性が導けることは，無限の公理での状況と非常によく似ている：$V_\omega \models$「すべての集合は有限である」となる．同様に，κ を最小のマーロ基数とすると，$V_\kappa \models$「マーロ基数は存在しない」となる．これは巨大基数で特徴的な状況である．

IC の独立性は，ゲーデル Gödel [31] の第 2 不完全性定理を用いることでも示せる．$\mathrm{ZFC} + \mathrm{IC} \vdash \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ が 1.2(b) により成り立つからである．これから，再びゲーデルの不完全性定理により，$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \mathrm{IC})$ は **Con(ZFC)** から証明できないことが導かれる．このより精密な結果は質的な違いを示している：ゲーデルの細心な解析によって形式的体系の無矛盾性が議論できることは，単に 1.2(b) の簡単な証明を与える，ということをはるかに超越している．タルスキーは，間もなくこの違いに気付いている (Tarski [38: 87])．

レーベンハイム=スコーレムの定理 (0.5) により，一階の論理での理論としての ZFC に対する 1.2(b) は到達不可能性の特徴づけとはなっていない．注目すべきことに，この事実は，ずいぶん後になってから新しいモデル理論での動機付けのもとでようやく認識されている (Mostowski [49], Montague-Vaught [59])．特徴づけは高階の論理を用いることで得られる．ZFC^2 で，ZFC での置換の公理の図式を 2 階の全称量化子を持つ対応する一つの公理で置き換えることで得られる 2 階の論理での ZFC を表すことにする．2 階の変数を領域の任意の部分集合上を走るものとする解釈により，以下が成り立つ．

1.3 定理　(Zermelo [30], Shepherdson [52]) κ が到達不可能であることと，$V_\kappa \models \mathrm{ZFC}^2$ が成り立つことは同値である．

証明　順方向の証明は 1.2(b) でと同様にできる．逆方向に関しては，まず κ が正則になることに注意する：そうでなければ，$\alpha < \kappa$ と関数 $G\colon \alpha \to \kappa$ で値域が κ で非有界になるものがとれる．$G \subseteq V_\kappa$ だから，2 階の置換の公理により，$G``\alpha \in V_\kappa$ となる．したがって，$\sup(G``\alpha) = \kappa \in V_\kappa$ となるが，これは矛盾である．

あとは κ が強極限であることが示せればよい：もしそうでないとすると，$\lambda < \kappa$ で，$2^\lambda \geq \kappa$ となるものがある．このとき，巾集合の公理により，$\mathcal{P}(\lambda) \in V_\kappa$ となるが，一方，全射 $H\colon \mathcal{P}(\lambda) \to \kappa$ が存在する．したがって，再び 2 階の置換の公理により，$H``\mathcal{P}(\lambda) = \kappa \in V_\kappa$ となり矛盾である．　$\dashv$

厳密に言えば，$V_\kappa \models \mathrm{ZFC}^2$ は，一階の論理式 φ をうまくとると，これの相対化 $\varphi^{V_{\kappa+1}}$ の形に記述できるので，2 階の充足関係を無理に持ってくる必要はない．1.3 のきちんとした証明を初めて与えたのはシェパードソン John Shepherdson [52] であった．しかしながら，ツェルメロ Zermelo [30] はそれより以前に直観的な形でこれを示している，というのは注目すべき歴史の偶然と言えるであろう：

ツェルメロは，Zermelo [30] で，置換の公理と基礎の公理を加えて，彼の最終的な集合論の公理化を発表しているが，ここではさらに，自然なモデルの列という，驚くべき統合的な集合論のビジョンを打ち出している．Zermelo [29] で，彼の分出公理で要となる，明確な (*definit*) 性質という概念を明らかにするにあたって，ツェルメロは高階の論理を基礎として考えていたことがうかがわれる．厳密には，これは，きっちりとした形に解釈し

たときの話しであって，シェパードソン Shepherdson [52: 227] の，ツェルメロの 1.3 の証明は厳密さに欠ける (“insufficiently rigorous”) という批判は，この観点から理解されるべきものである．しかし，ツェルメロは当時，決定的に反形式主義の立場をとっており，スコーレム Skolem [23] の一階の論理による形式化による相対化に関する注意を過小評価していた．ツェルメロにとって，巾集合，基数というような概念は，確定した外延を持ち，絶対的な意味を持つべきものであった．

累積的階層 $\bigcup_\alpha V_\alpha$ の始片が初めて集合論の公理系のモデルとして考察されるのは，Zermelo [30] においてであった．この階層が姿を見せるのはミリマノフ Mirimanov [17] およびフォン・ノイマンの Neumann [25] であったが，基礎の公理を実際に採用したのはツェルメロが最初であった．さらに，彼はウアエレメント（これは彼の命名である）をこの階層的なモデルの列の基礎に置いている．ウアエレメントの使用は後に集合論自身の拡張のためには不必要であることが分かってくるが，特定の文脈（例えば admissible sets の理論で —— Barwise [75] を参照せよ）では，重要な役割をはたし続けることになる．

ツェルメロの業績は，2 階の範疇性のようなものを彼の公理系に対し確立したことであろう：彼は，これらのモデルの列が，ウアエレメントの数と，そこでの順序数の集まりの高さ，という二つの基数により，同型を除いて一意に特徴付けられることを示した．さらに，一意な，end-extension の関係が任意の 2 つのモデルに対して成り立ち，上の 2 つの普遍量に基づき，片方のモデルはそれより高い領域での集合となっている．これらの結果を得るために，ツェルメロは累積的階層に関する分析とモデルとをランクごとに対応付けした．置換の公理との格闘の末，彼はこれらの順序数によるモデルの高さ (“Grenzzahl”) が正則なベート関数の固定点として特徴付けされることを示し，これにより，本質的には 1.3 により到達不可能基数の概念に到達したのであった．

ツェルメロは，さらに進んで集合論のモデルの無限の連なりという動的な見方をを提起した (Zermelo [30: 47]):

> 科学における反動主義者や，反数学者たちが，彼らの反集合論の運動で精力的に偏愛をこめて言及するところの ‘集合論における超有限の逆理’ は，‘矛盾’ のように見えるものにすぎず，これらは，集合論自身における混乱の結果でしかなく，それは，非範疇的にその公理系により，特定の表現モデル系で決定することができる：一つのモデルの中で ‘超無限ないしメタ集合’ であるものは，次のより高いものでは，すでに基数と順序型を持つまったく妥当な ‘集合’ であり，それ自身新しい領域の構成の基石となっている．カントルの順序数の無限の列は，古典的な集合論がそれぞれで成り立っているような本質的にことなる集合論のモデルの無限の二重列に対応する．創造的な前進と内包的な完備化という二つのまったく正反対な思考の精神の方向は，カントルの ‘逆理’ の根本にも横たわっているわけであるが，これらは，整列順序の概念に基づく数の超限列に託されてその表現と調和を見い出すことになる．これらの列はその制限されない進展ゆえ真の終端を持ち得ず，相対的な終止点，つまり，これらの ‘極限数’ [つまり，到達不可能基数のこと] をもつのみで，これらは低いモデルのタイプをより高いものから分離する．したがって，集合論の ‘逆理’ は，正しく理解されるときには，制限あるいは削除に至らしめるものではなく，むしろ現在の時点では予見のできないような，数理科学の発展と豊饒を約束するものなのである．

これらの言葉はカントルの（あるいは後のゲーデルの）固定された集合論のユニヴァースという見方に反するものであるが，ある意味では，数学が矛盾を起こすことなく考えるこ

とのできるすべての対象から成り立っている，というカントルの実存主義的な捉え方を肯定するものとなっている．いずれにしても，到達不可能基数が集合のユニヴァースの構造の研究の初期においてこのような重要な役割をはたしたということは，銘記されるべきであろう．後に，タルスキー Tarski [38, 39a] は，無尽蔵な到達不可能基数の存在を，選択公理を含むほとんどすべての集合論の公理がそれから帰結できるような形で公理として定式化した．しかし，程なく，このツェルメロの無限的な考え方は，スコーレムやゲーデルの鋭い解析によって優勢になってゆく一階の論理による形式的記述にとってかわられることになる．

弱マーロ基数との類推で，

> κ が（強）**マーロ**とは，$\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ は到達不可能$\}$ が κ の定常集合となること

とする．到達不可能基数のときと同様に，このより重要な概念を表すとき，以下では，“強”という副詞を省くことにする．

$$\alpha\text{-到達不可能，および，}\alpha\text{-マーロ}$$

も同様に定義され，これに対しても，1.1 に相当する結果を得ることができる．

マーロ基数が導入されてから，ほぼ半世紀の後，レヴィは，彼の反映の現象の研究でマーロ基数をふたたび甦らせたが，この際，興味の中心は累積的階層との関連性のために，“弱”から“強”のバージョンへと移動したのであった．

§2　可測性

この節では，可測性の概念にいたる，もう一つの歴史の糸を辿ることにする．この概念は巨大基数の仮定のうちでも一番重要なものである．ここでの歴史的展開の舞台はポーランドで，そこでは，数学の基礎，数理論理学，位相空間論，解析といった数学の分野の研究を特徴とする学派が形成されつつあった．1918 年にこの国が再統合されると，ヤニシェヴスキー Zygmunt Janiszewski は，新しく再開校されたワルシャワ大学で，この国の研究の伝統を確立するために，ポーランドの数学が集合論とその関連分野に力を注ぐことを鼓舞し，新しい学術誌を刊行して，この分野での国際的な研究活動を促進した（Kuratowski [80] および Kuzawa [68] を参照）．これが，数学の基礎に焦点を合わせた初めての専門誌で，1920 年代から 30 年代にはこの分野での主要な研究発表の場となることになる *Fundamenta Mathematicae*（所有格単数）の始まりであった（Kuzawa [70] を参照）．ちなみに，これの第 1 巻には，よく知られているスースリンの問題 Suslin [20] が載っているが，この問題は，現代集合論でのスースリン木の研究の契機となるものであった．ワルシャワでは，程なくシルピンスキーがクラトフスキー，タルスキーらとともに集合論とその数学における役割の理解に関する基礎的な研究結果を出しはじめている．この節での話題の関連では，ルヴォフ（現在のリヴィヴ）でのバナッハ Stefan Banach とまだ若いウラム Stanisław Ulam による抽象的測度論の研究が重要な役割を果たすことになる．

現代的な測度の理論はルベーグの学位論文 Lebesgue [02] にまで遡ることができる．この論文で，彼は測度問題を提出している．この問題は，実数直線に対して述べると，すべての実数の有界集合 X に対して負でない実数 $m(X)$ を与える関数 m で，

(a) m は恒等的に 0 でない，
(b) m は移動に関して不変である．つまり，ある実数 r に対し $Y = \{x + r \mid x \in X\}$ とすると，$m(X) = m(Y)$ が成り立つ，
(c) m は可算加法的である．つまり，$\{X_n \mid n \in \omega\}$ が互いに素で，この和集合が有界集合なら，$m(\bigcup_n X_n) = \sum_n m(X_n)$ となる

ようなものの存在を問うものである．ルベーグはこの問題の解決に向けて彼の測度論を展開したが，これは現在では解析学で不可欠なものとなっている（ルベーグ測度と積分論の歴史的発展に関しては Hawkins [75] を参照）．ここでの問題は，一つには何が実数の集合であり得るかをはっきりさせなくてはならないということであった．ヴィタリ Giuseppe Vitali [05] は実数の全体の整列順序からルベーグ可測でない実数の集合を構成して，測度問題は選択公理のもとでは解を持たないことを示した．これはツェルメロが選択公理を定式化して以来，特定の実数の集合の構成にこの公理が意識的に用いられた最初の例であっが，ここでの整列順序の巧妙な使い方はカントルが集合に整列順序を対応させて考えたときのものとはひどく違ったものになっていた．ルベーグ Lebesgue [07] 自身は，ヴィタリの構成で，測度の可能性に疑いを持つようになり，AC の正しさに対して懐疑的になった．

ヴィタリの反例では条件 (a)–(c) のすべてが用いられていた．バナッハは (b) を自明な解をさけるために必要最低限な条件である: すべての x に対し $m(\{x\}) = 0$, で置き換えることで一般化された測度問題を提起した．Banach-Kuratowski [29] は CH のもとで，問題のこの形の変形も解を持たないことを示したが，そこでの証明は現在においても重要性を失っていない．(b) と (c) により，測度問題の解 m は，これの単位区間の部分集合全体 $\mathcal{P}([0,1])$ 上の値により確定することに注意したい．バナッハは，彼の条件が問題から幾何的な側面を取り去っているため，$[0,1]$ の代わりに任意の集合 S を考えてよいことに気がつく．この場合，m が $\mathcal{P}(S)$ 上で常に 0 でないなら，$m(S) > 0$ となるから，正規化をおこなって，$m(S) = 1$ となっているとしてよい．したがってバナッハの測度問題は次のようにも述べることができる: 空でない集合 S と関数 m: $\mathcal{P}(S) \to [0,1]$ で，

(i) $m(S) = 1$,
(ii) すべての $x \in S$ に対し，$m(\{x\}) = 0$, かつ
(iii) 互いに素な $\{X_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}(S)$ に対し，$m(\bigcup_n X_n) = \sum_n m(X_n)$ となる

ようなものが存在するか．このような関数を，簡単に **S 上の測度**と呼ぶことにする（これは§0での言いまわしでは $\mathcal{P}(S)$ 上の測度とよばなくてはならないものである）．次のものは測度の顕著な性質を述べている:

2.1 演習 $T \subseteq \{X \subseteq S \mid m(X) > 0\}$ が非可算なら，異なる $Y, Z \in T$ で，$m(Y \cap Z) > 0$ となるものが存在する．

ヒント　ある $n \in \omega$ に対し，$\{X \in T \mid m(X) > \frac{1}{n}\}$ が非可算になることに注意する．⊣

集合 S 上の測度 m に対し，

m は **λ-加法的** ⇔ 任意の $\gamma < \lambda$ と互いに素な $\{X_\alpha \mid \alpha < \gamma\} \subseteq \mathcal{P}(S)$ に対し，
$m(\bigcup_\alpha X_\alpha) = \sum_\alpha m(X_\alpha)$ が成り立つ

とする（ここに，実数の超限和は有限部分集合の和の上限として定義される）．バナッハは，彼の問題では S の濃度のみが問題となり，(iii) の代わりに，もっと強い性質を要求してもよいことに気付いている．

2.2 演習　κ を，κ 上の測度が存在するような基数のうち最小のものとする．このとき，すべての κ 上の測度は κ-加法的になる．

ヒント　そうでないとして，m を κ 上の測度で，$\gamma < \kappa$, かつ $\{X_\alpha \mid \alpha < \gamma\} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ は互いに素だが，$m(\bigcup_\alpha X_\alpha) \neq \sum_\alpha m(X_\alpha)$ となるようなものとする．ことのき，$\gamma > \omega$ となるが，2.1 により，$m(X_\alpha) > 0$ となるものは可算個しかない．これらを除いて，加法性 (iii) から，一般性を失うことなく，$m(X_\alpha) = 0$ がすべての X_α に対し成り立つが，$m(\bigcup_\alpha X_\alpha) = r > 0$ となっているとしてよい．ここで，$\overline{m}$: $\mathcal{P}(\gamma) \to [0,1]$ を

$$\overline{m}(Y) = \frac{m(\bigcup_{\alpha \in Y} X_\alpha)}{r}$$

によって定義すると，$\overline{m}$ は γ 上の測度となっていることが確かめられるが，これは κ の最小性に矛盾する．⊣

$\kappa > \omega$ に対し，

κ が**実数値可測** ⇔ κ 上に κ-加法的な測度が存在する

とする．m がそのような測度とすると，$|X| < \kappa$ なら $m(X) = 0$ となる．したがって，**実数値可測基数は正則である**ことが容易に分かる．バナッハ Banach [30: 101] は，GCH のもとで，すべての実数値可測基数は弱到達不可能であることを証明している．

ウラム Ulam [29] はまだルヴォフで学生だった頃に，測度論的な議論で，$\mathcal{P}(\omega)$ の整列順序を用いて，ω 上の超フィルターの構成を初めて与えている（タルスキーは Tarski [29] で任意のフィルターが同じ集合上の超フィルターに拡張できるという結果を述べている）．この後ウラムはドクター論文でバナッハの測度問題に関する重要な結果を確立している．以下で見るように，この仕事は ω 上の超フィルターの概念の一般化を用いている．ウラムは，まず上に述べたバナッハの結果から GCH を取り除いたが，このために，今日では**ウラム・マトリックス**として知られている便利な組合せ論的な道具を導入した:

2.3 命題　(Ulam [30])．任意の λ に対し集合の族 $\{A^\xi_\alpha \mid \alpha < \lambda^+ \wedge \xi < \lambda\} \subseteq \mathcal{P}(\lambda^+)$ で，以下を満たすものが存在する：

(a) すべての $\alpha < \beta < \lambda^+$ に対し，$A^\xi_\alpha \cap A^\xi_\beta = \emptyset$; かつ，
(b) すべての $\alpha < \lambda^+$ に対し，$|\lambda^+ - \bigcup_{\xi<\lambda} A^\xi_\alpha| \le \lambda$

証明 各 $\eta < \lambda^+$ に対し，上射 $f_\eta\colon \lambda \to \eta + 1$ を選び，$\alpha < \lambda^+$ と $\xi < \lambda$ に対し，$A^\xi_\alpha = \{\eta < \lambda^+ \mid f_\eta(\xi) = \alpha\}$ とする．このとき，(a) は明らか．また，$(\lambda^+ - \bigcup_{\xi<\lambda} A^\xi_\alpha) \subseteq \alpha$ に注意すると (b) も成り立っていることが分かる． ⊣

2.4 系 κ が実数値可測基数なら，κ は弱到達不可能である．

証明 κ は正則だから，κ が極限基数であることを示せばよい．そうでないとして，$\kappa = \lambda^+$ とし，2.3 でのようなウラム・マトリックスを考える．m を κ 上の κ-加法的測度とする．このとき，2.3(b) により，各 $\alpha < \lambda^+$ に対し，$\xi_\alpha < \lambda$ で $m(A^{\xi_\alpha}_\alpha) > 0$ となるものがある．このことから，$\xi_\alpha = \xi$ が λ^+ 個の α で成り立つような $\xi < \lambda$ が存在することが帰結できるが，2.3(a) により，これは 2.1 と矛盾する． ⊣

ここでウラムは非常に重要な二分律を指摘している．κ 上の測度 m に対し，

$A \subseteq \kappa$ が m の**原子**とは，$m(A) > 0$ だが，任意の $B \subseteq A$ に対し，$m(B) = m(A)$ または $m(B) = 0$ となること，また

m が**無原子的**とは，m の原子が存在しないこと

とする．ウラムは，無原子的な測度の存在および，原子を持つ測度の存在の両方から重要な帰結を導いている．次の定理の (b) は，(a) のウラムによる証明から容易に導くことができる．

2.5 定理 (Ulam [30])．κ 上に無原子的で κ-加法的な測度 m が存在するとする．このとき，

(a) $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ となる．

(b) 実数の全体の集合上の測度でルベーグ測度を拡張するものが存在する．

2.6 補題 m を κ 上の無原子的で κ-加法的な測度とする．

(i) 任意の $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ と $X \subseteq \kappa$ で $m(X) > 0$ となるものに対し，$Y \subseteq X$ で，$0 < m(Y) < \epsilon$ となるものが存在する．

(ii) 任意の $X \subseteq \kappa$ に対し，$Y \subseteq X$ で，$m(Y) = \frac{1}{2} \cdot m(X)$ となるものが存在する．

証明 (i) $X_0 = X$ として，帰納的に $\subseteq$ に関する下降列 X_i で，$0 < m(X_{i+1}) \leq \frac{1}{2} \cdot m(X_i)$ が $i \in \omega$ に対し成り立つようなもののとれることが示せればよい．X_i が与えられたとき，m は無原子的だから，分割 $A \cup B = X_i$ で，$0 < m(A) \leq m(B)$ となるものがとれる．$X_{i+1} = A$ とおけばよい．

(ii) 帰納的に $\subseteq$ 関する下降列 X_α で $m(X_\alpha) \geq \frac{1}{2} \cdot m(X)$ となるものを以下のようにして，とれる限りとる：$X_0 = X$ とおく．X_α が定義されたとき，$m(X_\alpha) > \frac{1}{2} \cdot m(X)$ なら，$X_{\alpha+1}$ を，$X_{\alpha+1} \subseteq X_\alpha$ で $m(X_\alpha) > m(X_{\alpha+1}) \geq \frac{1}{2} \cdot m(X)$ となるようにとる．これは (i) により可能である．極限順序数 δ に対しては，X_α がすべての $\alpha < \delta$ に対し定義されているときに，$X_\delta = \bigcap_{\alpha<\delta} X_\alpha$ とする．このとき，$\alpha < \omega_1$ で，$m(X_\alpha) = \frac{1}{2} \cdot m(X)$ となるものが存在する：もしこのようなものがなければ，$\{X_\alpha - X_{\alpha+1} \mid \alpha < \omega_1\}$ は 2.1 に矛盾するものとなってしまうからである． ⊣

2.5の証明　各々の $s \in {}^{<\omega}\omega$ に対し，集合 $X_s \subseteq \kappa$ を次のようにして定義する：$X_\emptyset = \kappa$ とおく．X_s が与えられたとき，2.6(ii) を帰納的に適用して，$i \in \omega$ に対し，$X_{s^\frown\langle i\rangle}$ を，

$$X_s = \bigcup_{i\in\omega} X_{s^\frown\langle i\rangle}$$

が成り立ち，これは互いに素な和となっており，

$$m(X_{s^\frown\langle i\rangle}) = 2^{-(i+1)} \cdot m(X_s)$$

となるようにとる．各 $f \in {}^\omega\omega$ に対し，$Y_f = \bigcap_n X_{f|n}$ とおく．したがって $m(Y_f) = 0$ となる．$\kappa = \bigcup\{Y_f \mid f \in {}^\omega\omega\}$ だから，m は $(2^{\aleph_0})^+$-加法的ではあり得ない．よって，(a) が証明された．

(b) を示すには，μ: $\mathcal{P}({}^\omega\omega) \to [0,1]$ を

$$\mu(A) = m(\bigcup\{Y_f \mid f \in A\})$$

として定義する．このとき，μ が ${}^\omega\omega$ 上の（実際 κ- 加法的ですらある）測度となることは容易に確かめられる．あとは，§0 で述べたルベーグ測度 m_L の性質を用いて μ が m_L の拡張となっていることを示せばよい：$s \in {}^{<\omega}\omega$ に対する X_s の構成から，

$$\mu(O(s)) = m(X_s) = \prod_{i<|s|} 2^{-(s(i)+1)} = m_L(O(s))$$

となる．よって，m_L の定義から，μ と m_L はボレル集合に対して等しい値をとり，すべての零集合 N に対し，$\mu(N) = 0$ となるから，μ と m_L はすべてのルベーグ可測集合で一致することが分かる．　⊣

この結果は，弱到達不可能基数が $\leq 2^{\aleph_0}$ となることの，はっきりとした動機付けを持った初めての例を与えることになり，したがって，カントルの連続体仮説の強い否定を導く，ある意味での説得力を持つ仮定となっている．現在では，この方向でこれよりもっとずっと強い結果が知られているのであるが，$\leq 2^{\aleph_0}$ となる実数値可測性に関するソロヴェイによる主要な結果が得られるに至るまでには，これからまだ 40 年の歳月が必要であった（§§16, 17 を参照）．Fremlin [93] は実数値可測性に関する何でも詰まったポルトマント旅行鞄のような概論である．

ウラムのとったもう一つの道は，さらに実りの多いものであった．κ 上の κ-加法的測度 m が原子 $A \subseteq \kappa$ を持つとしよう．$\mathcal{P}(\kappa)$ 上に μ を

$$\mu(X) = \frac{m(X \cap A)}{m(A)}$$

で定義すると，**μ は値域 $\{0,1\}$ を持つ κ 上の κ- 加法的測度となる．**この性質は，超フィルターの用語を用いてうまく表現することができる：このような 2 値測度 μ に対し，

$$U_\mu = \{X \subseteq \kappa \mid \mu(X) = 1\}$$

とおくと，U_μ は（非単項な）κ 上の超フィルターとなる．例えば，$X, Y \in U_\mu$ なら，

$X \cap Y \in U_\mu$ となる：そうでなければ，$X - Y \in U_\mu$ かつ $Y - X \in U_\mu$ となるが，これから $\mu(X \cup Y) \geq 2$ となってしまい矛盾である．さらに，μ の κ-加法性は，次のような形の強い共通部分の性質に翻訳される：フィルター F が **λ-完備**とは，任意の $\gamma < \lambda$ と $\{X_\alpha \mid \alpha < \gamma\} \subseteq F$ に対し，$\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in F$ となることであった．超フィルターではこれと双対の分かりやすい特徴付けを与えることができる：

2.7 演習 超フィルタ U が λ-完備となるのは，任意の $\gamma < \lambda$ と $\bigcup\{Y_\alpha \mid \alpha < \gamma\} \in U$ に対し，$\alpha < \gamma$ で $Y_\alpha \in U$ となるものが存在するときである． ⊣

したがって，U_μ は κ-完備である．これにより巨大基数の理論で一番重要な概念が得られる：$\kappa > \omega$ として，

κ が**可測**とは，κ 上の κ-完備な超フィルターが存在することである．

可測性は ω 上の超フィルター（これはもちろん ω-完備である）の存在の，素直な一般化となっている．有限共通部分の性質はフィルタの連鎖の和集合をとるときに自動的に保存されるから，極大性原理のみにより ω 上の超フィルターを得ることができる．しかし，$\kappa > \omega$ に対する κ-完備性はこのような場合に必ずしも保存されないから，κ 上の κ-完備超フィルターの存在は，別口に仮定する必要がある．タルスキー Tarski [39, 45] は可測性の概念をブール代数と κ-完備素イデアル —— これは双対の概念である —— の文脈で研究している．

次の結果は 2.5(a) と対比をなしている：

2.8 定理 (Ulam; Tarski – Ulam [30: 146]). κ が可測基数なら，κ は到達不可能である．

証明 2.4 よりさらに示さなくてはいけないのは κ が強極限となることである．U を κ 上の κ-完備な超フィルターとして，$\lambda < \kappa$ だが，単射 $f\colon \kappa \to {}^\lambda 2$ が存在するとしてみる．各 $\alpha < \lambda$ に対し，$i_\alpha < 2$ で $X_\alpha = \{\xi < \kappa \mid f(\xi)(\alpha) = i_\alpha\} \in U$ となるものがある．したがって，$X = \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in U$ となり，$\xi \in X$ に対し，$f(\xi)(\alpha) = i_\alpha$ がすべての $\alpha < \lambda$ で成り立つ．しかし，このときには X は高々1 つの元しか持ち得ないから，これは矛盾である． ⊣

最小の可測基数は最小の到達不可能基数より真に大きいか，という問題は焦点的な問題となってくるが，これが解かれるまでにはこの後 30 年の歳月がかかっている．現在の視点から見ると，この間ヨーロッパが激動の時代を体験しているという事実を差し引いても，このような簡単な結果にこれほど長い時間がかかっているのは不思議な気がする．しかし，これは，長く未解決となっていた数学の問題が新しいテクニックの登場により突然のように解かれてしまう，ということの良い例になっているのである．そして，この場合のテクニックとは，多分，予期しない組合せであろうが，無限言語の意味論に関する十分に強力な手法が得られるということであった（§4 を参照）．

程なく集合論の舞台の中心はゲーデルの構成的階層の定式化と，選択公理および一般連続体仮説といった話題へと移行してゆく（§3 を参照）．しかし，現代数学の抽象化が進むにつれ，可測性は様々な分野で制約的な概念として現れている：Mackey [44] でベクトル束に，Hewitt [48] で連続関数環に，Ehrenfeucht-Łoś [54] で無限巡回群に，また，これ以

外の文献は Keisler-Tarski [64: 272] に述べられている．超巾の構成との関連において，可測基数の現代における中心的な重要性が確立されるには，スコットの登場を待たねばならない（§5 を参照）．

§3　構成可能性

この節では新しい巨大基数の概念を議論するというより，今世紀最大の論理学者（logician）であるゲーデルによる集合論への主要な貢献と彼の巨大基数に対する哲学について論じることになる．彼の貢献は，公理的集合論が数学の独立した分野として出発する基点となったのみならず，これに続く巨大基数に関する仕事に大きな刺激を与えたが，巨大基数の理論は，まず彼の結果を相補する形で，後にはこの結果の構造的な一般化という形でこれに答えたのであった．

1935 年の 10 月にプリンストン高等研究所で，ゲーデルはフォン・ノイマンに選択公理の相対的無矛盾性の証明が完成したことを告げている．これは，もちろん彼の構成的階層 L （“law” の頭文字から来ている）を用いて，ここでこの公理が成り立っていることを証明することで得た結果であった．ゲーデルはここで連続体仮説も成り立つことを予想したが，その直後彼は病気になり，この証明と，さらに GCH の成り立つことの証明は 2 年後にようやく与えられることになる（決定的なアイデアは，Gödel [86: 40] によれば，1937 年の 6 月 14 日から 15 日にかけての夜に得られたということである）．これらの非常に重要な結果に加えて，ゲーデルは L で記述集合論に関する限定的な反例が存在することも発見している（§§12, 13 を参照）．

ゲーデルの *Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.* に載った論文 Gödel [38] はこれらの結果の最初の予告で，より詳しい細部の ZF での議論は，これに続く Gödel [39] で与えられた．復習すると，集合 y が構造 $\mathcal{M}$ で**定義可能**とは，$\mathcal{M}$ の言語での一階の論理式 $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ と $\mathcal{M}$ の領域の元のパラメタ $a_1, \ldots, a_n$ で，$z \in y \ \Leftrightarrow\ \mathcal{M} \models \varphi[z, a_1, \ldots, a_n]$ となるものがあることである．任意の集合 x に対し，

$$\mathrm{def}(x) = \{y \subseteq x \mid y \text{ は } \langle x, \in\rangle \text{ で定義可能}\}$$

とする．これは，$\mathcal{P}(x)$ の部分集合で，$\langle x, \in\rangle$ に対する形式化された充足性を用いて定義可能であるから，これ自身集合である．ここで超限帰納法によって，

$$L_0 = \emptyset\,;\ L_{\alpha+1} = \mathrm{def}(L_\alpha)\,;\ \ \text{極限 } \delta \text{ に対しては，} L_\delta = \textstyle\bigcup_{\alpha<\delta} L_\alpha$$

として

$$L = \textstyle\bigcup_\alpha L_\alpha$$

と定義する．よって，L は（定義可能な）クラスとなるが，これを**構成可能集合**のクラスと呼ぶ．L で選択公理が成り立つことはほとんど明らかである：$L_{\alpha+1} - L_\alpha$ の整列順序は，パラメタとして必要になる L_α の元に対する，すでに得られている整列順序から一意に得ることができるので，L 内での超限帰納により，L をレヴェルごとに整列してゆくことができるからである．GCH が成り立つことを確かめるのは，もう少し難しいが，ここで

の証明のアイデアは，明らかに，レーベンハイム=スコーレムの定理のもととなったスコーレムによる分析 Skolem [23] に基づいている．Devlin [84], Kunen [80], Moschovakis [80] および Drake [74] にゲーデルの結果の詳説がある．

ゲーデルは注意深い認識論的分析が数学の大きな発展につながると信じていたが，ここでの彼の驚くべき成功はこの主張の正当性を十分に立証するものとなっているといえよう．彼の L に関する結果は実際，彼の有名な不完全性定理 Gödel [31] に続くたえまない知の発展の結果であって，後にこれは巨大基数に関する哲学的考察に押し進められることになる．すでに Gödel [31] の脚注 48a には，クライゼル Kreisel [80] が重要視している，次のようなゲーデルの言葉が見られる：

> ··· 数学でのすべての形式的体系に内在する不完全性の真の理由は，高階のタイプを作ってゆくプロセスが超限的に続く可能性があるのに対し ··· 任意の形式的体系においては，それらのうち可算個のものしか調達できないことにある．なぜなら，ここで構成された決定不可能な命題は，適当なより高いタイプが付加されることで（例えば，体系 P [ペアノ算術] にタイプ ω を付加することで）決定可能になるからである．同様の事態は集合論の公理系でも起こる．

Gödel [38] で最初に与えられた L の記述には，ゲーデルがこの直観からどのように考えて理論を構築したかが示されている：

> このモデルは，大雑把な言い方をすると，“数学的に構成可能” な集合からなっているが，この “構成可能” という用語は半直観的な意味で理解されるべきものであって，これは非述語的な手続きを除外するものとなっている．このことは，‘構成可能’ な集合は，もし超限的な階層も含めるなら，ラッセルのタイプの分岐的階層により得られるものとなっているということを意味する．超限の階層にまで拡張することの帰結として，還元可能性の公理が十分に高い階層で成り立つため，このモデルは非述語的な集合論の公理系を満たすようになる．

このようにゲーデルは彼の階層を，$L_{\omega+\omega}$ の形式的理論として解釈できるラッセルの階層を拡張するものと見なしていたのであった．これは述語的な定義（つまり，その前の段階で得られた対象を領域として量化子を適用すること）により得られるものとなっているが，ゲーデルは，Gödel [31] の脚注で述べているように，高階のタイプをすべての順序数で添数付けすることにより，集合論の公理をすべて満たすようにできることに気付いたのであった．ゲーデルはここでは歴史的な連続性を強調していて，ラッセルの不運な還元可能性の公理に言及しているが，これは言い直すと：$x \in L_\lambda$ で λ が L の基数なら，任意の L の元 $y \subseteq x$ に対し，$\gamma < \lambda$ で $y \in L_\gamma$ となるものが存在する，ということになる．このように，非述語的な巾集合の演算は，L では十分おとなしいものとなっているため，GCH の無矛盾性が導かれるのである．後にラッセルの数理論理学に関する注釈 Gödel [44: 147] で，ゲーデルは，彼の “還元可能性の超限定理” について，“すべての非述語性は一つの特殊な形のもの，つまりある種の巨大な順序数（あるいは整列順序集合）とそれに関する帰納的な論法に還元される” と述べている．

興味深いことに，ゲーデルは L を超限的な数学的論法による直截な構成と考えていた．これについては Wang [74: 8ff] を参照されたい；そこで引用されている手紙で，ゲーデルは彼の CH の結果について，“··· そこには構成主義者が私の無矛盾性証明を発見することを事実上不可能にする障害が存在した．それは，ことさら構成主義的な目的のために発明された分岐的階層を，まったく非構成的なやり方で用いなければならない，という事実で

ある” と述べている．ゲーデルはツェルメロの Zermelo [30] を知っていて，実際，そこには，無限的な方法の直接的な使用と領域を次々に重ねて行くやり方などに類似性が見られる．しかし念のために言うと，ツェルメロは論理を形式化しなかったのに対し，ゲーデルは彼の形式的体系の研究を通じて超限的タイプの階層のアイデアに到達したのであった．L のどのような定式化であれ，置換の公理によって引き延ばされる順序数の範囲をうまく設定してやらなければならない．そして，注目すべきことは，Gödel [39] での形式的無矛盾性証明の主要命題では，ツェルメロが “境界数 ”(Grenzzahl) と呼んだものが現れていることである：つまり，κ が到達不可能なら，$L_\kappa \models \mathrm{ZFC} + \mathrm{GCH}$ となる．ここでは κ は，GCH が証明できることから弱到達不可能で十分である（Firestone-Rosser [49] を参照）．

1938–39 年の冬に高等研究所で行なった講演に基づくモノグラフ Gödel [40] で，ゲーデルは L の別の定式化を与えている．ここでは，彼は L を，7 つの基本的な生成関数によって，超限帰納的に一つ一つ集合をとってゆく形で定式化しているが，これは一種の超限的なゲーデル数化であった．これらの生成関数はベルナイズ Bernays [37] の分出公理の図式による 2 階の論理での有限な公理化に基づいて定式化されているが，ノイマンの関数による定式化 Neumann [25] が，このベルナイズの体系の先駆となっている．彼の超数学的構成に対して厳格な形式化を与えることで，ゲーデルは，どのようにして “内部モデル” が生成され，有限的な相対的無矛盾性証明が得られるかという点を強調している．特に，ここでは到達不可能基数は不要となっている．さらに，この定式化では，基本的な集合の生成のプロセスと順序数の範囲との比較が強調されている．

皮肉なことに，この微妙な人格形成期における集合論の発展は，Gödel [40] によって損なわれてしまっているように思われる．それの持っていた権威のために，Gödel [39] でのモデル理論的アプローチ，特に GCH の証明におけるスコーレム閉包による議論が，この陰に隠れてしまったきらいがあるからである．10 年ほど後になって，Gödel [40] での綿密な分析が適切な枠組として機能し始めるようになる：ゲーデル自身は L を無矛盾性の結果を出すための道具としか見ていなかった．これに対し，1960 年代の中ほどにイェンセン Ronald Jensen [72] は L の “細部構造” の理論それ自身を研究分野として発展させたが，この理論の一般化は現代集合論の研究の主流の一つとなったのである．

高階のタイプを用いることによる形式的体系の完全化という彼のビジョンの延長線上で，ゲーデルは 1940 年代に巨大基数の仮説による命題 —— 特に連続体問題に関すること —— の決定について考察している．プリンストン大学で 1946 年の 12 月に行なった講演でゲーデルは次のように述べている (Gödel [90: 151]):

> 集合論では，例えば，拡張の繰り返しは，次々により強い無限の公理をとってゆくことでうまく表現することができる．どのような無限の公理をとってゆくべきかということに対し，決定可能な形の組合せ論的な特徴付けを与えることは明らかに不可能であるが，しかし，例えば次のような種類の特徴付けは可能であろう：無限の公理とはある（決定可能な）形式的な構造を持ち，かつ，正しいものである．このような確証可能性の概念はそこで必要となる閉包の性質を持っていなければならない，つまり，次のことが正しくなくてはならない：集合論的な定理の集合論を拡張する次の高階の体系での証明は ... そのような無限の公理からの証明で置き換えることができる．このような確証可能性の概念に対し，すべての集合論で表現できる命題は，既存の公理系に，すべての集合のユニヴァースが大きいことを主張する

> 正しい命題を加えたものから決定可能である，というような，ある種の完全性定理が成り立つことはあり得る．

これはすべての集合論的命題を決定できる“正しい”公理を新しく発見することができるという，驚くほど楽観的な主張であると言えよう．次のような**反映の原理**の論法の与える巨大基数に対する動機付けはほとんど直接的であることに注意しよう：(a) 任意の集合論的命題は“集合論を拡張する次の高階の体系で確立される”，というのは，V での充足関係が定義できる，と解釈でき，(b) この関係の個々の場合での適用が，“無限の公理で置き換えることができる”，というのは，対応する巨大基数が On の役割を果たすことと解釈できる．ゲーデルは，さらに，この反映の原理の論法をもちいて順序数定義可能性の概念を定式化している（Gödel [90: 146] を参照）．反映の原理（6.2 以降を参照）は，ZF で行うことのできる基本的な議論として定式化することができる．

反映の現象は，様々な巨大基数を動機付けするときの主要な発見的方法として重要な意味を持つにいたった： On の性質に帰着できる種々の巨大性の性質は，On の算術における意味としては本質的に非内包的であることを示し，これはカントルの絶対を想起させるものとなる．この On に終わりのないことによる記述不可能性は，そのような性質を成り立たせる巨大基数への総合的な移行に結び付けて考えることができるのである．

ゲーデルの論説的な性格の論文 Gödel [47] では，連続体問題が中心にとりあげられているが，そこには彼の実存主義的な数学観に関するたぐいまれな主張が含まれている．彼は，連続体仮説が ZF から独立であることを予想し，さらに，それがある種のアプリオリな直観から正しくないことを論じている．ここでは，この種の問題を解決する可能性のある形式的公理系として，巨大基数があることを，1946 年の覚書の時よりもさらに確信を持って考えている．Zermelo [30] を引用して，そこでのテーマに呼応して，“‘... の集合’という演算のもっとたくさんの繰り返しの存在を保証する”新しい公理群の累積的階層について述べて，到達不可能性基数やマーロ基数をこの例としてあげている．しかし，これらの基数は L に相対化することができ (3.1) したがって CH の不成立を導かないことも述べている．

ゲーデル Gödel [47: 521] はさらに：

> ... 何らかの新しい公理が本質的に必要とされているということをひとまず無視することにしても，あるいは仮にそれが実際には本質的には必要とされていないとしても，別のやり方でその正しさを確かめることは可能である．つまり，帰納的にその“成功”を調べることによってである．その公理の帰結の実りの多さ —— 特に“確証可能な”帰結，つまり，そのような新しい公理を用いなくとも証明できるが，新しい公理のもとでの証明はより簡明で，より容易に発見することができ，多くの証明を一つの証明にまとめることができるようなもの —— によってである ... 多くの確証可能な帰結を持ち，広範囲な分野に光をあて，問題を解くための強力な手法を与え，（かつ，可能であるなら構成的方法でそれらを解いてもしまうような）公理が存在することは十分あり得るが，そのような公理は，それの必要性の如何によらず，少なくとも，よく認められた物理学の理論と同じような意味で受け入れられるべきであろう．

公然の実存主義的な立場を“真理”の権威を惑わす実用主義で値切ったとしか言いようのない奇妙な立場であるが，後に続く研究，特に決定性の公理の研究の結果（第 6 章を参照）にはこの表明に呼応するものがあった．新しい公理の本質的な必要性と，それが認められるた

めの実用的な成功に関するゲーデルの見解についてさらに詳しいことは Wang [74: 200ff] を参照されたい．ゲーデルは上の論文を，CH の否定を擁護する数学的事実に関する注意で結んでいるが，これは色々と議論を呼ぶことになる（例えば，Martin-Solovay [70: 176], Martin [76] を参照）．

後日 "ゲーデルのプログラム" などと言われるようになり，ゲーデルのこの提起については色々な見解を述べることができるであろうが，しかし，これが，後に続く発展にどのくらい実際の影響を及ぼしたかは明らかでない．事実としては，1960 年代に重要な貢献をすることになるタルスキー（§4 を参照）はゲーデルの 1946 年のプリンストンでの講演を聞いているのだが，このテキストは 1965 年に Gödel [65] が出るまで一般には公開されていなかった．論文 Gödel [47] は広く読まれていたが，これはむしろ非専門家のために書かれたものであった．また，ゲーデルの注意がインスピレーションの源となったというような謝辞もどこにも見あたらない．むしろ 1960 年代には，巨大基数の理論は，ゲーデルの認識論的な思惑に関わる余裕もなく，自家燃焼的に高速に発展して洗練された集合論の一分野として開花したのである．

1966 年頃の Gödel [47] の出版されなかった改訂版での脚注 20 で，ゲーデルは§§4, 5 で述べることになる新しい展開を認めている（[90: 260ff] を参照）：

> 近年になって無限の公理に関する分野で大きな進展があった．特に，それらが無矛盾なら，まったく新しい種類の非常に強い無限の公理となる一連の命題が定式化された ... スコット Dana Scott ... はこれらのうちの一つから非構成可能集合の存在が帰結されることを示した．これらの公理を，マーロによるような意味の，集合に関する一般的な概念から導くことができるかどうかは今のところ分かっていない ... しかし，これらの命題は類推による強い議論により支援されている．例えば，これらはブール代数のストーンの表現定理を無限個の元に対する演算に一般化したものの存在から導き出せる．

この最後の文は多分強コンパクト性について（4.1 を参照）言及しているものと思われる．$\aleph_0$ からの**一般化**による発見的方法も様々な巨大基数を動機付けるために用いられる．カントルの有限と超限に対する統一的な見方について思い出すと，$\aleph_0$ で満たされる巨大基数の性質が，無限の回帰において，他のもっと大きな基数に対して適用できないというのはあまりに不自然であろう．

1942 年にゲーデルは選択公理の独立性に関する部分的な結果を得ていたが，程なくこの仕事を放棄してしまったことは現在ではよく知られている（Moore [88: 149-151] を参照）．クライゼル Kreisel [80: 201] によれば，"現在の知識があれば証明を完成させることは容易である．しかし，何か本質的なもの —— ゲーデルとの会話での彼の言葉では**手法** —— が欠けていたのである ...". アディソン John Addison によれば，ゲーデルはこの証明が集合論の研究を間違った方向に導くことを恐れたということである（Moore [88: 150] を参照）．相対的無矛盾性の結果を発展させるより，集合の概念をもっと子細に分析して，連続体仮説のような問題に決着をつける新しい公理を見い出す努力をするべきだということであろう．しかし，ゲーデルは Gödel [47] の 1966 年の改訂版の後書きでは，コーエン Paul Cohen の CH の独立性証明の仕事は "... 集合論が公理化されて以来の集合論の基礎に関するもっとも偉大な進歩である" と表明している (Gödel [90: 270])．また，巨大基数は CH に対し

て直接の影響を持たないことを，この結果が示していることにも注意している (10.12ff).

これに続く展開の如何にかかわらず，ゲーデルの L の構成は，集合論のユニヴァースの最小な可能性を確立したわけであり，巨大基数の理論は，まずこの結果に対抗する形で，後にはこの結果の構造的な一般化という形でこの結果に対する均衡をとるべく発展してゆくことになる．可測基数が $V = L$ と矛盾するというスコットの結果 (§5) は，$V = L$ のような仮説に対する超越性を確立するためには巨大基数が本質的に必要となる，ということを示す一連の研究を促したのであった．可測性を内包するような構成可能性の一般化 (§§20, 21) は様々な巨大基数の仮説に対する極小モデルの理論を開花へと導いた．そして研究結果の漸進は，様々なタイプの問題 —— 多くは定義可能な実数の集合に関する —— の解決により，巨大基数の理論の実用主義的な成功を十二分に示すことになる．このようにして，ゲーデルが考えていたよりもずっと微妙な形でではあったが，彼が巨大基数に託していた希望の正当性は肯定されることになったわけである．

内部モデル

ゲーデルの L の構造的な一般化は，抽象化，相対化，および，いくつかの条件つきの独立性の結果により始まっている．主に証明論での目的を頭において，シェパードソン Shepherdson [51, 52, 53] は，“内部モデル” の一般化された概念を注意深く定式化し，これの研究をしている．“内部モデル” という用語は次のような特殊な場合にのみ用いることにする：真のクラス M に対し，

M が**内部モデル**とは，M は推移的な ZF の $\in$-モデルで $\mathrm{On} \subseteq M$ となることである．

このような M で ZFC のモデルとなるようなものを，**ZFC の内部モデル**と呼ぶことにする．他の ZFC の拡張についても同様である．これらの概念は，例えば，クラスに対して充足関係が定義可能な Morse-Kelley の公理系などでは任意のクラスに対し定式化することができるが，ZF での定式化には，多少の注意が必要となる：

(i) “クラス” とは ZFC の文脈では定義可能なクラスのことである．つまり，論理式 $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ と集合 $a_1, \ldots, a_n$ があって，$x \in M$ というのは，$\varphi[x, a_1, \ldots, a_n]$ の単なる言い替えにすぎない．

(ii) $\mathrm{Inn}(v)$ を

$$\bigcup v \subseteq v \ \wedge \ \forall\alpha(\mathrm{def}(v \cap V_\alpha) \subseteq v)$$

という論理式とする．明らかに $\mathrm{Inn}(v)$ から $\mathrm{On} \subseteq v$ となることが，順序数上の帰納法により分かる．また，$\{v \cap V_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On}\} \subseteq v$ である．この相対化されたランク階層により，L でと同様に，ZF のすべての公理 σ について，σ の M への相対化 σ^M に対し，

$$(*) \qquad \vdash_{\mathrm{ZF}} \ \mathrm{Inn}(M) \rightarrow \sigma^M$$

が成り立つ（Devlin [84: 60-63] を参照）．さらに，N が任意の推移的なクラスで $\mathrm{On} \subseteq N$ かつ，$\vdash_{\mathrm{ZF}} \sigma^N$ がすべての ZF の公理 σ に対し満たされるなら，$\vdash_{\mathrm{ZF}} \ \mathrm{Inn}(N)$ を示すことができる．

(∗) の証明には ZF の公理の図式のすべての場合が必要になるので，(i), (ii) は弱い意味

での定式化でしかない．ともかく，M が内部モデルである，という主張の意味は $\mathrm{Inn}(M)$ が成り立つことであるとし，しばしば本来の φ^M の代わりに $M \models \varphi$ と書く．

内部モデルのアーキタイプは L で，任意の内部モデル M に対し，$L^M = L$ により $L \subseteq M$ が成り立つ．このことによりシェパードソン Shepherdson [53] は ZFC+ ¬GCH のような理論の相対的無矛盾性は内部モデルへの相対化によって確立することはできないことを指摘している．さらに，ゲーデルが Gödel [38: 557]（より明確には Gödel [51: 69]）で注意しているように，いくつかの巨大基数は内部モデルに相対化することができる：

3.1 演習　M を ZFC の内部モデルとして κ を α-到達不可能基数とする．このとき，(κ は α-到達不可能基数$)^M$ が成り立つ．同様な命題は α-マーロ基数についても成り立つ．

ヒント　以下を示せばよい：(a) κ が強極限なら，κ は M でも強極限となっている．また (b) κ が正則なら，κ は M でも正則である．したがって，命題は α に関する帰納法により証明できる．　⊣

このような内在的な制限にもかかわらず，ハイナル András Hajnal [56, 61] とレヴィ Levy [57, 60] はそれぞれハンガリーとイスラエルでの彼らのドクター論文で L の一般化の基礎となる事柄に関する研究を行なった．これは巨大基数の集合論の内部構造に与える効果に関する問題を後で扱うときに，中心的な役割を果たすことになる．Moschovakis [80: 489ff, 531ff] と Drake [74: 149ff] には以下に述べるモデルについての詳しい解説がある．ここでは，これに関する最も極立った特徴についてのみ述べるにとどめる：

ハイナルは実質的には集合 A が与えられたとき，これの**構成的閉包** $L(A)$，つまり，$A \in M$ となるような最小の内部モデルを構成している．A の元が $L(A)$ の中にどのように取り込まれるかを問題としなければ，ツェルメロ Zermelo [30] のウアエレメントのアイデアを，得られるクラスが推移的になるために，推移的閉包 $\mathrm{tc}(\{A\})$ に適用できるので：

$$L_0(A) = \mathrm{tc}(\{A\})\ ;\ L_{\alpha+1}(A) = \mathrm{def}(L_\alpha(A))\ ;$$
$$\text{極限順序数 } \delta > 0 \text{ に対しては，} L_\delta(A) = \textstyle\bigcup_{\alpha<\delta} L_\alpha(A)$$

とし，

$$L(A) = \textstyle\bigcup_\alpha L_\alpha(A)$$

と定義する．このとき $L(A)$ は内部モデルとなるが，$\mathrm{tc}(\{A\})$ が $L(A)$ で整列順序を持たなければ $L(A)$ は選択公理を満たさない．$|L_\alpha(A)| = |\mathrm{tc}(\{A\})| \cdot |\alpha|$ がすべての $\alpha \geq \omega$ で成り立つことは α に関する帰納法によって確かめられる．

他方，レヴィは，集合 A が与えられたときに A から**相対的に構成可能**な集合の全体 $L[A]$，つまり，すべての $x \in M$ に対し $A \cap x \in M$ となる最小の内部モデル M を考察している．A の要素であるという述語をそれまでに構成した集合について用いてもよいということにして相対化された階層を定義する，というのがここでのアイデアである．

$$\mathrm{def}^A(x) = \{y \subseteq x \mid y \text{ は } \langle x, \in, A \cap x\rangle \text{ 上で定義可能 }\}$$

として，$A \cap x$ を単項関係として定義で用いられるようにする．L とのアナロジーで

$L_0[A] = \emptyset$；$L_{\alpha+1}[A] = \mathrm{def}^A(L_\alpha[A])$；$\delta > 0$ が極限順序数なら $L_\delta[A] = \bigcup_{\alpha<\delta} L_\alpha[A]$

として，

$$L[A] = \bigcup_\alpha L_\alpha[A]$$

と定義する．$L(A)$ でとは異なり，A のうち $L[A]$ の中に残るのは $A \cap L[A]$ のみである．したがって，例えば，実数の全体 $\mathbb{R}$ に対しては，$L[\mathbb{R}] = L$ となる．しかし，A に関する情報は定義の際に階層的に取り込まれるので，$L[A]$ はより構成的であると言える．また L と同様に $L[A]$ **も選択公理を満す**．$|L_\alpha[A]| = |\alpha|$ がすべての $\alpha \geq \omega$ に対して成り立つことは α に関する帰納法により示すことができる．$L[A]$ の理論を構築するときには，集合論の言語を 1 変数述語記号 $\dot{A}$ で拡張した言語 $\mathcal{L}_\in(\dot{A})$ での構造 $\langle L_\alpha[A], \in, A \cap L_\alpha[A] \rangle$ を用いると具合がよい．

L と同様に，この理論の重要な特徴は，これの定義が**絶対的**であることで，このことにより，次が導かれる（Moschovakis [80: 515, 532] を参照）：

3.2 命題

(a) M が内部モデルで $A \in M$ なら，$L(A)^M = L(A)$ となる．

(b) M が内部モデルで $A \cap M \in M$ なら $L[A \cap M]^M = L[A]$ が成り立つ．

(c) $A \cap L[A] = B \cap L[A]$ なら $L[A] = L[B]$ が成り立つ．

(d) $L[A] = L[A \cap L[A]] = L(A \cap L[A])$．

(e) $A \subseteq L$ なら，$L[A] = L(A)$ となる． ⊣

後で引用できるように，構成可能性の細部構造の分析の出発点となる L と $L[A]$ に関する結果を述べておく（Devlin [84: 71, 75] あるいは Moschovakis [80: 496, 516, 533] を参照）．

3.3 定理

(a) $\mathcal{L}_\in$ の文 σ_0 で，任意の推移的なクラス N に対し，

$$\langle N, \in \rangle \models \sigma_0 \iff \text{ある極限順序数 } \delta > \omega \text{ に対し，} N = L \vee N = L_\delta \text{ となる}$$

ようなものが存在する．また，$\mathcal{L}_\in$ の論理式 $\varphi_0(v_0, v_1)$ で，L の整列順序 $<_L$ を定義し，任意の $y \in L_\delta$ と x に対し，

$$x <_L y \iff x \in L_\delta \wedge \langle L_\delta, \in \rangle \models \varphi_0[x, y]$$

となるようなものが存在する．

(b) $\dot{A}$ を 1 変数述語として，$\mathcal{L}_\in(\dot{A})$ の文 σ_1 で，任意の A と推移的なクラス N で，

$$\langle N, \in, A \cap N \rangle \models \sigma_1 \iff \text{ある極限順序数 } \delta > \omega \text{ に対し，} N = L[A] \vee N = L_\delta[A] \text{ となる}$$

ようなものが存在する．さらに，$\mathcal{L}_\in(\dot{A})$ の論理式 $\varphi_1(v_0, v_1)$ で，任意の $\langle L[A], \in, A \cap L[A] \rangle$ に対し整列順序を定義し，任意の極限順序数 $\delta > \omega$, $y \in L_\delta[A]$ と x に対し，

$$x <_{L[A]} y \iff x \in L_\delta[A] \wedge \langle L_\delta[A], \in, A \cap L_\delta[A] \rangle \models \varphi_1[x, y]$$

となるものが存在する． ⊣

文 σ_0 を使うと，直ちに，次のような，L での GCH の証明で決定的な役割を果たすゲーデルの圧縮レンマが得られる：$\delta > \omega$ が極限順序数で，$\langle H, \in \rangle$ が，$\langle L_\delta, \in \rangle$ の初等的部分構造なら，(0.4 により) $\langle H, \in \rangle$ は推移的崩壊を持つが，(σ_0 により) これは，ある α に対し $\langle L_\alpha, \in \rangle$ という形になっている．

形式的な表記は異っていたが，ハイナルもレヴィも順序数の集合 A を用いていたので，3.2 により $L[A] = L(A)$ となっていた．この違いが表面化するのは後になってからのことである．ハイナルとレヴィ（および，シェーンフィールド —— 彼は Shoenfield [59] でレヴィの構成法の特殊な場合を定式化している）はこれらのモデルを次のような条件付きの独立性の結果を得るために用いている：もし $\neg$CH が無矛盾なら，$\neg$CH とすべての十分に大きな λ に対して $2^\lambda = \lambda^+$ が成り立つことを合せたものも無矛盾である．ハイナルはより細かな分析をしており，それにより次のような有用な事実を得ている：$V = L[A]$ で $A \subseteq \kappa^+$ なら，$2^\kappa = \kappa^+$ が成り立つ．特に，$\neg$CH で $A \subseteq \omega_2$ が互いに異なる α_2 個の ω の部分集合，および，すべての $\alpha < \omega_2$ に対する単射 $\alpha \to \omega_1$ をコードしているなら，$\omega_2^{L[A]} = \omega_2$ となり，したがって $(2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} = \omega_2)^{L[A]}$ となる．これから，さらに鋭い指摘として，もし $2^{\aleph_0} \neq \omega_2$ が ZFC から証明できるなら，CH も ZFC から証明できることが分かる．これらの結果はすべて期待されていた CH の独立性の証明の先がけとなるものであったが，時をたがわず，コーエンは彼の有名な強制法によってこれを確立したのであった．

§4 コンパクト性

1930 年からほぼ 30 年の間，巨大基数の研究では目立った進展はほとんど見られなかったが，タルスキー Alfred Tarski はこの分野への強い関心を持ち続けた．1939 年に彼はポーランドから合州国を訪れるが，大戦の勃発により，帰国できなくなり，1942 年頃にはバークレイのカリフォルニア大学に落着いている．その活発な活動により，タルスキーはカリフォルニアの数理論理学の開花における中心的役割を果たすことになり，バークレイは 1960 年代には集合論の中心地としての指導的な地位を確立するに至る．特に，タルスキーと彼の共同研究者たちはモデル理論の手法を導入することで，巨大基数の研究に基本的な貢献をすることになった．この節では，これらの展開の初期の段階について記述し，§0 で述べたモデル理論の予備知識が活用されるありさまを見ることにする．

組合せ論的な手法の応用はエルデシュとタルスキーの早い時期の論文 Erdös-Tarski [43] で既に示唆されている．この論文の終わりでは，それから到達不可能性の帰結できるような，様々な基数の性質が論じられている（§7 を参照）．ここで述べられている結果の証明の細部はタルスキーとモストフスキー Adrzej Mostowski のバークレイの有名なセミナーで 1958 年から 59 年にかけて話され，その直後 Erdös-Tarski [61] で発表された．これを背景として，タルスキーのもう一つ別の方向へのアプローチが画期的な結果をもたらすことになる．

タルスキーは Tarski [58] で無限述語言語 $L_{\lambda\mu}$ の意味論を考察しており，後にこのよう

な言語のコンパクト性の問題を提起している．手短に述べると，$L_{\lambda\mu}$ の言語は次のように定式化することができる：普通の一階の論理と同様に，まず**非論理記号**を用意する．（有限的な）述語記号，関数記号，および定数記号である．これらと，$\max(\{\lambda,\mu\})$ 個の変数により項と原子論理式を作る．次に普通の論理式の生成規則を拡張して，任意の $\alpha<\lambda$ に対し α 個の論理式の合接 $\bigwedge_{\xi<\alpha}$ と離接 $\bigvee_{\xi<\alpha}$，および，任意の $\beta<\mu$ に対し，β 個の変数に対する全称量化子 $\forall_{\xi<\beta}$ の適用，および，存在量化子 $\exists_{\xi<\beta}$ の適用を許すことにする．ここで，このようにして生成された表現で，μ 未満の自由変数を持つものとして，論理式を定義する．この最後の条件は量化子による閉包が取れるようにするためである．この言語を解釈するための構造は一階の論理でと同じもので，充足関係は，ここでの新しい無限の論理演算と量化子に対し期待されるようなやり方で拡張することで得られる（これらの言語の参考書としては，形式的シンタックスに関しては Karp [64], $L_{\omega_1\omega}$ のモデル理論に関しては Keisler [71], また，一般的なモデル理論に関しては Dickmann [75] がある）．以下では，$L_{\lambda\mu}$ 論理の性質で，一階の論理，つまり $L_{\omega\omega}$ の性質の素直な拡張となっているものについては証明なしで認めることにする．ここで導入される概念は，後に続くいくつかの節で，組合せ論的特徴付けとして応用され，それにより，そこで得られる結果を大幅に改良することになる．

タルスキーは，Tarski [62] で，よく知られた $L_{\omega\omega}$ のコンパクト性の，次のような 2 つの自然な拡張を考察している：$L_{\lambda\mu}$ の文の集合が**充足可能**とは，それが無限の合接，離接，量化子の期待されるような解釈によりモデルを持つこととする；このような文の集合が，ν-**充足可能**とは，この集合の部分集合で濃度が ν 未満のものがすべて充足可能となることをいう．$\kappa>\omega$ に対し，

> κ が**強コンパクト**とは，任意の $L_{\kappa\kappa}$ の文の集合 Σ について，それが κ-充足可能なら，充足可能となること．
>
> κ が**弱コンパクト**とは，多くとも κ 個の非論理記号しか用いられていないような $L_{\kappa\kappa}$ の文の集合 Σ について，それが κ-充足可能なら，充足可能となること．

タルスキーによる弱コンパクト性のもともとの定義は，より制約のきつい $|\Sigma|=\kappa$ が用いられているため，κ が到達不可能とは限らなかった（Boos [76] を参照）．一方，ここでの定義は κ が到達不可能であることを導く (4.4) が，現代的な観点からはこちらの方が都合がよい．

1960 年代の初期には，超積の基本的な構成法により，モデル理論の新しい結果が次々に得られており，超フィルターに関心が集まっていた．一般的な構成法はウォッシュJerzy Łoś [55] により与えられたが，ここでは基本定理 0.6 はまだはっきりとは述べられていない．この後，Frayne-Morel-Scott [62] と Kochen [61] では，基本定理を，これらの著者とタルスキーによって得られたものとしている．一番目の論文では，コンパクト性定理の超積による証明が与えられているが，これの素直な一般化が次の特徴付けで用いられている．

4.1 命題 (Keisler-Tarski [64]). κ が強コンパクトとなるのは，任意の集合 S に対し，S 上の κ-完備なフィルターがすべて κ-完備な超フィルターに拡張できるときである．

証明　まず κ が強コンパクトであると仮定して F を集合 S 上の κ-完備なフィルターとする．各々の $X \subseteq S$ に対し定数記号 $\dot{X}$ を用意して，Σ を $\langle S \cup \mathcal{P}(S), \in, X \rangle_{X \subseteq S}$ の $L_{\kappa\kappa}$ での理論に，すべての $X \in F$ に対して $c \in \dot{X}$ という文を加えたものとする．ここに c は新しい定数記号である．F が κ-完備であることから，Σ は κ-充足可能となるから，強コンパクト性から，Σ のモデル $\mathcal{M}$ が存在する．ここで，U を

$$X \in U \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq S \ \wedge \ \mathcal{M} \models c \in \dot{X}$$

により定義すると，U は S 上の超フィルターで F の拡張となっており，Σ には U が κ-完備であることを主張する $L_{\kappa\kappa}$ 文が含まれている．

逆の証明には，まず κ が正則であることに注意する：もし κ が特異基数だったとすると，フィルターの κ-完備性から，κ^+-完備性が導けてしまうが，U を $\kappa+$ 上の κ-完備な超フィルターで，κ-完備な（したがって κ^+-完備でもある）フィルター $\{X \subseteq \kappa^+ \mid |\kappa^+ - X| < \kappa^+\}$ を拡張するものとすれば，U は κ^+-完備な超フィルターとなるから，κ^+ は可測基数となるが，これはウラムの 2.4 に矛盾する．

さて，$\Sigma = \{\sigma_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ を κ-充足可能な $L_{\kappa\kappa}$ 文の集まりとする．$\mathcal{P}_\kappa\lambda = \{x \subseteq \lambda \mid |x| < \kappa\}$ だったことを思い出そう．任意の $x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対し，$\mathcal{M}_x$ を Σ の言語の構造で，$\mathcal{M}_x \models \bigwedge_{\alpha \in x} \sigma_\alpha$ となるものとする．$\lambda < \kappa$ なら $\mathcal{M}_\lambda$ が存在するから，$\lambda \geq \kappa$ と仮定してよい．κ が正則であることから，

$$\{\{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \mid y \subseteq x\} \mid y \in \mathcal{P}_\kappa\lambda\}$$

は，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の κ-完備なフィルターとなる．U を，このフィルターを拡張する，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の κ-完備な超フィルターとする．ここで超積 $\mathcal{M} = \prod_{\mathcal{P}_\kappa\lambda} \mathcal{M}_x / U$ を考えると，$L_{\omega\omega}$ でと本質的には同じ証明により，ウォッシュの定理 0.6 が $L_{\kappa\kappa}$ と κ-完備な超フィルターに対しても成り立つ．すべての $\alpha < \lambda$ に対し，

$$\{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \mid \mathcal{M}_x \models \sigma_\alpha\} \supseteq \{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \mid \alpha \in x\} \in U$$

となるから，$\mathcal{M} \models \sigma_\alpha$ である．　$\dashv$

同様の特徴付けは弱コンパクト性に対しても，フィルターの拡張可能性を適当に制限したものを用いることで得られる (Keisler-Tarski [64: 288])．

次の 2 つの結果が最初に発表された時の定式化は同値だが異なる形のものであった．

4.2 系　(Erdös-Tarski [43: 328])．κ が強コンパクトなら，κ は可測基数となる．

証明　4.1 の証明により，κ は正則である．したがって，フィルター $\{X \subseteq \kappa \mid |\kappa - X| < \kappa\}$ は κ-完備となるから，これの拡張となる κ 上の任意の κ-完備超フィルターにより κ の可測性が示せる．　$\dashv$

4.3 命題　(Erdös-Tarski [43: 328])．κ が可測基数なら，κ は弱コンパクトである．

証明　Σ を κ-充足可能な $L_{\kappa\kappa}$ の文の集合で，そこに現れる非論理記号は多くとも κ 個であるようなものとする．このとき $|\Sigma| \leq \kappa^{<\kappa}$ となることは容易に示せる．したがって，可

測基数は到達不可能だったから，$|\Sigma| \leq \kappa$ となる．$\langle \sigma_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ を Σ の枚挙として，以下のように 4.1 でと同様の議論をすることができる：

各 $\beta < \kappa$ に対し，$\mathcal{M}_\beta \models \bigwedge_{\alpha<\beta} \sigma_\alpha$ とする．U を κ 上の任意の κ-完備超フィルターとして，$\mathcal{M} = \prod_\kappa \mathcal{M}_\beta / U$ とする．すべての $\alpha < \kappa$ に対し，

$$\{\beta < \kappa \mid \mathcal{M}_\beta \models \sigma_\alpha\} \supseteq \{\beta < \kappa \mid \beta > \alpha\} \in U$$

となるから，$\mathcal{M} \models \sigma_\alpha$ である． ⊣

弱コンパクト性は到達不可能性を含んでいることを最後に示す：

4.4 命題 κ が弱コンパクトなら，κ は到達不可能である．

証明 κ が正則であることを示すために，そうでないと仮定して，$X \subseteq \kappa$ を非有界で，しかも $|X| < \kappa$ となるようなものとする．このとき $c, c_\alpha, (\alpha < \kappa)$ を互いに異なる定数記号として，

$$\{c \neq c_\alpha \mid \alpha < \kappa\} \cup \{\bigvee_{\beta\in X} \bigvee_{\alpha<\beta} c = c_\alpha\}$$

は κ-充足可能となるが，充足可能ではない．これは矛盾である．

κ が強極限であることを示すために，$\lambda < \kappa$ で $2^\lambda \geq \kappa$ となるものがとれるとしてみる．このとき，c_α, d^i_α $(\alpha < \lambda, i < 2)$ を互いに異なる定数記号として，

$$\{\bigwedge_{\alpha<\lambda}[(c_\alpha = d^0_\alpha \vee c_\alpha = d^1_\alpha) \wedge d^0_\alpha \neq d^1_\alpha]\} \ \cup \ \{\bigvee_{\alpha<\lambda}(c_\alpha \neq d^{f(\alpha)}_\alpha) \mid f \in {}^\lambda 2\}$$

は充足可能でない．もし充足可能だとすれば，$\langle c_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle$ の任意の解釈は ${}^\lambda 2$ のすべての元と異なるような関数 $\lambda \to 2$ に対応することになってしまうからである．しかし同様の議論により，これの任意の真部分集合は充足可能であることが示せるから，矛盾である． ⊣

多分，最小の可測基数は，最小の到達不可能基数より真に大きくなるか，という古くからの問題を頭において，タルスキーは彼のバークレイでの学生のハンフ William Hanf に到達不可能基数が弱コンパクト性である可能性を研究することを示唆した．$L_{\kappa\kappa}$ 文をうまく選んで用いることで，ハンフは 1960 年に Hanf [64] で，弱コンパクト基数の下にたくさんの到達不可能基数が存在するということを示すことに成功した．注目すべきことに，これの最初の証明は，無矛盾だが ω-無矛盾でないような理論を構成するときにタルスキーが用いた手法によく似たものであった．この結果により，最小の可測基数は，最小の到達不可能基数より真に大きくならなくてはいけないことが分かった（Tarski [62] を参照）．

このハンフとタルスキーによる問題の解決は，可測基数の大きさに関して，ウラムの原論文以来初めての結果であった．ロビンソンは Abraham Robinson [62: 78] で，この結果に対し，超数学の手法の“目を見はるような成功”である，と賛辞を送っている．タルスキー自身は，これは，“期待に反することであった”と述べている ([62: 125])；多分，$L_{\omega\omega}$ のコンパクト性を一般化するためには到達不可能性で十分だと考えていたのであろう．集合論の発展の過程において，このような要(かなめ)となる結果が，人々の集合論的な直観をあらため，沸き起こる新しい研究に拍車をかける，という現象が幾度か見られる．ハンフの仕事は，巨大基数の言葉で理解されるべき問題に関して，その大きさに対しての直観を根本的

に改めたのであった．

今日では，ハンフの結果を得るためのいくつかの異なる方法が知られている．このうちの2つは，結果が知られてからすぐに得られている：超巾による Keisler [62] と，表現不可能性による Hanf-Scott [61] である（§6を参照）．我々は，弱コンパクト性の同値な定式化を用いて，それほど骨を折らずに，この結果を得ることになる．帰納的関数のように，弱コンパクト性も多くの異なる特徴付けを持つが，これは，この概念が自然で重要なものであることを物語っている．後の節で他のテーマが考察される折に，さらにいくつか別の特徴付けが与えられることになる．同値命題の多くは1960年代の初めに得られており，後に，Silver [71: 62] と Devlin [75] で総括されることになる —— 位相空間論的な同値命題については Comfort-Negrepontis [74: 185] を，モデル理論的な同値命題については Dickmann [75: 184] を参照されたい．

キースラー H. Jerome Keisler は，コンパクト性定理を用いてモデルの真の拡張を得るときの手法を一般化することにより，以下の結果を得ている．彼はバークレイではタルスキーの学生で，後にモデル理論の研究者として有名になるが，この形成期には，モデル理論によるいくつかの便利な特徴付けや，超積による証明を与えることで重要な貢献をしている（5.6を参照）．

4.5 定理　(Keisler [62, 62a])．κ が弱コンパクトとなることと，κ が次の拡張の性質を持つことは同値である：任意の $R \subseteq V_\kappa$ に対し，推移的な集合 $X \neq V_\kappa$ と $S \subseteq X$ で，$\langle V_\kappa, \in, R\rangle \prec \langle X, \in, S\rangle$ となるものが存在する．

注意　$\prec$ は，初等的部分構造を表す．これについては，§5の始めで，もっと一般的な枠組で復習する．$X \neq V_\kappa$ が推移的であることから，$\kappa \in X$ となることに注意する．

証明　まず初めに κ が弱コンパクトであると仮定して，$R \subseteq V_\kappa$ とする．4.4により，κ は到達不可能だから，$|V_\kappa| = \kappa$ である．c と 各 $x \in V_\kappa$ に対する $\dot{x}$ とを互いに異なる定数記号として，Σ を

$$\langle V_\kappa, \in, R, x\rangle_{x \in V_\kappa}$$

の $L_{\kappa\kappa}$ での理論に，「c は順序数」および，各 $\alpha < \kappa$ に対して「$c \neq \dot{\alpha}$」を加えたものとする．もちろん，外延性の公理は Σ の元となっている．また整順性が $L_{\omega_1\omega_1}$ で表現できることは容易に分かるから，Σ には，$\in$ が整順的であることを主張する文が含まれている．したがって，崩壊の補題0.4により，Σ は推移的なモデル

$$\langle X, \in, S, \overline{x}, \gamma\rangle_{x \in V_\kappa}$$

を持つ．ここに γ は c の解釈である．すべての $x \in V_\kappa$ に対し，Σ は

$$\forall v(v \in \dot{x} \leftrightarrow \bigvee_{y \in x} v = \dot{y})$$

という文を含んでいる．したがって，ランクに関する帰納法により，$x \in V_\kappa$ なら $\overline{x} = x$ が示せる．明らかに γ は κ より大きいか等しい順序数となるから，$\langle X, \in, S\rangle$ は求めている性質をすべて満すことが分かる．

逆方向の証明には，まず κ が拡張の性質を持てば，κ は到達不可能になることを見る：まず $\mu < \kappa$ および，共終な写像 $F\colon \mu \to \kappa$ が存在すると仮定して，真の拡張 $\langle V_\kappa, \in, F\rangle \prec \langle X, \in, S\rangle$ で X が推移的になっているものをとる．このとき，$\exists x(F``\mu \subseteq x)$ は一番目の構造で成り立たないが，$\exists x(S``\mu \subseteq x)$ は二番目の構造で成立するから矛盾である．次に $\nu < \kappa$ で，$\kappa \leq 2^\nu$ となるものが存在すると仮定してみる．このとき，$2^\nu \leq |V_{\nu+1}|$ で $V_{\nu+1} \in V_\kappa$ だから，上射 $G\colon V_{\nu+1} \to \kappa$ を考えると，前と同じように矛盾が導ける．

次に，到達不可能な λ に対し，以下のような，2 つの $L_{\lambda\lambda}$ でのレーベンハイム=スコーレムの定理が，$L_{\omega\omega}$ での (0.5) と実質的に同じ議論により得られることに注意する：

(i) σ が充足可能な $L_{\lambda\lambda}$ の文なら，σ は濃度が λ 以下のモデルを持つ．

(ii) Σ が充足可能な $L_{\lambda\lambda}$ の文の濃度が高々 λ の集合なら，Σ は濃度が高々 λ のモデルを持つ．

今度は，Σ を κ-充足可能な $L_{\kappa\kappa}$ の文の集まりで，そこに用いられている非論理記号の数は高々 κ であるとする．κ は到達不可能だから，対応する $L_{\kappa\kappa}$ 言語は κ 個の論理式を持つ．したがって，この言語を算術化して，これの論理式を V_κ の元で，また，V_κ に含まれる集合構造に対する充足関係を V_κ のクラスでコードすることができる．$R_1 \subseteq V_\kappa$ をこの充足関係をコードしたものとし，$R_2\colon \kappa \to \Sigma$ を上射とする．このとき，(i) により，

$$\langle V_\kappa, \in, R_1, R_2\rangle \models \forall\alpha({R_2}``\alpha \text{ はモデルを持つ})$$

が成り立つ．拡張の性質（を $\langle R_1, R_2\rangle$ を単一の V_κ の部分集合にコードしたものに適用すること）により，$\langle V_\kappa, \in, R_1, R_2\rangle \prec \langle X, \in, S_1, S_2\rangle$ で X は推移的で，真の拡張となっているようなものがとれる．初等的埋め込みであることから，${S_2}``\kappa = {R_2}``\kappa = \Sigma$ となり，$\langle X, \in, S_1, S_2\rangle \models \Sigma$ はモデルを持つ，が成り立っている．κ は到達不可能だから，$\langle V_\kappa, \in\rangle$，したがって，$\langle X, \in\rangle$ は ZFC のモデルとなり，X は推移的で $\kappa \in X$ だから，$\langle X, \in\rangle \models \kappa$ は到達不可能，となる（3.1 を参照）．したがって，上の (ii) により，

$$\langle X, \in, S_1, S_2\rangle \models \Sigma \text{ は } \kappa \text{ の部分集合を領域とするモデル } \mathcal{M} \text{ を持つ}$$

が成り立つ．$\mathcal{M}$ での $L_{\kappa\kappa}$ の充足関係 S_1 は，${}^{<\kappa}\kappa \subseteq V_\kappa \subseteq X$ により，X と V の間では上方向に保存される（実は絶対的ですらある）：$L_{\kappa\kappa}$ での場合と同様に，この関係は $\mathcal{M}$ に対し，Σ_1（かつ Π_1）となるからである．したがって，$\mathcal{M}$ は，V で本当に Σ のモデルとなっている． ⊣

$\langle X, \in\rangle \models \kappa$ は到達不可能，だが，一般には，$\langle X, \in\rangle \models \kappa$ は弱コンパクト，は言えない：X は κ-充足可能性に必要となるモデルをすべて含んでいるとは限らないからである．もし，そうでなければ，$\langle V_\kappa, \in\rangle \models \exists\alpha(\alpha$ は弱コンパクト$)$ が初等的埋め込みであることから言えてしまい，したがって κ より小さい弱コンパクト基数の存在が簡単な議論により帰結されるが，κ が最小の弱コンパクト基数である場合には，これは不可能である．巨大基数の理論では，この種の落とし穴がたくさんあることに気をつける必要がある．

ハンフの結果のための準備として，定常集合の反映に関する結果を述べる：

4.6 命題 κ を弱コンパクトとする．このとき：

(a) A を κ で定常とするとき，到達不可能な $\lambda < \kappa$ で，$A \cap \lambda$ が λ で定常集合となるものが存在する．

(b) $A_\alpha, \alpha < \kappa$ がすべて κ で定常とするとき，到達不可能な $\lambda < \kappa$ で，すべての $\alpha < \lambda$ に対し $A_\alpha \cap \lambda$ が定常集合となるものが存在する．

証明　(a) そうでないとして，すべての $\xi < \kappa$ に対し，ξ は到達不可能でないか，または，ξ で閉非有界な C_ξ があって $C_\xi \cap A = \emptyset$ となると仮定する．R: $\kappa \to V_\kappa$ を ξ が到達不可能なら $R(\xi) = C_\xi$, そうでないなら，$= \emptyset$ として定義する．4.5（を $\langle A, R\rangle$ を V_κ の単一の部分集合にコードしたものに適用すること）により，$\langle V_\kappa, \in, A, R\rangle \prec \langle X, \in, B, S\rangle$ で，X は推移的で，真の拡張となっているようなものがとれる．このとき，

$$\langle X, \in, B, S\rangle \models \kappa \text{ は到達不可能} \quad \wedge \\ S(\kappa) \text{ は } \kappa \text{ で閉非有界} \ \wedge\ S(\kappa) \cap B = \emptyset$$

となるが，$S(\kappa)$ は本当に閉非有界で，$B \cap \kappa = A$ だから，$S(\kappa) \cap A = \emptyset$ となる．これは A が定常であることに矛盾する．

(b) は，すべての到達不可能な $\alpha < \kappa$ に対し，$C_\xi \cap A_\alpha = \emptyset$ がある $\alpha < \xi$ に対し成り立つとして，$A = \{\langle \alpha, \beta\rangle \mid \beta \in A_\alpha\}$ ととることにより，(a) と同様の議論で示せる．　⊣

4.7 系　(Hanf [64]). κ が弱コンパクトなら，κ は κ-マーロとなる．

証明　$\alpha \le \kappa$ に関する帰納法により，κ は α-マーロであることを示す．帰納法の初めと極限の場合は明らかだから，α から $\alpha + 1$ の場合が導けることを示せばよい：

κ を α-マーロとする．このとき，$\beta < \alpha$ に対し，$A_\beta = \{\xi < \kappa \mid \xi$ は β-マーロ$\}$ は，κ で定常となる．C を κ で閉非有界する．このとき，4.6(b) により，到達不可能な $\lambda < \kappa$ で，$C \cap \lambda$ と $A_\beta \cap \lambda, (\beta < \alpha)$ はすべて λ で定常となるようなものが存在する．したがって，$\lambda \in C$ で，λ は α-マーロとなる．これは任意の閉非有界な C に対し成り立つから，$\{\xi < \kappa \mid \xi$ は α-マーロ$\}$ は κ で定常となることが分かる．よって，κ は $(\alpha+1)$-マーロである．　⊣

4.6(b) を用いて上の証明をさらに押し進めると $\{\xi < \kappa \mid \xi$ は ξ-マーロ$\}$ が κ で定常となることが示せる．実際，ハンフ Hanf [64] はマーロの階層を 4.6(b) に対応した対角化作用素で拡張して，弱コンパクト基数は，この階層の高いところに位置することを示した．彼は，“しかし，このような構成的なやりかたで定義されたクラスについて，“素朴な” 集合論の立場（あるいは，しばしば “カントルの絶対” と呼ばれるところのもの）から，すべての基数がそのようなクラスに属すわけでないことがほぼ確実であるように思える．” と，述べている ([64: 313]). つまり，彼のここでの議論は，けして弱コンパクト基数を否定するものではない，ということである．

一方，タルスキーは Tarski [62: 134] で，到達不可能基数と弱コンパクト基数（彼の用語では “not strongly incompact” な基数）との明らかな違いを強調している：

> ω より真に大きい到達不可能基数（さらに同様の種類の任意の巨大基数）の存在に対する確信は，‘素朴’ 集合論の背後にある基本的な直観からの自然の帰結であり，また，‘カントル

> の絶対' と呼ぶことのできるものに結びつけて見ることができるように思える．これに対し，現時点では，ω より真に大きな not strongly incompact な基数の存在を信じさせるに足りる説得力のある直観的な理由はないように思えるし，このような基数の存在を主張する仮説がよく知られた集合論の公理系と無矛盾であることの妥当性を示唆するような理由さえ何もないように思える．

しかし，後のページのこれと対照的な一節では，

> もちろん，もし '非常に巨大な' 基数の存在を認めないような命題，例えば，ω より大きいすべての基数が strongly incompact となる [つまり弱コンパクトでない] という命題を（言わば恒常の基礎の上に）加えることで集合論の公理系を拡張することにすれば，関連した問題のすべては完全に解かれたことになる．このような決定をすることは，しかしながら，多くの人々に集合論の研究の主要な目標の一つと見なされている，'カントルの絶対' のより大きな始片を公理化する，という立場に反することになる．このような立場に共鳴する人々は，常に，新しい '構成原理'，つまり新しい種類の '巨大基数' の存在を保証する新しい公理を（これが古い公理系と無矛盾であるように思える場合には），受け入れる準備があるが，反対に，そのような基数の非存在を主張するような公理を受け入れることについては —— それが何らかの集合論の公理系に関する超数学的な議論を簡易化するための便宜上の理由により，とりあえずなされたというような場合を除いて —— 反対である．

タルスキーは用心深い言い回しをしているが，カントルの実存主義的な考え方の影響は明らかで，これは，おそらくは，ゲーデルの意見の影響により，さらに深化したものとなったのではないだろうか．

キースラーとタルスキーはこれらの結果と理論の相互関係の丁寧な記述を Keisler-Tarski [64] で与えている．オリジナルの超数学による手法は "直観的で，分かりやすいアプローチを与える" と考えていたにもかかわらず，彼等はこの論文で，これらに超巾を用いた証明による "純粋に数学的な取り扱い" を与える努力をしている．なぜなら ([64: 226]):

> これは，超数学の知識は十分に一般にひろまっておらず，ここで議論されている事項に強い関心を抱くであろう数学者でさえ間違った認識をしている可能性があるという事実に思い至ったからであり，また，ある程度は手法の統一ということに関する（非合理的な）純粋主義によるものでもある．以下の注意でも分かるように，我々の考えでは，これを完全に成し遂げることはできなかった．

実際，彼等は，まず，可測基数がマーロの階層の高いところに位置することを，Keisler [62] での超巾によるアプローチ（5.14 を参照）を用いて示しているが，弱コンパクト基数に対する，もっと強い結果については，記述の困難の理由から略証を与えるにとどまっている．充足関係を純化するのはいつでもそんなに簡単なことではない！

巨大基数の理論が発展してゆくにしたがって，超数学的な手法は，内部モデル，強制法，初等的埋め込みの相互作用において，この分野での基本となっていった．このことの結果として，ごく初期の論文では構造や充足関係が細かく与えられていたのに対し，これらはすぐに形式的でないアバウトな記述に置き換えらるようになってゆく．これとともに，この分野は，高等的で洗練された，全数学の企ての一部となり，基礎論的な問題に直接的な関心をそれほど払わなくなってゆく．

Keisler-Tarski [64] での議論は，C_0, C_1, C_2 という基数のクラスに対してなされるが，これらはそれぞれ，弱コンパクトでないもの，可測でないもの，強コンパクトでないもの

のクラスとなっている．今日の集合論の研究者がこの論文のページをめくってみると，自分だったら双対あるいは対偶の命題として記述するであろうと思うような定理に次々に遭遇する，という奇妙な体験をすることになる．“もし C_i がすべての基数を含んでいるとすると”，という仮定を持つ定理のいくつかについては，上のタルスキーの引用に従えば，必ずしもこのような仮定を採用するというわけではないわけだろうが，病理学的な現象の手前で制限をほどこすことで得られる一様で整ったユニヴァースというようなイメージを示唆しているようには見える．ガイフマン，ローボトム，シルバー，ソロヴェイ，クーネンらによる次の段階の研究では，このような全称量化子による束縛は，存在の仮定と，集合論のユニヴァースの豊饒さの可能性に関する肯定的な帰結で置き換えられている．これは偶然の一致にすぎないかもしれないが，ほとんど同じ時期に，モデル理論では，ほとんど空という概念であるところの素イデアルから，これの双対の,「ほとんどすべて」という概念であるところの超フィルターへの用語の移行が起こったのであった．

§5　初等的埋め込み

1960年代の初めには，整順的モデルの構成の新しい可能性と，それによる相対的無矛盾性の結果によって，集合論は構造的な変貌をとげた．もちろんこれは，コーエンによる強制法の創造によるところが大きい．これにより，コーエンは，集合論のモデルの拡張を得るための，驚くほど実りの多い手法を発見したのであった．ソロヴェイをはじめてとする一流の数学者たちは，すぐにこの手法に秘められた可能性に気付き，数年のうちに強制法の手法は整理され，相対的無矛盾性の結果の湧き出る豊饒の角が出現したのであった（§10を参照）．

スコットによる画期的な結果は，初等的埋め込みの研究という，もう一つ別の方向への研究を促した．スコットは1950年代に，バークレイでタルスキーのもとで数学基礎論における種々の問題に関する仕事を始めている．$V \neq L$ の相対的無矛盾性を示す，というのは強制法でのいろはであるが，スコットは，Scott [61] で，**可測基数が存在すれば，$V \neq L$ が成り立つ**ことを示して，このことの可能性に最初に注目している．この違いは決定的である．彼は相対的無矛盾性ではなく，与えられた原理から，これが導かれることを示したのである．このようにして，ゲーデルが巨大基数に託していた希望の正当性がこのような形で示されることになるのである．つまり，ゲーデルの公理 $V = L$ は ZFC に対して無矛盾な制約を課したわけだが，スコットの結果からの発展により，L からの本質的な超越性を得るためには巨大基数が必要であるということが示されることになるのである（§9を参照).

スコットの仕事に促されて集合論での真のクラスの自由な操作による構成が行なわれるようになり，これにより可測基数の超積や初等的埋め込みによる構造的な特徴付けが得られることになる．これに先立ち，Keisler [62]（さらに詳しくは Keisler-Tarski [64]）では超積が集合論の内部で用いられており，それによりハンフの結果 4.6 の別証が与えられている．これに続いて，スコットは V 自身の超積をとる，というグローバルなアプローチを

縦横に駆使することになる．内部モデルでと同じように，このようなクラスの概念の定式化には注意を要する：

まず領域が真のクラスである場合も含めた構造の初等的埋め込みの概念を確立する必要がある．クラス構造はその定義可能性により，単一のクラスに纏めなおすとができることを思い出そう．復習しておくと，言語 $\mathcal{L}$ の構造 $\mathcal{M}_0 = \langle M_0, \ldots \rangle$ と $\mathcal{M}_1 = \langle M_1, \ldots \rangle$ に対し，単射 $j\colon M_0 \to M_1$ が $\mathcal{M}_0$ の $\mathcal{M}_1$ への**初等的埋め込み**であるとは，次の**初等性の図式**が任意の論理式に対し満たされることである．つまり，任意の $\mathcal{L}$ の論理式 $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ と $x_1, \ldots, x_n \in M_0$ に対し，

$$(*) \qquad \mathcal{M}_0 \models \varphi[x_1, \ldots, x_n] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M}_1 \models \varphi[j(x_1), \ldots, j(x_n)]$$

が成り立つことである．これを，$j\colon \mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1$ で表す．j が M_0 上の恒等写像でもあるときには，$\mathcal{M}_0$ は $\mathcal{M}_1$ の**初等的部分モデル**であるといい，これを，$\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1$ で表す．ここで考察されるほとんどの構造は，集合論の言語 $\mathcal{L}_\in$ の拡張に対するものとなっている．もう一つの特殊化は，$\in$-モデル，つまり $\mathcal{M} = \langle M, \in \rangle$ という形のモデルの場合で，このようなモデルは通常単に M と表される．$\mathcal{M}_0$ も $\mathcal{M}_1$ のこのような形をしているときには，$(*)$ は $\mathcal{L}_\in$ の論理式の相対化により，次のように表現することができる：

$$(**) \qquad \varphi^{M_0}[x_1, \ldots, x_n] \;\Leftrightarrow\; \varphi^{M_1}[j(x_1), \ldots, j(x_n)].$$

また，$t(v_1, \ldots, v_n)$ が定義可能な $\mathcal{L}_\in$ の項で，$x_1, \ldots, x_n \in M_0$ かつ $t^{M_0}[x_1, \ldots, x_n] \in M_0$ のとき，

$$j(t^{M_0}[x_1, \ldots, x_n]) = t^{M_1}[j(x_1), \ldots, j(x_n)]$$

となる．これらのことがらはすべて，モース=ケレイ (Morse-Kelley) の公理系のようにクラスに対し充足関係の定義が可能な理論では，クラスに対しても定義することができるが，ゲーデル=タルスキーの真理の定義不可能性により，ZFC ではうまくゆかない．しかし，我々が扱うことになるのは，ほとんどは，この定式化が可能な集合構造であるか，十分満足のゆく定式化の得られる内部モデルであるかのいずれかである：

$\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}_\in$ の拡張として j を $(*)$ の前でのようなものとする．§0 での論理式のレヴィ階層に関して，

　j が Σ_n-**初等的埋め込み**とは，$(*)$ がすべての Σ_n-論理式に対して成り立つこと

とし，これを $j\colon \mathcal{M}_0 \prec_n \mathcal{M}_1$ で表す．j が M_0 上の恒等写像でもあるときには，$\mathcal{M}_0$ は $\mathcal{M}_1$ の Σ_n-**初等的部分構造**であるといい，これを $\mathcal{M}_0 \prec_n \mathcal{M}_1$ で表す．特に，任意のクラス M について，$M \prec_n V$（つまり，$\langle M, \in \rangle \prec_n \langle V, \in \rangle$）とは，すべての Σ_n 論理式が M に対し絶対的である，ということに他ならない．$j\colon \mathcal{M}_0 \prec_n \mathcal{M}_1$ なら，$(*)$ は Π_n 論理式に対しても成り立つことを注意しておく．実際，Σ_n 論理式の任意のブール結合に対し，これが成り立つ．また，$\mathcal{M}_0 = \langle M_0, \in \rangle$, $\mathcal{M}_1 = \langle M_1, \in \rangle$, $M_0 \subseteq M_1$ で，両方とも推移的なときには，Σ_0 論理式は推移的クラスに対して絶対的だったから，$\mathcal{M}_0 \prec_0 \mathcal{M}_1$ となる．

任意の与えられた自然数 n に対し，Σ_n 論理式の推移的な真のクラスでの充足関係は，ZF で定式化可能である（§0 を参照）．したがって，Σ_n-初等的埋め込みの概念はこのよう

なクラスに対しても ZF で定式化可能である．0.2 により，「$\mathrm{rank}(v_0) = v_1$」は Δ_1^{ZF} で，「$V_{v_0} = v_1$」は，Π_1^{ZF} だったが，これを用いると，内部モデルに関して，いくつかの簡単な事実を得ることができる．

5.1 命題　M_0 と M_1 を内部モデルとして，$j\colon M_0 \prec_1 M_1$ とする．このとき

(a) 任意の順序数 α に対し，$j(\alpha)$ は α より大きいか等しい順序数となる．

(b) j が恒等写像でないとして，$M_1 \subseteq M_0$ か，$M_0 \models \mathrm{AC}$ であるかのいずれかが成り立っているとする．このとき，ある順序数 δ に対し，$j(\delta) > \delta$ が成り立つ．

(c) 任意の与えられた自然数 n に対し，$j\colon M_0 \prec_n M_1$ が成り立つ．

証明　(a) 順序数であるという主張は，$\in$ に関し推移的で線型であるとうことだから，Σ_0^{ZF} である．$j(\alpha) \geq \alpha$ は帰納法により示せる．

(b) まず $M_1 \subseteq M_0$ と仮定しよう．x を $j(x) \neq x$ となるもののうちで最小のランクを持つものとし，$\delta = \mathrm{rank}(x)$ とする．$y \in x$ なら，$y = j(y) \in j(x)$ となることに注意する．したがって，$z \in j(x) - x$ がとれる．もし $\mathrm{rank}(j(x)) = \delta$ なら，$z \in M_1 \subseteq M_0$ により，z に j が適用できて，$j(z) = z \in j(x)$ となるから，$z \in x$ となり矛盾である．したがって，$\mathrm{rank}(j(x)) > \delta$ とならなくてはならないが，0.2 により，$\mathrm{rank}(j(x)) = j(\delta)$ である．

今度は $M_0 \models \mathrm{AC}$ と仮定しよう．$j(\delta) = \delta$ がすべての順序数 δ に対し成り立つとして矛盾を導く．まず，どの順序数の集合 $x \in M_0$ に対しても $j(x)$ もまた順序数の集合になることに注意すると，前の段落と同じ議論で $j(x) = x$ が言える．ここで，推移的な ZFC の $\in$-モデルがその順序数の集合の全体から決定されることを利用する：

$a \in M_0$ としよう．b を a の推移的閉包 $b = \mathrm{tc}(\{a\})$ とすると，$b \in M_0$ となる．$M_0 \models \mathrm{AC}$ だから，ある順序数 γ と b の間の全単射 $e \in M_0$ が存在する．$E \in M_0$ を $\langle\alpha, \beta\rangle \in E \ \Leftrightarrow\ e(\alpha) \in e(\beta)$ で定義される γ 上の二項関係とする．E を対の関数を用いて順序数の集合と同一視すると，前の段落により $j(E) = E$ となることが分かる．ここで関数 e は E が V でも M_1 でも整順的であることを保証する．任意の空でない γ の部分集合は E に関して V で極小元を持つが，これは M_1 でも成り立つ．つまり E は M_1 でも整順的である．$\langle\gamma, E\rangle$ は外延的でもあるので，崩壊の補題 0.4 をここで適用できて，一意性により，推移的崩壊は $\langle b, \in\rangle \in M_1$ となる．j は Σ_1-初等的で，$j(E) = E$ となり，$\langle b, \in\rangle$ が，M_0 でも M_1 でも $\langle\gamma, E\rangle$ の推移的崩壊として一意に決まるから，$j(b) = b$ である．a は b の最大のランクを持つ元として定義できるから，0.2 により，$j(a) = a$ となる．ところが，$a \in M_0$ は任意だったから，j は恒等写像となってしまい，矛盾である．

(c) 証明は，任意の与えられた自然数までの形式的体系の外での帰納法によって得られる：$j\colon M_0 \prec_n M_1$ が $n \geq 1$ に対して成り立っているとして，φ を Σ_{n+1} とする．例えば簡単のために，これは，ψ を Π_n として，$\exists v_0 \psi(v_0, v_1)$ という形をしているとして，$x \in M_0$ とする．$M_0 \models \varphi[x]$ なら，ある $y \in M_0$ に対し，$M_0 \models \psi[y, x]$ となる．したがって，$M_1 \models \psi[j(y), j(x)]$ となり，$M_1 \models \varphi[j(x)]$ が成り立つ．

逆に，$M_1 \models \varphi[j(x)]$ とする．例えば $M_1 \models \psi[z, j(x)]$ として，(a) により，α で $z \in V_{j(\alpha)}^{M_1}$ となるものがあるが，0.2 により，$V_{j(\alpha)}^{M_1} = j(V_\alpha^{M_0})$ となる．よって，

$$M_1 \models \exists v_0 \in v_2 \psi[j(x), j(V_\alpha^{M_0})]$$

である（$\exists v_0 \in v_2 \psi$ は 2 つの自由変数 v_1, v_2 を持つ論理式だが，これらをそれぞれ $j(x)$, $j(V_\alpha^{M_0})$ と解釈する）．§0 で見たように，置換の公理により，$\exists v_0 \in v_2 \psi$ は依然として Π_n^{ZF} となっている．したがって，

$$M_0 \models \exists v_0 \in v_2 \psi[x, V_\alpha^{M_0}]$$

が成り立つから，$M_0 \models \varphi[x]$ である． ⊣

個々の議論では，初等性の図式のうちの有限個の場合が用いられるにすぎないので，(c) は，内部モデルに対しては，Σ_1-初等的埋め込みが，非公式な初等的埋め込みの概念の，ZF における適切な定式化となっていることを示していることが分かる．(c) の議論は，$j``\mathrm{On}^{M_0}$ が On^{M_1} で共終な場合には，任意の ZF のモデルに対し，かなり一般的な条件のもとで成り立つ；Gaifman [74] では，その多くの場合が，ここでのものとは別の定式化を用いたアプローチにより示されている．

以降では，(c) を念頭に置きながら，もっと一般的な状況を想定して：

推移的なクラス $\in$-構造の間の**初等的埋め込み**とは Σ_1-初等的埋め込みのこととする．

また，自明な場合をさけるために，暗に

初等的埋め込みは，その定義域上で恒等写像とならないことを仮定する．

5.1(b) でのような最小の順序数は，決定的な役割を果たす：任意の $j\colon N \to M$ に対し，

δ が j の**臨界点**である $(\delta = \mathrm{crit}(j))$ とは，δ が j によって動かされる最小の順序数であることとする．

多くの場合，初等的埋め込みは厳密でないやりかたでとり扱われ，ZFC での定式化の可能性については，それが特に問題となりそうな場合のみ注意する．これは，真のクラスの初等的埋め込みを量化するときにもそうである．しかし，個々の場合において，見かけ上の量化は，つねに集合を走る量化子で置き換えられる．定式化の可能性は大概の場合，理論の展開の副産物として得られることになるが，初等的埋め込みによる定式化は多くの場合，特に強い仮説の場合において，他の定式化に比べて，理解しやすいものとなる．

次に，集合 S 上の超フィルター U によるユニヴァース V の超積の構成について考える．一般的な超積の構成については既に§0 で復習し，§4 で応用した．V の超巾を定義するときの最初の難関は任意の $f\colon S \to V$ に対し，その U に関する同値類

$$(f)_U = \{g \mid g\colon S \to V \ \wedge\ \{i \in S \mid f(i) = g(i)\} \in U\}$$

が真のクラスになってしまうことである．しかしながら，Scott [55] の手法を用いて，

$$(f)_U^0 = \{g \mid g \in (f)_U \wedge \forall h(h \in (f)_U \to \ \mathrm{rank}(g) \leq \mathrm{rank}(h))\}$$

つまり，$(f)_U$ の元のうち最小のランクをもつものの全体をとることで，これを回避することができる．このとき $(f)_U^0$ は集合となるから，超巾の領域は，U から定義可能なクラス

$${}^S V/U = \{(f)_U^0 \mid f\colon S \to V\}$$

で定式化することができて，予想されるように，要素関係 E_U を，

$$(f)^0_U \ E_U \ (g)^0_U \quad \Leftrightarrow \quad \{i \in S \mid f(i) \in g(i)\} \in U$$

で定義する．ここで，超巾は，

$$\mathrm{Ult}(V, U) = \langle {}^S V/U, E_U \rangle$$

と定義される．より一般的には，N が ZFC の内部モデルで，$\langle N, \in, U \rangle \models$「$U$ は集合 S 上の超フィルター」となっているとき，類似の手続きにより，関数のクラス ${}^S N \cap N$ を用いることにより，N の U による超巾が次のように得られる：

$$\mathrm{Ult}(N, U) = \langle {}^S N/U, E_U \rangle \, .$$

$U \in N$ を仮定する必要はない．V による構成の議論を続けることにして，論理式の複雑さに関する帰納法により，ここで必要なウォッシュの基本定理の変形が得られる：

5.2 定理　$\mathcal{L}_\in$ の論理式 $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ と関数 $f_1, \ldots, f_n \colon S \to V$ に対し，

$$\mathrm{Ult}(V, U) \models \varphi[(f_1)^0_U, \ldots, (f_n)^0_U] \quad \Leftrightarrow \quad \{i \in S \mid \varphi[f_1(i), \ldots, f_n(i)]\} \in U$$

が成り立つ． ⊣

これは，真のクラスでの充足関係に依存するから，ZFC の単一の定理として書き下すことはできず，各々の φ に対する定理の図式として，定式化されている．

ここで，U に対する強い仮説のもとで，超巾に対応する内部モデルを得ることができる：

5.3 命題　U が ω_1-完備であることと，E_U が整順的であることは同値である．

証明　順方向は，列 $\langle (f_n)^0_U \mid n \in \omega \rangle$ で $(f_{n+1})^0_U \ E_U \ (f_n)^0_U$ が各 $n \in \omega$ に対し成り立つようなものがあるとすると，$\bigcap_n \{i \in S \mid f_{n+1}(i) \in f_n(i)\} \neq \emptyset$ となるから，$\in$ に関する無限降下列がとれてしまい矛盾である．

逆に，$\{X_n \mid n \in \omega\} \subseteq U$ だが，$\bigcap_{n \in \omega} X_n \notin U$ となるようなものがあったとして，各 $k \in \omega$ に対し，$g_k \colon S \to V$ を

$$g_k(i) = \begin{cases} n - k & i \in (\bigcap_{m<n} X_m) - X_n \text{ で } n \geq k \text{ のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

として定義する．このとき，すべての $k \in \omega$ に対し，$\{i \in S \mid g_{k+1}(i) \in g_k(i)\} \supseteq \bigcap_{m \leq k} X_m - \bigcap_{n \in \omega} X_n \in U$ となるから，$\langle (g_n)^0_U \mid n \in \omega \rangle$ により E_U が整順的でないことが分かる． ⊣

崩壊の補題0.4との関連では，E_U が集合的になっていることに注意しておく：$(g)^0_U \ E_U \ (f)^0_U$ として $g_0 \in (g)^0_U$ とする．$g_1 \colon S \to V$ を

$$g_1(i) = \begin{cases} g_0(i) & g_0(i) \in f(i) \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

として定義する．このとき $g_1 \in (g)^0_U$ で $\mathrm{rank}(g_1) \le \mathrm{rank}(f)$ となる．したがって，$\mathrm{rank}((g)^0_U) \le \mathrm{rank}(f)+1$ となり，$\{(g)^0_U \mid (g)^0_U \ E_U \ (f)^0_U\} \subseteq V_{\mathrm{rank}(f)+2}$ が分かるから，これは集合である．

したがって，U が ω_1-完備なら 5.3 と 0.4 により，推移的なクラス M_U と同型写像

$$\pi_U \colon \mathrm{Ult}(V,U) \to \langle M_U, \in \rangle$$

が存在する．Łośの定理 5.2 により，M_U が ZFC の内部モデルとなることは直ちに分かる．以降では，$f\colon S \to V$ に対し

$$[f]_U = \pi_U((f)^0_U)$$

という書き方をして，f が内部モデル M_U での集合 $[f]_U$ を代表するものとなっていることを強調することにする．このような f は，ある U の元 $X \subseteq S$ 上で定義されていれば十分であるが，この事実は以降断りなく度々用いる．最後に，任意の集合 x に対し，f_x を定値関数 $S \to \{x\}$ とする．このとき $x \in V$ に対し，

$$j_U(x) = [f_x]_U$$

とすれば，5.2 により，$j_U \colon V \prec M_U$ となる．これは，超巾への標準的な埋め込みを，この超巾の推移的崩壊で調節したものとなっている．この状況をまとめて，

$$j_U \colon V \prec M_U \cong \mathrm{Ult}(V,U)\ .$$

と表現することにする．もっと一般的には，N が ZFC の内部モデルであるとき，$\langle N, \in, U\rangle \models$「$U$ は集合 S 上の超フィルター」として，U が（V で）ω_1-完備なら，${}^S N \cap N$ の元となっている関数を用いて，類似の手続きにより

$$j_U \colon N \prec M_U \cong \mathrm{Ult}(N,U)$$

を得ることができる．ここでも $U \in N$ を仮定する必要はない．添数 U は通常それが文脈から明らかなときには，落して書くことにする．

これらの予備知識を用いると，可測基数について次のような議論が展開できるようになる：

5.4 命題 κ を可測基数として，U を κ 上の κ-完備な超フィルターとし，$j\colon V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V,U)$ を対応する埋め込みとする．このとき，$\mathrm{crit}(j) = \kappa$ である．

証明 まず，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$j(\alpha) = \alpha$ となることを見よう：そうでないとして，$\alpha < \kappa$ を $j(\alpha) > \alpha$ となるような最小のものとする．$[f] = \alpha$ とすると $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) < \alpha\} \in U$ となるから，κ-完備性により，$\beta < \alpha$ で $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) = \beta\} \in U$ となるものがある．ところが，このとき $[f]_U = j(\beta) = \beta$ となり矛盾である．

つぎに，U の κ-完備性から，U は κ の有界な部分集合は含まない．したがって $\mathrm{id} : \kappa \to \kappa$ を κ 上の恒等写像として，任意の $\alpha < \kappa$ に対し，$\{\xi \mid \alpha < \xi < \kappa\} \in U$ から，$\alpha = j(\alpha) < [\mathrm{id}] < j(\kappa)$ となる．したがって，$\kappa \le [\mathrm{id}] < j(\kappa)$ となり，$\kappa = \mathrm{crit}(j)$ が示せた． ⊣

ハンフ=タルスキーの結果に基づく Keisler [62] の超積による証明を用いた，スコットのもとの論法は次のようなものである．

5.5 系 (Scott [61]). 可測基数が存在するなら，$V \neq L$ である．

証明 κ を最小の可測基数として，これに 5.4 を適用する．$V = L$ だったとすると，初等的埋め込みにより，M は選択公理を満す内部モデルとなっている．したがって，$M = L$ である．ところが，やはり初等的埋め込みであることから，$(j(\kappa)$ は最小の可測基数$)^M$ が成り立つ．$j(\kappa) > \kappa$ だから，これは矛盾である． ⊣

次の結果は 5.4 の逆であるが，これはもともとは局所的な形で考察されていた．

5.6 定理 (Keisler [62a]). ある内部モデル M に対し，初等的埋め込み $j\colon V \prec M$ が存在すればその臨界点は可測基数である．

証明 $\delta = \mathrm{crit}(j)$ とする．ω より小さいか等しい順序数は，すべて定義可能で j は初等的だから，$\delta > \omega$ となる．ここで U を

$$X \in U \iff X \subseteq \delta \wedge \delta \in j(X)$$

と定義する．U が δ 上の（非単項な）δ-完備超フィルターであることが示せればよい（特にこのことから δ が正則で，したがって基数となることが分かる）．まず最初に，$\delta \in U$ だが，$\alpha < \delta$ なら $j(\{\alpha\}) = \{\alpha\}$ だから，$\{\alpha\} \notin U$ となることに注意する．U が超フィルターであることは，素直な議論で示せる．最後に，δ-完備性を示すために，$\gamma < \delta$ として，$\mathcal{X} \in {}^{\gamma}U$ とする．このとき，$\delta \in \bigcap\{j(\mathcal{X}(\alpha)) \mid \alpha < \gamma\}$ となる．ところが，$\alpha \leq \gamma$ に対し，$j(\alpha) = \alpha$ だから，$j(\mathcal{X})$ は，定義域 γ を持つ関数で，すべての $\alpha < \gamma$ に対し，$j(\mathcal{X})(\alpha) = j(\mathcal{X}(\alpha))$ となっている．したがって，

$$j(\bigcap\{\mathcal{X}(\alpha) \mid \alpha < \gamma\}) = \bigcap\{j(\mathcal{X})(\alpha) \mid \alpha < \gamma\} = \bigcap\{j(\mathcal{X}(\alpha)) \mid \alpha < \gamma\}$$

となり，$\bigcap\{\chi(\alpha) \mid \alpha < \gamma\} \in U$ が分かる． ⊣

クラス j を走る量化子 $\exists j$ は ZFC で定式化できないので，5.6 は，各々の j に対する定理をまとめた図式と見なければならない．あるいは，V に対して記述されているものを $\alpha > \mathrm{crit}(j)$ となる α に対する V_α で置き換えたものとして定式化することも可能だが，キースラーのアプローチは，これであった．いずれにしても，可測基数が存在するのは，ユニヴァースの（始片の）自明でない初等的埋め込みの存在するちょうどそのときに限る．このことから，集合論の整順的なモデルの研究を，内部モデルや強制法による拡張の制約の外に押し進め，初等的埋め込みの理解を深めようとするとき，可測基数は本質的に不可欠なものとなることが分かる．

5.6 の証明は，初等的埋め込みの臨界点を超フィルターの生成手段として用いる手法を示すものとなっているが，ここで得られる超フィルターは超巾を惹き起し，これにより新たに初等的埋め込みが得られる．すべての初等的埋め込みが超巾への埋め込みにより得られるわけではない（これは後の節で明らかになる）．他方，超巾に注目することは，具体

的な構造を調べられるためより多くの情報が得られる，という意味での意義がある：

5.7 命題 U を $\kappa > \omega$ 上の κ-完備な超フィルターとして $j\colon V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V, U)$ を対応する埋め込みとする．このとき：

(a) すべての $x \in V_\kappa$ に対し，$j(x) = x$ が成り立ち，したがって，$V_\kappa^M = V_\kappa$ となる．すべての $X \subseteq V_\kappa$ に対し，$j(X) \cap V_\kappa = X$ となるから，$V_{\kappa+1}^M = V_{\kappa+1}$ で $\kappa^{+M} = \kappa^+$ である．

(b) $2^\kappa \leq (2^\kappa)^M < j(\kappa) < (2^\kappa)^+$ が成り立つ．

(c) θ が κ と異なる共終数を持つ強極限なら，$j(\theta) = \theta$ となる．

(d) ${}^\kappa M \subseteq M$ だが，${}^{\kappa^+}M \not\subseteq M$ である．つまり，M は任意の κ-列をとることに関して閉じているが，κ^+-列をとることに関しては閉じていない．

(e) $U \notin M$ である．

証明 (a) 最初の主張は，5.4 と，4.1(b) でのランクに関する議論から導ける．残りは順に示すことができる，特に，$\kappa^{+M} = \kappa^+$ は，κ 上の整列順序がすべて M に含まれることから示せる．

(b) (a) により，$\mathcal{P}(\kappa)^M = \mathcal{P}(\kappa)$ で，$M \subseteq V$ だから，$2^\kappa \leq (2^\kappa)^M$ となる．$j(\kappa)$ は M で到達不可能だから，$(2^\kappa)^M < j(\kappa)$ である．また，$j(\kappa) = \{[f] \mid f \in {}^\kappa\kappa\}$ だから，$j(\kappa) < (2^\kappa)^+$ が分かる．

(c) $\theta > \kappa$ について示せば十分である．$[f] < j(\theta)$ として，$[f] < \theta$ を示す：すべての $\xi < \theta$ に対し，$f(\xi) < \theta$ となっているとしてよいから，$\mathrm{cf}(\theta) \neq \kappa$ により，ある $\alpha < \theta$ で $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) \leq \alpha\} \in U$ となるものがある：$\mathrm{cf}(\theta) < \kappa$ なら，これは κ-完備性から得ることができ，$\mathrm{cf}(\theta) > \kappa$ なら，$\alpha = \sup(\mathrm{ran}(f))$ ととればよい．したがって，θ が強極限であることから，

$$[f] \leq j(\alpha) = \{[g] \mid g \in {}^\kappa\alpha\} < \theta$$

となる．

(d) $\{[f_\alpha] \mid \alpha < \kappa\} \subseteq M$ とする．$g\colon \kappa \to V$ で $[g] = \langle [f_\alpha] \mid \alpha < \kappa \rangle$ となるものが見つかればよい．$h\colon \kappa \to \kappa$ を $[h] = \kappa$ となるようにとる．各 $\xi < \kappa$ に対し，$g(\xi)$ を，$h(\xi)$ を定義域として持つ関数で，$(g(\xi))(\alpha) = f_\alpha(\xi)$ を満すものとする．このときŁośの定理 5.2 により，$[g]$ は定義域 $[h] = \kappa$ を持つ関数となり，各 $\alpha < \kappa$ に対し，$[g](\alpha) = [f_\alpha]$ が成り立つ．

二番目の主張は，$j``\kappa^+ \notin M$ を示すことで証明できる：$[f] < j(\kappa^+)$ なら，$f(\xi) < \kappa^+$ がすべての $\xi < \kappa$ で成り立つとしてよいが，$\alpha = \sup(\mathrm{ran}(f)) < \kappa^+$ をとれば，$[f] < j(\alpha)$ となる，したがって，$j``\kappa^+$ は $j(\kappa^+)$ で共終である．ところが $j``\kappa^+$ は順序型 $\kappa^+$ をもつから，(b) により，これは $j(\kappa^+)$ より小さい．したがって $j``\kappa^+ \in M$ だったとすると，これは $M \models$「$j(\kappa^+)$ は正則」に矛盾する．

(e) (d) により，${}^\kappa\kappa = ({}^\kappa\kappa)^M \in M$ である．もし $U \in M$ だったとすると，$f \in {}^\kappa\kappa$ を $[f]$ に移す写像も M の元となる．ところが，このことから，(b) でと同じ議論を M で行うことにより，$j(\kappa) < (2^\kappa)^{+M}$ が示せるが，これは $j(\kappa)$ が M で到達不可能であることに矛盾する． ⊣

(c) で重要な点は，定義可能な真のクラスで，j で動かないものがあるということである．(b) または (e) により，$M \neq V$ となるから，超積による V から V への埋め込みは存在しないことが分かる；実際には，埋め込み $V \prec V$ はどのようなものも存在しない（23.12 を参照）が，この事実は巨大基数の理論全体に対する分水嶺となる．$V^M_{\kappa+1} = V_{\kappa+1}$ は κ が可測であることにより 2^κ の大きさが制約をうける，という驚くべき事実を導く：

5.8 系　(Scott). κ が可測で，$2^\alpha = \alpha^+$ がすべての $\alpha < \kappa$ に対し成り立つなら，$2^\kappa = \kappa^+$ となる．

証明　$j\colon V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V, U)$ を前と同じようにとると，$\kappa < j(\kappa)$ となるから，初等性により，$(2^\kappa)^M = \kappa^{+M}$ である．　⊣

同様に，κ が可測で，$2^\alpha \leq \alpha^{++}$ がすべての $\alpha < \kappa$ に対し成り立っているなら，$2^\kappa \leq \kappa^{++}$ となる，等々．実は，可測基数 κ で $2^\kappa > \kappa^+$ の成り立つようなものを得るためには，強い仮定が必要であり，このようなものの可能性の研究は新しい種類の強制法を用いた重要な手法の発展をうながすことになる（第 II 巻を参照）．

チェコの数学者ヴォピェンカ Petr Vopěnka [62] は，スコットとは独立に，$j(\kappa)$ が M で到達不可能であることに起因する，5.7(b) でのような V と M とでの基数算術の相違から，5.5 の結果を得ている．ヴォピェンカと彼の学生のヘルバチェク Karel Hrbáček は，§3 で定義した内部モデル $L(A)$ に対するスコットの結果の大域的な一般化を確立した：

5.9 定理　(Vopěnka-Hrbáček [66]). 強コンパクト基数が存在すれば，任意の集合 A に対し $V \neq L(A)$ である．

証明　κ を強コンパクトとする．ある集合 A に対し，$V = L(A)$ だったとして矛盾を導く．A は推移的としてよい．$\lambda = \max(\{\kappa, |A|\})^+$ とする．4.1 により，κ-完備なフィルター $\{\{\xi \mid \alpha \leq \xi < \lambda\} \mid \alpha < \lambda\}$ は λ 上の κ-完備な超フィルター U に拡張することができる．前と同じように，

$$j\colon V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V, U)$$

とする．$M = \{[f] \mid f\colon \lambda \to V\}$ である．

ここで，$\mathrm{Ult}^-(V, U)$ を $\mathrm{Ult}(V, U)$ の部分構造で，その領域は，$|\mathrm{ran}(f)| < \lambda$ となるような関数 $f\colon \lambda \to V$ の同値類の全体からなるようなものとする．Łoś の定理は $\mathrm{Ult}^-(V, U)$ に対しても成り立つ：帰納法の証明での存在量化子に対するステップでは，

$$\{\alpha < \lambda \mid \exists v_{n+1} \varphi[f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)]\} \in U$$

で，各 i に対し $|\mathrm{ran}(f_i)| < \lambda$ となっているなら，n-組 $\langle f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)\rangle$ でここに現れるものは λ より少なく，したがって $g\colon \lambda \to V$ で，$|\mathrm{ran}(g)| < \lambda$, かつ，

$$\{\alpha < \lambda \mid \varphi[f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha), g(\alpha)]\} \in U$$

となるものがあることに注意すればよい．

$\mathrm{Ult}^-(V, U)$ は整順的だから，N をこれの推移的崩壊として，

$$k\colon V \prec N \cong \mathrm{Ult}^-(V, U)$$

とする．$|\mathrm{ran}(f)| < \lambda$ となる $f: \lambda \to V$ に対し，$[f]^-$ で，$\mathrm{Ult}^-(V, U)$ での f の同値類に対応する N の元を表すことにする．次に，$i: N \to M$ を $i([f]^-) = [f]$ で定義する；この定義が $[f]^-$ の代表元 f に依存しないことは容易に確かめられる．このとき，

(i) i は初等的埋め込みで $j = i \circ k$ が成り立つ．

(ii) すべての $\alpha < k(\lambda)$ に対し，$i(\alpha) = \alpha$ となる．また $i(k(A)) = k(A)$ である．

(iii) $k(\lambda) = \sup(\{k(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}) \leq [\mathrm{id}] < j(\lambda)$ となる．ここに，$\mathrm{id}: \lambda \to \lambda$ は λ 上の恒等写像である．

(ii) については，実際にはさらに，$\in$ に関する帰納法により，$\mathrm{ran}(f)$ の推移的閉包の濃度が λ より小さいような f について，$[f]^- = [f]$ が示せる．(iii) については，等式は，$\{\xi < \lambda \mid g(\xi) < \lambda\} \in U$ で $|\mathrm{ran}(g)| < \lambda$ なら，λ の正則性から，$\{\xi < \lambda \mid g(\xi) < \alpha\} \in U$ がある $\alpha < \lambda$ に対して成り立つことに留意すればよい．残りは，5.4 と同様にして導ける．

ここで以下のようにして矛盾を導ける：V は A から定義可能なクラス $L(A)$ で，k は初等的だから，N は $k(A)$ から定義可能なクラス $L(k(A))^N$ となる．したがって 3.2(a) により，$N = L(k(A))^N = L(k(A))$ である．同様に，i は初等的で，$i(k(A)) = k(A)$ だから，$M = L(k(A)) = N$ となる．さて，λ は非極限基数だから，例えば，λ_0 の直後であるとする．このとき，M では $j(\lambda)$ が $j(\lambda_0)$ の直後となり，N では $k(\lambda)$ が $k(\lambda_0)$ の直後となる．ところが，(ii) により，$k(\lambda_0) = i(k(\lambda_0)) = j(\lambda_0)$ となるから，$M = N$ により，$k(\lambda) = j(\lambda)$ となる．しかし，これは (iii) に矛盾である．⊣

正規性

スコットは，超巾の構成法から，より多くの情報 —— 特に可測基数での反映の現象に関する情報 —— を得るための手法を開発した．彼が抽出した鍵となる概念は，フィルターに関して組合せ論的に記述できるものであった．λ 上のフィルター F に対し，

> F が**正規**とは，任意の $\langle X_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle \in {}^\lambda F$ に対し，この対角共通部分 $\triangle_{\alpha<\lambda} X_\alpha = \{\xi < \lambda \mid \xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} X_\alpha\}$ が再び F の元となることである．

基数 λ 上のフィルターは，§0 でのとり決めにより，すべての $\alpha < \lambda$ に対し終片 $\{\xi \mid \alpha \leq \xi < \lambda\}$ を含むのであった．十分に大きな α に対しては $X_\alpha = \lambda$ とおくことにより，**正規性は λ-完備性を包含する**ことが分かる．また $\langle \{m \in \omega \mid n+1 < m\} \mid n \in \omega \rangle$ の対角共通部分は空となるから，**λ 上に正規フィルターが存在するなら，λ は正則かつ非可算である**．このような λ に対し，閉非有界フィルター $\mathcal{C}_\lambda$ は正規である（0.1(b) を参照）．非有界集合の対角共通部分は Oswald Veblen [08] ではじめて考察されている．ただし，ここで考察されているのは，$0 < \alpha < \lambda$ に対し，$\xi \in C_\alpha \iff$ すべての $\beta < \alpha$ に対して ξ は C_β の極限点，として定義される $\langle C_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle$ に対する特殊な場合のみであった．フォドァFodor の退行的関数の補題 0.1(c) が双対な記述であることは，正規フィルターに関する一般的かつ重要な事実としてすぐに認識されている．集合 S 上のフィルター F と $X \subseteq S$ に対し，X が **F-定常**であるとは，$X \cap Z \neq \emptyset$ がすべての $Z \in F$ に対し成り立つ

ことをいう．

5.10 演習　λ 上のフィルター F が正規となるのは，すべての F-定常な X と退行的関数 $f: X \to \lambda$ に対し，$\alpha < \lambda$ で，$f^{-1}(\{\alpha\})$ が F-定常となるようなものが存在する，ちょうどそのときである．

ヒント　順方向は，もしすべての $\alpha < \kappa$ に対し $f^{-1}(\{\alpha\})$ が F-定常でないとすれば，$\lambda - f^{-1}(\{\alpha\}) \in F$ となるが，$X \cap \triangle_{\alpha<\lambda}(\lambda - f^{-1}(\{\alpha\})) = \emptyset$ である．

逆に，$\langle X_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle \in {}^\lambda F$ だが，$\triangle_{\alpha<\lambda} X_\alpha \notin F$ とすると，$\lambda - \triangle_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ は F-定常となる．この集合上の関数 f を，$f(\xi) = \ulcorner \xi \notin X_\alpha$ となる最小の $\alpha \urcorner$, と定義する．このとき f は退行的となるが，すべての $\alpha < \lambda$ に対し，$f^{-1}(\{\alpha\}) \cap X_\alpha = \emptyset$ である．　⊣

このことから **λ 上の任意の正規フィルターは $\mathcal{C}_\lambda$ を拡張する**，ことが分かる．C が λ で閉非有界とすると，$\xi \notin C \cup \{0\}$ ならつねに $f(\xi) = \sup(C \cap \xi) < \xi$ となるが，どの $\alpha < \lambda$ に対しても，$\{\xi \mid f(\xi) = \alpha\}$ は λ の有界な部分集合となるからである．

可測基数と超フィルターに関する最初の結果 5.4 では，恒等写像 id: $\kappa \to \kappa$ が便宜的に用いられていた．スコットはこれにスポットをあてることで，重要な結果が導けることに気付いた：

5.11 演習　(Scott – Keisler-Tarski [64: 244])．$\kappa > \omega$ 上の κ-完備な超フィルター U に対し，次は同値である：

(a) U は正規である．

(b) $f \in {}^\kappa\kappa$ で $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) < \xi\} \in U$ なら，$\alpha < \kappa$ で $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) = \alpha\} \in U$ となるものが存在する．

(c) $[\mathrm{id}]_U = \kappa$ である．ここに，id: $\kappa \to \kappa$ は κ 上の恒等写像である．

ヒント　(a) と (b) の同値性は，5.10 を用いて示せる．　⊣

5.12 演習　(Scott – Keisler-Tarski [64: 241])．κ が可測なら，κ 上の正規フィルターが存在する．

ヒント　U を κ 上の任意の κ-完備な超フィルターとして，$f \in {}^\kappa\kappa$ を $[f]_U = \kappa$ を満すものとする．このとき，

$$\{X \subseteq \kappa \mid f^{-1}(X) \in U\}$$

は κ 上の正規超フィルターとなる．　⊣

このように，κ-完備な超フィルターは射影をとることで容易に“正規化”できる．5.6の証明で，初等的埋め込みから，超フィルターを定義する標準的な方法が与えられていたが，**5.6の証明で定義された超フィルターは正規である**ことは容易に確かめられる．正規性からは，対応する超フィルターの簡単だが内容のあるいくつかの性質が帰結される．これらの性質は後に続く研究結果を予告するものとなっている：

5.13 命題　U を κ 上の正規超フィルターとする．このとき：

(a) $M_U = \{j_U(f)(\kappa) \mid f: \kappa \to V\}$ となる．

(b) U が，5.6 でのように，臨界点 κ を持つ $j\colon V \prec M$ から定義されているとき，初等的埋め込み $k\colon M_U \prec M$ で，$k \circ j_U = j$ となるものが存在する．さらに，もし，ある κ 上の正規超フィルター N から $j = j_N$ となるなら，$U = N$ で，したがって，k は恒等写像となる．

証明 (a) $x \in M_U$ なら，ある $f\colon \kappa \to V$ に対し $x = [f]_U$ となる．ところが，5.11(c) により，$j_U(f)(\kappa) = j_U(f)([\mathrm{id}]_U) = [f]_U$ が成り立つ —— 最後の等式は，$\{\xi < \kappa \mid f(\xi) = f(\xi)\} \in U$ の分裂症的な翻訳にすぎない．

(b) $k\colon M_U \to M$ を $k([f]_U) = j(f)(\kappa)$ で定義する．U の定義により，任意の論理式 $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ に対し，

$$\begin{aligned} M_U \models \varphi[[f_1]_U, \ldots, [f_n]_U] &\Leftrightarrow \{\xi < \kappa \mid \varphi[f_1(\xi), \ldots, f_n(\xi)]\} \in U \\ &\Leftrightarrow M \models \varphi[j(f_1)(\kappa), \ldots, j(f_n)(\kappa)] \end{aligned}$$

となるから，k は初等的となり，$k \circ j_U = j$ も明らかである．κ 上の正規超フィルター N に対し $j = j_N$ なら，すべての $X \subseteq \kappa$ に対し，

$$X \in U \Leftrightarrow \kappa \in j_N(X) \Leftrightarrow \{\xi < \kappa \mid \xi \in X\} = X \in N$$

が N の正規性から成り立つ． ⊣

(a) は M_U が極小な情報 $\{j_U(f) \mid f\colon \kappa \to V\} \cup \{\kappa\}$ の閉包となっていることを示しており，(b) は M_U が初等的埋め込みで得られる内部モデルのうちで，自然な意味で極小になることを示している．別の角度から見ると $[\mathrm{id}]_U = \kappa$ は病的とも言える U に関する帰結を導くものとなっているから，"正規" という用語は誤った印象を与えるようにも思える．例えば，5.7(a) により，$V_{\kappa+1} \subseteq M_U$ となるから，$M_U \models$ ⌜$\kappa = [\mathrm{id}]_U$ は到達不可能⌝，となる．したがって，疎であるはずの集合 $\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ は到達不可能 $\}$ が，直観的には大きな集合からなるはずの超フィルター U の元になってしまう．さらに，Keisler-Tarski [64] では，弱コンパクト基数のモデルとして見たとき，正規超フィルターがマーロの演算 $M(X) = \{\alpha \in X \mid X \cap \alpha$ は α で定常 $\}$ に関して閉じたものとなることが，示されている．ここでは，モデル理論的な議論による短い証明を与える；もともとの証明は後にソロヴェイによりもっと一般的な枠組で適用されることになる (16.8(c))．

5.14 命題 (Keisler-Tarski [64: 248])．U を κ 上の正規超フィルターとする．$S \subseteq \kappa$ が κ で定常なら，

$$\{\alpha < \kappa \mid S \cap \alpha \text{ は } \alpha \text{ で定常 }\} \in U$$

となる．したがって，$X \in U$ なら，$M(X) \in U$ が成り立つ．

証明 5.7(a) により $j_U(S) \cap \kappa = S$ だから，$j_U(S) \cap \kappa$ は M_U において κ で定常である．$[\mathrm{id}]_U = \kappa$ だから，$\{\alpha < \kappa \mid S \cap \alpha$ は α で定常 $\} \in U$ となる．正規超フィルターはすべての閉非有界な集合を含み，したがってすべての $X \in U$ は定常になることから，2 番目の主張が導かれる． ⊣

反映の原理の議論をさらに用いると，次のことも言える：

5.15 命題　U を κ 上の正規超フィルターとするとき，

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ は弱コンパクト}\} \in U$$

となる．

証明　κ が M_U で弱コンパクトであることが示せればよい．弱コンパクト性は拡張の性質4.5で特徴付けられ，κ はこの性質を満たしている．κ が M_U でもこの性質を満すことが示せればよい．ところが，$R \subseteq V_\kappa$ とすれば，レーベンハイム・スコーレムの定理0.5により，推移的な $X \neq V_\kappa$ と $S \subseteq X$ で $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \prec \langle X, \in, S\rangle$ となるものが存在することと，このようなもので $|X| = \kappa$ となるものが存在することは同値となる．したがって，このような構造 $\langle X, \in, S\rangle$ で V_κ の部分集合にコードされたものが存在する．これに対応する充足関係も，V_κ の部分集合にコードすることができる．ところが，$V_{\kappa+1} \subseteq M_U$ だから，証明が完了する．　⊣

したがって，可測基数 κ の弱コンパクト性は反映することが分かり，κ は κ 番目の弱コンパクト基数となる．これはハンフとスコットにより最初に確立されている (6.5)．予想されるように，このような反映の原理にも限界がある：

5.16 命題　(Solovay)．任意の可測基数 κ に対し，κ 上の超フィルター U で，

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ は可測基数ではない}\} \in U$$

となるようなものが存在する．

証明　帰納法で証明する．κ を可測として，κ より小さい可測基数については命題が成り立っているとする．U を κ 上の正規超フィルターとし，$A = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ は可測}\}$ とおく．もし $A \notin U$ なら，証明は完了する．そうでなければ，帰納法の仮定により，各 $\alpha \in A$ に対し，α 上の正規超フィルター U_α を $A \cap \alpha \notin U_\alpha$ となるようにとる．W を

$$X \in W \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq \kappa \ \wedge \ \{\alpha \in A \mid X \cap \alpha \ \in U_\alpha\} \in U$$

と定義すると，W が κ 上の正規超フィルターで $A \notin W$ となることは容易に確かめられる．　⊣

最後に，5.8のスコットによるもとの証明により，そこでの仮定をさらに弱めた，Hanf-Scott [61] で暗に述べられている次の命題が示せる：

5.17 命題　(Scott)．κ 上の正規超フィルター U で，$\{\alpha < \kappa \mid 2^\alpha = \alpha^+\} \in U$ となるものが存在するなら，$2^\kappa = \kappa^+$ が成り立つ．

証明　$[\mathrm{id}]_U = \kappa$ だから，$(2^\kappa)^{M_U} = \kappa^{+M_U}$ となり，5.8でと同様に議論を終えることができる．　⊣

この論法が初めて論文で発表されたのは，Vopěnka [65] においてであったが，そこでは，$\{\alpha < \kappa \mid 2^\alpha \leq \alpha^{++}\} \in U$ なら，$2^\kappa \leq \kappa^{++}$ となる，等々についても注意されている．

正規性を用いることの組合せ論的な側面から，視点は次第に一般化の方向へと移行して

ゆくことになるが，この際に，組合せ論的に細かい議論ができるようになる，というその利点にとどまらず，正規性は，巨大基数内部モデルの構造的な研究全般において，非常に重要な役割を果たすようになる (§§19, 20). 若き日のウラムがルヴォフで見いだした組合せ論の偶発的な結果が，超積と正規性を注ぎこまれてこのような変容を遂げるとは，誰が予想したろう.

§6 記述不可能性

反映の性質の定式化は，集合論で次第に頻繁に活用されるようになってくるモデル理論的なアプローチによる成果の最初の例の一つであった．モンタギュー Richard Montague [55, 61] が反映の現象の研究をおこなって，ZFC は強い意味で有限の公理化を持たないことを示したが，その後に，レヴィ Levy [60a] は反映の現象のより一般的な重要性と，そのマーロの階層との密接な関係を示した．この後，ハンフとスコット Hanf-Scott [61] は構造 $\langle V_\kappa, \in, R\rangle$ （ただし $R \subseteq V_\kappa$）に対する高階の言語における反映の原理の仮定を考察して，無限の長さを持つ論理式ではなく，むしろ，このような高階の論理の方向への一般化が，巨大基数の大きさの比較に関する統一的なアプローチを可能にし，さらに，弱コンパクト性の特徴付けも与えることを示した．この理論は，Levy [71] でさらに精密化され，1970 年代には，認容集合と帰納的定義の理論で，この理論の類推による重要な結果が得られることになる.

まずレヴィによって得られた事実がこれらの展開の基石となった．次の補題は，閉非有界集合の現代における重要性を示しているが，これはモデル理論の技法を用いることで明確になったものである：

6.1 補題 κ を到達不可能として $R \subseteq V_\kappa$ とする．このとき，

$$\{\alpha < \kappa \mid \langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R\rangle\}$$

は κ で閉非有界となる.

証明 この集合が閉じていることは明らかである．これが非有界であることを示すために，$\alpha < \kappa$ を任意にとる．$\alpha_n < \kappa$ を $n \in \omega$ に対し帰納的に次のようにとる：$\alpha_0 = \alpha$ とする．$\alpha_n < \kappa$ が得られたとき α_{n+1} を，任意の $y_1, \ldots, y_k \in V_{\alpha_n}$ に対し $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \exists v_0 \varphi[y_1, \ldots, y_k]$ がある論理式 φ に対し成り立つなら，$x \in V_\beta$ で $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi[x, y_1, \ldots, y_k]$ となるようなものの存在するような最小の $\beta \geq \alpha_n$ とする．κ は到達不可能だから，$|V_{\alpha_n}| < \kappa$ となり，$\alpha_{n+1} < \kappa$ である．ここで $\alpha = \sup(\{\alpha_n \mid n \in \omega\})$ とすると，通例の（タルスキーの）初等的部分構造の判定条件により，$\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R\rangle$ が成り立つことが示せる. ⊣

次の補題の最初の命題は，1.3 を思い出させるが，実際これは 1.3 をさらに一般化したものとなっている.

6.2 命題 (Levy [60a]).

(a) κ が到達不可能基数となるのは，任意の $R \subseteq V_\kappa$ に対し，$\alpha < \kappa$ で $\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha \rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R \rangle$ となるものが存在する，ちょうどそのときである．

(b) κ がマーロ基数となるのは，任意の $R \subseteq V_\kappa$ に対し，到達不可能基数 $\alpha < \kappa$ で $\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha \rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R \rangle$ となるものが存在する，ちょうどそのときである．

証明　順方向は両方とも 6.1 から直ちに導ける．逆方向の証明では，$\kappa > \omega$ は容易に示せる．まず κ は正則となることに注意する：もしそうでなければ，$\beta < \kappa$ と関数 $F\colon \beta \to \kappa$ で値域が κ で非有界となるものが存在する．$R = \{\beta\} \cup F$ とおくと，仮定から，$\alpha < \kappa$ で $\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha \rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R \rangle$ となるものが存在する．β は R に含まれる唯一の順序数だから，初等性から，$\beta \in V_\alpha$ となるが，$F \cap V_\alpha$ の定義域は β の全体ではあり得ないから，これは矛盾である．

次に，κ は強極限であることを示す：もしそうでないとすると，$\lambda < \kappa$ で $2^\lambda \geq \kappa$ となるものがとれる．$G\colon \mathcal{P}(\lambda) \to \kappa$ を上射として，$R = \{\lambda + 1\} \cup G$ とする．仮定により，$\alpha < \kappa$ で，$\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha \rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R \rangle$ となるものが存在する．$\lambda + 1 \in V_\alpha$ だから，$\mathcal{P}(\lambda) \in V_\alpha$ となるが，これから前と同様にして矛盾が導かれる．

最後に (b) で κ がマーロ基数となることを示す：そうでないとすると，κ で閉非有界な C で到達不可能基数を全く含まないものが存在する．(b) での仮定から，到達不可能な $\alpha < \kappa$ で，$\langle V_\alpha, \in, C \cap V_\alpha \rangle \prec \langle V_\kappa, \in, C \rangle$ となるものが存在する．初等性から，$C \cap \alpha$ は α で非有界となる．ところが，このことから $\alpha \in C$ となり，矛盾である．　$\dashv$

モンタギュー Montague [61] とレヴィLevy [60a] による ZF での**反映の原理**により，任意の論理式 $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ と β に対し，極限順序数 $\alpha > \beta$ で，すべての $x_1, \ldots, x_n \in V_\alpha$，に対し，

$$\varphi[x_1, \ldots, x_n] \;\Leftrightarrow\; \varphi^{V_\alpha}[x_1, \ldots, x_n]$$

となるものが存在する．この原理は，すでにゲーデルの 1946 年の覚え書きに暗に述べられている（Gödel [90: 146] を参照）．さらにクラス R をその定義を介してとりこみ，V_κ の代わりに V を用いて 6.2(a) の後半と似た定式化にすることも可能であるが，決定的な違いは，この反映の原理が適用できるのは，1 つの論理式だけである，という点である．実際，真理の定義不可能性により，ZF の内部では形式的体系の算術化は完結されないので，$V_\alpha \prec V$ となる α を見つけることはできない．また，6.2(a) では**任意の** $R \subseteq V_\kappa$ を用いることが許されているが，このことが，2 階の論理で必要となる表現力を与えることになる（1.3 とその前の議論を参照）．

レヴィは Levy [60a: 234] で，反映の原理は，無限の公理と置換の公理の図式をあわせたものと，他の ZF の公理のもとで同値になることを示している．この原理がある V_κ で任意の $R \subseteq V_\kappa$ と共に成り立つためには，6.2(a) の証明から分かるように κ の到達不可能性が必要になる．次に，V から，到達不可能な α に対する V_α への反映の原理を考えてみると，これがある V_κ の内側で任意の $R \subseteq V_\kappa$ に対し成り立つためには，6.2(b) の証明により，κ のマーロ性が必要となる，等々．これは反映の原理の反映の原理である：反映の図式がまず定式化され，次にこれがまた反映されるからである．このようにしてレヴィは α-マーロ基数に対応する集合論の理論の階層を研究して，反映の原理の繰り返しによる定式

化が半世紀も前に定式化されたマーロによる図式を説明することを示した.

ハンフとスコットによる，高階の言語を用いた定式化が，この節での主要な話題となる. $m, n \in \omega$ に対する Π^m_n 論理式や Σ^m_n 論理式については§0で述べた. Q を Π^m_n あるいは Σ^m_n とするとき,

> κ が **Q-記述不可能**とは，任意の $R \subseteq V_\kappa$ と Q-文 φ で $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi$ となるものに対し，$\alpha < \kappa$ で，$\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \models \varphi$ となるものが存在すること

とする. 極限順序数 α と $R \subseteq V_\alpha$ に対して $\langle V_\alpha, \in, R\rangle$ という形をしている構造の上で，任意の高階の論理式は，ある，m と n に対し 各々の量化子のブロックが一つにまとめられているような Π^m_n または Σ^m_n 論理式と同値になることは，標準的な手法によって示すことができる. 任意の $R \subseteq V_\kappa$ は無しですますこともできるのであるが（6.9を参照），これを許すことで，いくつかの好ましい帰結を得ることができる. V_κ は対を作ることに関し閉じているので，この定義での R を任意の有限個の有限的な関係で置き換えたものも同値になる. この事実は以下でたびたび利用されることになる.

超限的なタイプを用いることで，この定義をさらに拡張するとができるが，これは実際にイェンセンにより実行されている（Drake [74: 284ff] を参照）. 伝統の影響で有限タイプにひいき目になっているところがあるかもしれないが，いくつかの記述不可能性の結果は，もっと強い表現力のモードに対しても通用する全般的な証明が与えられている. しかしながら，マーロの階層でもそうだったように，超限的なタイプにより，より大きな基数が導かれるとしても，必ずしも質的な超越性が与えられるとはかぎらない. そこで，もっと強い記述不可能性の性質はすでにこれから導かれることが多いことを念頭において，次のような弱い形の総体的な概念を導入する：

> κ が**全面的に記述不可能**とは κ がすべての $m, n \in \omega$ に対し Π^m_n-記述不可能となること

とする.

レヴィの仕事 Levy [60a] に続いてベルナイズ Bernays [61] は，集合のユニヴァースに対する2階の論理での反映の原理を仮定したが，これは，On の，すべての $n \in \omega$ に対する Π^1_n-記述不可能性を仮定することに相当するものであった. この2階の論理でのアプローチを押し進めて，ベルナイズは，この原理が次の意味での大域的選択公理を導くことを示した：クラス関数 F で，任意の空でない集合 x に対し $F(x) \in x$ の成り立つようなものが存在する. この研究は，Rolando Chuaqui [78, 81] でさらに押し進められている.

前の議論を続けることにして，まず，$m = 1$ の場合を考察することにする：

6.3 命題

(a) 任意の n に対し，κ が Σ^1_{n+1}-記述不可能となるのは，κ が Π^1_n-記述不可能となる，ちょうどそのときである.

(b) κ が Σ^1_1-記述不可能となるのは，κ が到達不可能となる，ちょうどそのときである.

証明 (a) 自明でない方向の証明には，$R \subseteq V_\kappa$ として，たとえば，$\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \exists X \varphi(X)$ とする. ここに X は2階のタイプを持つ変数とし，φ は Π^1_n である. このとき，$S \subseteq V_\kappa$

で $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi[S]$ となるものがある．ここで，X を φ での新しい述語記号で置き換えることで，Π^1_n-記述不可能性を $\langle V_\kappa, \in, R, S\rangle$ に適用できる．

(b) これは，(a) により，一階の論理式に帰結させて，6.2(a) での議論を用いることで得られる．　$\dashv$

Π^1_1-記述不可能性については何が言えるであろうか？ ハンフとスコットは，これがエレガントな特徴付けを与えることを示した：

6.4 定理　(Hanf-Scott [61]). κ が Π^1_1-記述不可能となるのは，κ が弱コンパクトとなる，ちょうどそのときである．

証明　4.5 での弱コンパクト性の拡張の性質による特徴付けを用いる．まず，κ を到達不可能とし，$R \subseteq V_\kappa$ とする．推移的な $X \neq V_\kappa$ と $S \subseteq X$ で，$\langle V_\kappa, \in, R\rangle \prec \langle X, \in, S\rangle$ となるものがあれば，レーベンハイム=スコーレムの定理 0.5 により，このような X で $|X| = |V_\kappa|$ となるものが存在する．X から V_κ への上射を用いることで，これは，構造 $\langle Y, E, T\rangle$ で E は崩壊の補題 0.4 の仮定を満たす二項関係となっているものと，初等的埋め込み J: $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \to \langle Y, E, T\rangle$ をコードする $A \subseteq V_\kappa$ の存在に帰結することができる．E が整順的であることは，κ の到達不可能性により ${}^\omega V_\kappa \subseteq V_\kappa$ となっていることから，無限 E-下降列が V_κ の元として存在しないことの主張として一階の論理で記述できる．J が初等的であることは，論理式の複雑さに関する帰納法での充足関係の列 K を用いて定式化可能だから，記述可能である．したがって，これらをきちんと形式化すれば，$R \subseteq V_\kappa$ に対して拡張の性質が成り立つことと，$\langle V_\kappa, \in, R\rangle$ が，適当な一階の論理式 ρ に対し $\exists A \exists J \exists K \rho$ という形をした Σ^1_1 文を満たすことが同値となることが分かる．

ここでまず，κ が Π^1_1-記述不可能であるとする．このときには，6.3 により，κ は到達不可能となる．ある $R \subseteq V_\kappa$ に対し拡張の性質が成り立たないと仮定して，矛盾を導く．このときには，Π^1_1 文 σ を上の Σ^1_1 文の否定として，$\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \sigma$ となる．Π^1_1 文 τ で，$\langle V_\delta, \in\rangle \models \tau \iff \delta$ は到達不可能，となるものをとることができる．ここで，6.1 により，

$$C = \{\beta < \kappa \mid \langle V_\beta, \in, R \cap V_\beta\rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R\rangle\}$$

は κ で閉非有界となるから，ψ を C が閉非有界であることを主張する一階の論理式とすると，$\langle V_\kappa, \in, R, C\rangle \models \psi$ となる．

Π^1_1-記述不可能性により，$\alpha < \kappa$ で，

$$\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha, C \cap V_\alpha\rangle \models \sigma \wedge \tau \wedge \psi$$

となるものがある．特に α は到達不可能で $\alpha \in C$ となる．スコーレム閉包の論法を繰り返し用いると，$\langle X_\alpha, \in, S_\alpha\rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R\rangle$ で，X_α は推移的で，V_α は X_α の真部分集合となり，$|X_\alpha| = |V_\alpha|$ となるようなものがとれる．$\alpha \in C$ により，$\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \prec \langle X_\alpha, \in, S_\alpha\rangle$ となるが，これは $\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \models \sigma$ に矛盾である．

逆の証明のために，κ が弱コンパクトで，ある Π^1_1 文 φ に対し，$\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi$ となっているとする．拡張の性質により，推移的な $X \neq V_\kappa$ と $S \subseteq X$ で，$\langle V_\kappa, \in, R\rangle \prec \langle X, \in, S\rangle$ となるものがとれる．特に，$\langle X, \in\rangle$ は ZFC の推移的なモデルとなっていて，$\kappa \in X$ だか

ら，$V_\kappa^X = V_\kappa \in X$ となる．φ に現れるタイプ 2 の量化子は全称量化子のみで，これらは下方向に保存される —— 部分モデルでは領域の部分集合の全体はもとのモデルより少ないものとなる可能性しかないからである．したがって，κ は上のような α となっており，$S \cap V_\kappa = R$ だから，

$$\langle X, \in, S\rangle \models \exists\alpha(\langle V_\alpha, \in, S \cap V_\alpha\rangle \models \varphi)$$

となる．この主張は一階の論理で記述できるから，初等性により，$\langle V_\kappa, \in, R\rangle$ でも成り立つ．κ は到達不可能だったから，これは，実際に $\alpha < \kappa$ で，$\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \models \varphi$ となるものが存在することを意味しており，したがって証明が完了した． $\dashv$

上の定理は，存在命題であるところの拡張の性質と全称命題の反映の性質の同値性を示しているわけであるが，その意味で，なかなか微妙な現象と言えよう．4.7 のような，マーロの階層との関連での弱コンパクト基数の大きさに関する結果は，Π^1_1-記述不可能性を用いることでも得られる．

最後に，ハンフとスコットは，可測基数での，反映の現象に関する一般的な命題で，5.14 や 5.15 を凌ぐものを得ている：

6.5 命題 (Hanf-Scott [61])．可測基数は Π^2_1-記述不可能である．さらに，U を κ 上の正規な超フィルターとするとき，$R \subseteq V_\kappa$ と，Π^2_1 文 φ に対し，$\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi$ なら，

$$\{\alpha < \kappa \mid \langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \models \varphi\} \in U$$

が成り立つ．

証明 $j\colon V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V, U)$ とする．5.7(a) により，$V_{\kappa+1} \subseteq M$ だから，$\langle V_\kappa, \in\rangle$ 関する 2 階の文は，V と M の間で絶対的となる．ところが，φ に現れるタイプ 3 の量化子は全称量化子のみだから，φ は $V_{\kappa+1}$ のより少ない部分集合がある可能性しかない下方向に保存され，したがって，$(\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi)^M$ となる．よって，$j(R) \cap V_\kappa = R$ により，主張は U の正規性から得られる． $\dashv$

クーネンは，実数値可測基数の持つ一種の Π^2_1-記述不可能性を見いだしている（Solovay [71] or Fremlin [93] を参照）．これの応用として，例えば，次の命題が示せる：**$\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ が実数値可測なら，濃度が κ 以下のルベーグ非可測集合が存在する．** また，Kunen [71] では，記述不可能性の変形で，もとの概念より真に弱いものが導入されており，これについて，$2^{\aleph_0}$ 以下での結果が得られている（Hanf-Scott [61] での記述は，実際には，この弱い変形に関して，κ の記述不可能性の仮定を必要としない形で述べられている）．

$\langle V_\kappa, \in\rangle$ 上で，κ が可測であることは，$\exists U \in \mathcal{P}^2(\kappa) \cdots$ という形をしていて，$\cdots$ の部分は 2 階の論理式となっているような Σ^2_1 論理式で表現できる．したがって，最小の可測基数は Σ^2_1-記述不可能となりえないから，この意味で，6.5 は最良の結果となっていることが分かる．ところが：

6.6 命題 (Vaught [63a])．κ が可測で，U を κ 上の正規な超フィルターとするとき，

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ は全面的に記述不可能 }\} \in U$$

となる．

証明　$j\colon V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V,U)$ とする．正規性から，$M \models$「κ は全面的に記述不可能」が示せればよい．以下の議論は，φ の複雑さに関し，ほとんど何の制限も必要としない：

$$M \models (R \subseteq V_\kappa \ \wedge \langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi)$$

と仮定する．このとき

$$M \models \exists\alpha < j(\kappa)(\langle V_\alpha, \in, j(R) \cap V_\alpha\rangle \models \varphi)$$

となる．κ はこのような α となっており，$j(R) \cap V_\kappa = R$ だからである．初等性から，

$$\exists\alpha < \kappa(\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \models \varphi)$$

となるが，$V_\kappa^M = V_\kappa$ だから，これは M でも成り立つ．　$\dashv$

したがって，最小の可測基数 κ の下には，κ より強い反映の性質を持つ基数がたくさん存在する．一方，可測性とは異なり，Π^m_n-記述不可能性は $V = L$ と矛盾しない．このための議論には，α-到達不可能基数や α-マーロ基数のときには，(3.1) とは違い，L の固有の性質が必要になる：

6.7 定理　Q を Π^m_n あるいは Σ^m_n とする．ここに，$m > 1$ または $m = 1$ で $n > 0$ とする．κ を Q-記述不可能とするとき，(κ は Q-記述不可能 $)^L$ となる．特に，κ が弱コンパクトなら，(κ は弱コンパクト $)^L$ が成り立つ．

証明　この証明のみでの記法として，δ^+ で δ より大きな最初の L での基数を表し，$\delta^{+(i)}$ で δ より大きな L での i 番目の基数を表すことにする．まず，$0 < i < \omega$ に対し，$s > 0$ として，各 Π^r_s（あるいは Σ^r_s）論理式 $\varphi(X_1,\ldots,X_t)$ に対し，Π^{r+i}_s（あるいは Σ^{r+i}_s）論理式 $\tilde{\varphi}(Y_1,\ldots,Y_t)$ で，$1 \le k \le t$ に対し，$\mathrm{type}(Y_k) = \mathrm{type}(X_k) + i$ となるものが対応して，任意の到達不可能な λ に対し，各 $A \in \mathcal{P}^j(L_{\lambda^{+(i)}})$ を $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{j+i}(V_\lambda) = V_{\lambda+j+i}$ に対応づけて

$$(*) \qquad L_{\lambda^{+(i)}} \models \varphi[A_1,\ldots,A_t] \ \Leftrightarrow\ V_\lambda \models \tilde{\varphi}[\tilde{A}_1,\ldots,\tilde{A}_t]$$

となるようにできることを示す．ここに $j \in \omega$ で，$\mathcal{P}^0(L_{\lambda^{+(i)}}) = L_{\lambda^{+(i)}}$ の場合も含むことにする．後で必要になるのは $r = 0$ で φ が文になる場合のみであるが，証明で帰納法の議論が押し進められるようにするために，この複雑な形が必要となる．

$i = 1$ の場合には，σ_0 を 3.3(a) での文とする．したがって，任意の推移的な σ_0 のモデル N に対し，$N = L_\alpha$ がある α で成り立つ．L での GCH の証明から，$A \in L_{\lambda^+}$ なら，$A \in L_\gamma$ がある $\gamma < \lambda^+$ で対し成り立つ．$|L_\gamma| \le \lambda$ だから，次の主張が成り立つ：$B \subseteq V_\lambda$ と B 上の二項関係 E で，崩壊の補題 0.4 の仮定を満たし，$\langle B, E\rangle \models \sigma_0$ となるものがあり，0.4 での証明のように H を帰納的に $H(x) = \{H(y) \mid y\ E\ x\}$ と定義すると $z \in B$ で $H(z) = A$ となるものが存在する．$\langle B, E, z\rangle$ を V_λ の部分集合 $\tilde{A}$ としてコードすると，6.4 の証明の最初の段落でと同じ議論により，この命題は，$\tilde{A}$ をタイプ 2 の変数 Y と解釈する V_λ 上の Σ^1_1 論理式 $\psi(Y)$ として定式化できる．

ここで帰納的に一階の論理式 φ に対し $\tilde{\varphi}$ を定義してゆく：原子論理式に対しては，$A_1, A_2 \in L_{\lambda^+}$ なら，$A_1 \in A_2$ も $A_1 = A_2$ も上の ψ を用いることで，$\tilde{A}_1$ と $\tilde{A}_2$ に関する V_λ 上での Σ^1_1 命題として与えることができる．φ が $\exists X \varphi_0(X, X_1, \ldots, X_t)$ で $\tilde{\varphi}_0(Y, Y_1, \ldots, Y_t)$ が φ_0 に対応しているときには，

$$\begin{aligned} L_{\lambda^+} \models \varphi[A_1, \ldots, A_t] &\Leftrightarrow \text{ある } A \in L_{\lambda^+} \text{ に対し } L_{\lambda^+} \models \varphi_0[A, A_1, \ldots, A_t] \\ &\Leftrightarrow V_\lambda \models \tilde{\varphi}_0[\tilde{A}, \tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_t] \quad \text{（帰納法の仮定による）} \\ &\Leftrightarrow V_\lambda \models \exists Y(\psi \wedge \tilde{\varphi}_0)[\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_t] \end{aligned}$$

となる．したがって，$\tilde{\varphi}$ は $\exists Y(\psi \wedge \tilde{\varphi}_0)$ としてとることができる．ここで帰納法の仮定から，φ が Σ^0_s なら，$\tilde{\varphi}$ は Σ^1_s になっていることに注意する．命題演算子については，まったく問題ないから，これで一階の論理式については議論がすんだ．高階の φ については，A に対応する $\tilde{A}$ は自然なやり方で定義できるので，これで $i = 1$ の場合の証明は完了する．

$i > 1$ の場合は，帰納法により次のような議論で証明する：$i = 1$ での議論を，L_{λ^+} を $L_{\lambda^{+(i+1)}}$ で，また V_λ を $L_{\lambda^{+(i)}}$ で置き換えたものに対して行って，$L_{\lambda^{+(i+1)}}$ から $L_{\lambda^{+(i)}}$ に翻訳し，帰納法の仮定を用いて V_λ に降りる．ここで，任意の r に対して一般的な記述をしたことが効いてきている．$L_{\lambda^{+(i+1)}}$ から $L_{\lambda^{+(i)}}$ への翻訳では，新たな問題が出てくる：V_λ の場合には，E の整順性が一階の論理で表現できたのは，そこで用いた 0.4 の証明でのように，${}^\omega V_\lambda \subseteq V_\lambda$ が成り立っていることに依存していたが，ここでは，${}^\omega L_{\lambda^{+(i)}} \cap L \subseteq L_{\lambda^{+(i)}}$ が L での GCH の証明から分かるだけである．しかしながら，内部モデルと整順性に関する基本的な事実から，このことで十分であることが言える：まず $A \in L_{\lambda^{+(i+1)}}$ とすると，$|L_\gamma|^L \leq \lambda^{+(i)}$ となるようなある γ で $A \in L_\gamma$ とできるから，対応する E も $E \in L_{\lambda^{+(i)}}$ となっているとしてよい．E が L で整順的なら，絶対性 (0.3) から，E は V でも整順的である．しがって，無限な E-下降列が L で存在しないことを主張できればよいが，このためには，${}^\omega L_{\lambda^{+(i)}} \cap L \subseteq L_{\lambda^{+(i)}}$ で十分である．

さて，定理の主張の証明のために，まず λ が到達不可能なら λ は L でも到達不可能となり，1.2(a) とランクに関する帰納法により，$(V_\lambda)^L = L_\lambda$ が言えることに注意する．このような状況で反映させて落すために（6.4 でのように）Π^1_1 文 τ で，$V_\delta \models \tau \Leftrightarrow \delta$ は到達不可能，が成り立つようなものが存在することに注意する．

さて，κ を Π^m_n-記述不可能として，m, n は定理の仮定でのようにとれているとする（Σ^m_n の場合も同様に証明できるが，Σ^1_1 の場合だけは別扱いをして，6.3(b) から導く）．L での Π^m_nl-記述不可能性を示すために，まず κ が到達不可能であることから，$(V_\kappa)^L = L_\kappa$ となることに注意して，

$$R \in \mathcal{P}(L_\kappa) \cap L, \ (\langle L_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi_0)^L$$

と仮定する．ここに φ_0 は Π^m_n とする．L での GCH の証明から，$\mathcal{P}(L_\kappa) \cap L \subseteq L_{\kappa^+}$ となり，さらに帰納法により $\mathcal{P}^i(L_\kappa) \cap L \subseteq L_{\kappa^{+(i)}}$ が各 $i \in \omega$ に対し成り立つことが分かる．したがって我々の仮定は，

$$\langle L_{\kappa^{+(m)}}, \in, R\rangle \models \varphi_1$$

の形に与えなおすことができる．ここに φ_1 は φ_0 に対応する Π^0_n 文である．前述の命題により，これは今度は

$$\langle V_\kappa, \in, \tilde{R}\rangle \models \tilde{\varphi}_1$$

と翻訳できる．ここに $\tilde{\varphi}_1$ は Π^m_n である．したがって $\tilde{\varphi}_1 \wedge \tau$ を $\alpha < \kappa$ に反映させて，これを逆翻訳して

$$(\langle L_\alpha, \in, R \cap L_\alpha\rangle \models \varphi_0)^L$$

を得ることで主張の証明が完了する．　$\dashv$

次の汎用論理式に関する結果は，充足関係の標準的な応用で得られる（詳しくは，Levy [71: 208], Drake [74: 272], あるいは，Devlin [75: 96ff] を参照されたい）．

6.8 命題　任意の $m, n > 0$ に対し，X はタイプ 2, Y はタイプ 1 の変数として，Π^m_n 論理式 $\psi_{mn}(X, Y)$ で，任意の Π^m_n 論理式 $\varphi(X)$ に対し，$k \in \omega$ が存在して，任意の極限順序数 α と $R \subseteq V_\alpha$ に対し，

$$\langle V_\alpha, \in\rangle \models \varphi[R] \;\Leftrightarrow\; \langle V_\alpha, \in\rangle \models \psi_{mn}[R, k]$$

となるようなものが存在する．また，Σ^m_n 論理式 $\psi'_{mn}(X, Y)$ で，類似の性質が Σ^m_n 論理式 $\varphi(X)$ に対し成り立つものが存在する．

1 変数述語からタイプ 2 の変数へ移行することで，次のような系が得られるようになる：

6.9 系　(a) 任意の n に対し，Π^1_{n+1} 文 χ_{1n} で，任意の κ に対し，

$$\langle V_\kappa, \in\rangle \models \chi_{1n} \;\Leftrightarrow\; \kappa \text{ は } \Pi^1_n\text{-記述不可能}$$

となるようなものが存在する（6.3 により，これは Σ^1_n の場合を含むものとなる）．

(b) $m > 1$ なら，任意の $n > 0$ に対し Π^m_n 文 χ_{mn} で，任意の κ に対し，

$$\langle V_\kappa, \in\rangle \models \chi_{mn} \;\Leftrightarrow\; \kappa \text{ は } \Sigma^m_n\text{-記述不可能}$$

となるものが存在する．また，Σ^m_n 文で，Π^m_n-記述不可能性を同様に特徴付けるものも存在する．

証明　(a) $n = 0$ に対しては，χ_{10} を到達不可能性を記述する任意の Π^1_1 文ととればよい．$n > 0$ に対しては，6.8 での ψ_{1n} を用いて，χ_{1n} を集合に対する充足関係を適当に記述して，

$$\forall X \forall Y(\psi_{1n}(X, Y) \to \exists \alpha > 0(\alpha \text{ は極限順序数 } \wedge \langle V_\alpha, \in\rangle \models \psi_{1n}(X \cap V_\alpha, Y)))$$

とすればよい．$\forall X$ と $\psi_{1n}(X, Y)$ が $\to$ の左側に現れていることから，これは Π^1_{n+1} となる．

(b) は (a) と同様であるが，$m > 1$ に対しては，論理式を冠頭形に変形することで $\forall X$ が論理式に吸収されることに注意する．　$\dashv$

$$\pi_n^m = \text{最小の } \Pi_n^m\text{-記述不可能基数},$$
$$\sigma_n^m = \text{最小の } \Sigma_n^m\text{-記述不可能基数}$$

とする．この記法を用いるときには，このような基数が存在することを暗に仮定する．次のものは 6.3 と 6.9 からの帰結である．

6.10 命題 (Hanf-Scott [61]).

(a) σ_1^1 は最小の到達不可能基数である．

(b) $\pi_1^1 = \sigma_2^1 < \pi_2^1 = \sigma_3^1 < \ldots$

(c) $m > 1$ と $n > 0$ に対し，$\sigma_n^m \neq \pi_n^m$ かつ $\pi_n^m < \sigma_{n+1}^m$, π_{n+1}^m となる． ⊣

$m > 1, n > 0$ に対する σ_n^m と π_n^m の他の関係については，この節の最後で論じる．

レヴィLevy[71] は記述不可能基数の大きさに関する系統的な研究を行って，Keisler-Tarski [64] での視座をさらに拡張した．最も注目すべき点は，この論文で暗に述べられている定義可能なフィルターの研究を施行したことであろう．このアイデアは後の文脈の中で用いられて，6.10 をさらに拡張することになる．彼のアプローチの出発点は，様々な巨大基数の性質が基数の性質を述べているにとどまらず，それらの部分集合の全体に関するものでもあるという事実であった．$X \subseteq \kappa$ で，Q を Π_n^m か Σ_n^m のいずれかとして，

X は κ で Q-記述不可能 ⇔ 任意の $R \subseteq V_\kappa$ と Q 文 φ で $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi$ となるものに対し，$\alpha \in X$ で $\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \models \varphi$ となるものが存在する

と定義する．これから次のような集合を考察することが示唆される：

$$I = \{X \subseteq \kappa \mid X \text{ は } \kappa \text{ で } Q\text{-記述不可能でない}\},$$
$$\{X \subseteq \kappa \mid X \text{ は } \kappa \text{ で } Q\text{-記述不可能}\},$$
$$F = \{X \subseteq \kappa \mid \kappa - X \text{ は } \kappa \text{ で } Q\text{-記述不可能}\}$$

つまり，それぞれ Q-記述不可能性に関して，無視できる集合，無視できない集合，無視できる集合を除いてすべてとなっている集合の全体である．κ が Q-記述不可能となるのは，F が（自明でない）フィルターになっているちょうどそのときであることは容易に確かめられるが，このとき F を κ 上の **Q-記述不可能フィルター**と呼ぶ（F は，基数上のフィルターはすべての終片 $\{\xi \mid \alpha < \xi < \kappa\}$ を含むことにするという§0 での取りきめを満たしている．$\langle V_\kappa, \in, \{\alpha\}\rangle$ での命題，“$\{\alpha\}$ は空でない” は V_ξ で $\xi \leq \alpha$ となるものに反映することはできないからである．レヴィの用語では F の元は “*weakly Q-enforceable at κ*” と呼ばれており，フィルターについてはっきりと言及されているわけではない）．I は F の双対なイデアルで，F-定常集合の全体は，ちょうど κ での Q-記述不可能な集合の全体となる．Π_1^1-記述不可能フィルターは，6.4 により，**弱コンパクト・フィルター**ともよばれている．この用語では，これらのフィルターが実際に真のフィルターとなることを仮定している．つまり，対応する κ は必要な強さを持つものとする．

これらの定義可能なフィルターの決定的な性質の一つは：

6.11 命題　(Levy [71]). $m, n > 0$ に対し，κ 上の Π^m_n-記述不可能フィルター，および，Σ^m_n-記述不可能フィルターは正規である．

証明　F を κ 上の Π^m_n-記述不可能フィルターとする（Σ^m_n の場合も同様である）．$X \subseteq \kappa$ で，$f\colon X \to \kappa$ を退行的とする．すべての $\alpha < \kappa$ に対して，$f^{-1}(\{\alpha\})$ が Π^m_n-記述不可能でないとして，X が κ で Π^m_n-記述不可能でないことが示せればよい：

6.8の汎用論理式を再び用いて，各 $\alpha < \kappa$ に対し $R_\alpha \subseteq V_\kappa$ と $k_\alpha \in \omega$ で，$\langle V_\kappa, \in\rangle \models \psi_{mn}[R_\alpha, k_\alpha]$ だが，任意の $\xi \in X$ で $f(\xi) = \alpha$ となるものに対し $\langle V_\xi, \in\rangle \models \neg\psi_{mn}[R_\alpha \cap V_\xi, k_\alpha]$ が成り立っているようにできる．

$$R = \{\langle\alpha, \beta\rangle \mid \alpha < \kappa \ \wedge\ \beta \in R_\alpha\}\,,$$
$$T = \{\langle\alpha, k_\alpha\rangle \mid \alpha < \kappa\}$$

とおく．一階の論理の文 τ で，$\langle V_\delta, \in\rangle \models \tau$ なら，δ はゼロでない極限順序数となるものをとる．このとき，

$$\langle V_\kappa, \in, R, T\rangle \models \tau \ \wedge\ \forall\alpha\forall U\forall v(U = R``\{\alpha\} \ \wedge\ v = T(\alpha) \to \psi_{mn}(U, v))$$

となる．これをうまく形式化すると Π^m_n 文として表せるから，これと τ により，この主張を反映する任意の ξ に対し，

$$R \cap V_\xi = \{\langle\alpha, \beta\rangle \mid \alpha < \xi \ \wedge\ \beta \in R_\alpha \cap V_\xi\}\,,$$
$$T \cap V_\xi = T|\xi\,,$$

が成り立ち，f は退行的だから，$\xi \notin X$ となる．したがって，X は κ で Π^m_n-記述不可能ではない．　$\dashv$

任意の $R \subseteq V_\kappa$ と Π^m_n 文 φ で，$\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi$ となるものに対し，

$$\{\alpha < \kappa \mid \langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \models \varphi\}$$

は Π^m_n-記述不可能フィルターの元となり，同様のことは Σ^m_n に対しても言える．このことから次が導ける：

6.12 演習　(Levy [71]).

(a) 任意の n に対し，$\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ は α で Π^1_n-記述不可能 $\}$ は κ 上の Π^1_{n+1}-記述不可能フィルターの元となる．

(b) $m > 1$ と $n > 0$ に対し，$\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ は α で Σ^m_n-記述不可能 $\}$ は κ 上の Π^m_n-記述不可能フィルターの元となり，$\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ は α で Π^m_n-記述不可能 $\}$ は，κ 上の Σ^m_n-記述不可能フィルターの元となる．

(c) S が κ で定常なら，$\{\alpha < \kappa \mid S \cap \alpha$ は α で定常 $\}$ は κ 上の Π^1_1-記述不可能フィルターの元となる．

ヒント (a) と (b) は，6.9 で定義した文を用いて示せる．(c) は，Π^1_1 文 σ で，任意の δ と $A \subseteq \delta$ に対し，$\langle V_\delta, \in, A \rangle \models \sigma \iff A$ は δ で定常，となるようなものを用いることで示せる． ⊣

任意の正規フィルターは閉非有界フィルターを拡張するものとなっている（5.10ff を参照）．したがって，(a) と (b) で与えられた集合は κ で定常となることが分かる．さらに，(c) から，**記述不可能フィルターはマーロの演算に関して閉じている**ことが分かるから，これは 4.6 を拡張する．6.12 は巨大基数の階層において，あるレヴェルの基数が，下のレヴェルに対して超越的な大きさを持つことを，それ自身の定義に内包するという状況の典型的な例となっている．

制限された文脈での，巨大基数の様々なアナロジーの研究は，実りの多い巨大基数の理論の分流であり続けた．実際，自然なアイデアが，まず集合論という極大のセッティングで生み出されたとき，それが，もっと制限された状況でも有効に用いられないはずはない．この方向での最初の本格的な動きは 1970 年代の初めに非単調演算子を許すような帰納的定義の理論でなされている．認容集合に正則基数の巨大基数の理論での役割を担わすことで，マーロ基数や記述不可能基数と自然な類似を持つものがこの枠組の中で開発された．リヒターとアクツェルによる Wayne Richter and Peter Aczel [74] また Aczel [77: 772ff] で子細な議論がなされている．このような活動の第二波は 1980 年にクラナキス Evangelos Kranakis [82, 82a, 83] による反映や分割の性質を用いて定式化される Σ_n-許容性の研究で始まっている．この研究は，たとえば，クラナキスとフィリップス Kranakis, Iain Phillips [84] でさらに進められ，カウフマンとクラナキス Matthew Kaufman, Kranakis [84]，ベーテン Josephus Baeten [86] により，可測基数の類推の研究にまで拡張されている．

帰納的定義の研究の初期における，アンデラアによる鋭い考察 Stål Aanderaa [74] から示唆されて，モショヴァキス Yiannis Moschovakis は次の結果を得ている：

6.13 定理 (Moschovakis [76]). $V = L$ で $m > 1$ かつ $n > 0$ なら，$\sigma^m_n < \pi^m_n$ となる． ⊣

証明のスケッチは Devlin [75: 100] にある．これは実に奇妙な現象である! 巨大基数の構成的な類推を考えることで新しい特徴付けや直観が得られ，これが今度はもとの文脈への揺り返しを与えたわけである．

6.13 で $V = L$ のような何らかの制限が必要かどうかは，しばらく未解決のまま残されていたが，これは，ハウザー Kai Hauser が洗練された強制法のテクニックを用いて対照的な結果を得たことで結着された：

6.14 定理 (Hauser [91, 92]). $m > 1, n > 0$ で，Σ^m_n-記述不可能基数が存在し，その下に Π^m_n-記述不可能基数が存在するとする．このとき，このような基数を持つ generic 拡大で，$\sigma^m_n > \pi^m_n$ となるものが存在する． ⊣

自然な定義と $m = 1$ での例から，モショヴァキスの結果の方向の絶対性が予測されるように思えたので，この結果は意外であった（$\sigma^m_n > \pi^m_n$ からは，Σ^m_n-記述不可能基数と Π^m_n-記述不可能基数の両方の存在の無矛盾性が示せるので，この定理の仮定での基数の順

序は，必要である）.

記述不可能性の研究は，巨大基数の反映の現象に関する広範囲な研究の下地を用意することになり，定義可能な正規フィルターの使用という重要なテクニックを導入した．6.14により記述不可能性に関する重要な未解決問題はすでに解かれてしまったと言えるかもしれないが，いずれにしても，この概念は，様々な巨大基数の相対的な大きさの解析のための便利な枠組を与えたと言えるであろう．

第 2 章　分割の性質

この節では，エルデシュによって導入され，L 上の超越性を意味する原理である，自然数の集合 $0^{\#}$ の存在に関するシルバーによる研究で頂点に至ることになる，分割の性質に関連したアイデアと研究結果の進歩を記述する．この展開では，組合せ論の洗練された分析法と，モデル理論の手法の縦横無尽な応用の両方が組みあわされ，後に基本的なものと見なされるようになる概念の定式化がなされることになる．§7 では n-組の分割を調べ，これに関連した木の性質と弱コンパクト基数のさらに別の特徴付けが考察される．§8 ではローボトムによる L に関するモデル理論的特徴付けといくつかの結果が述べられ，これに関連したローボトムとジョンソン (Jónsson) の基数が考察される．最後に，§9 で，識別不可能集合と $0^{\#}$ の存在の L に対する帰結に関する，シルバーによる決定的な結果を見ることにする．

§7　分割と木

エルデシュPaul Erdös は人生の大部分を旅先で送った数学者であるが，それにもかかわらず，ハンガリーの具体的な組合せ数学の根強い伝統における中心的存在であり，彼の発見したいくつかの先駆的な結果は細密な組合せ論による超限の研究をうながすことになった．エルデシュと彼の共同研究者たちは，超限順序数を，単に組合せ論的に非常に面白い問題の宝庫と見なした．彼らの追究した一連の問題へのアプローチは，ほどなく自給的に勢いを得るようになるが，そのグラフや写像に関する具体的な疑問は，直接的であることで，自然な興味を呼び起す種類のものであった．初期に考えられたいくつかの問題は，後に弱コンパクト性と重要な関連があることがわかってくるが，これらについて本節で議論する．1950 年代にはすでに十分な知識が出揃っており，最小の到達不可能基数は可測でない，という結果はハンフとタルスキーの仕事より先に証明することができている．組合せ論に関する研究が巨大基数と関連を持つこと自体は十分に予想のできることであるが，これが，1960 年代での巨大基数の研究の構造的な精密化において中心的役割を果たすことになったのはいささか意外であった（§§8, 9 を参照）．

後の展開とはかけ離れているが，話の発端は形式論理学のある問題であった．ゲーデルが不完全性定理を確立する数年前，ラムズィー Ramsey [30] は等式を含む $\exists\forall$ 論理式の族の決定可能性を証明している（一般的な議論については Dreben-Goldfarb [79] を参照）．ラ

ムズィーが彼の有名な有限組合せ論の定理を証明したのは，この目的のためであった．ラムズィーは後のカンタベリーの大司教の兄弟で，ケンブリッジで活躍した．ラッセル Bertrand Russell やヴィットゲンシュタイン Ludwig Wittgenstein との交友を通じて数理哲学の重要人物の一人となったが，26才で悲劇的な死をとげた．このとき彼をみとったのはヴィットゲンシュタインであった．スコーレムは Skolem [33] でラムズィーの仕事を改良しているが，彼の定理は Erdös-Szekeres [35] で再発見されて，組合せ論的幾何の問題に応用されるまで，広く知られることはなかった．今日ではラムズィーの理論は組合せ論のホットな研究領域となっている（Graham-Rothschild-Spencer [90] を参照）．

ラムズィーは彼の組合せ論の定理の無限版も確立しているが，こちらの方も同じようによく知られており，これの超限での類推からいくつかの巨大基数の性質が得られるのである．エルデシュとタルスキーの共著論文 Erdös-Tarski [43] では互いに素な集合の極大族の議論で到達不可能基数が考察されている．さらに注目すべきことは，この論文の最後で，その肯定的な答が，それぞれ，強コンパクト基数，可測基数，あるいは，弱コンパクト基数の存在を導くような，6つの組合せ論的問題（とそれらの間の関係に関する言及）が述べられていることである．ここでは，これらの問題が，ω の持つ強い性質を，組合せ論の言葉を用いて直接的に一般化することで得られていることは明らかである．彼等は数学の基礎に関する問題に新しい公理の可能性を探るという立場から，まったく経験哲学的なアプローチを試みたのであった．エルデシュとタルスキーは，以下のように考察している ([43: 328ff]):

> ここで考察しているこれらの問題を解こうとするときにぶつかる困難は到達不可能数の本質的な性質に依存しているようには思えない．多くの場合困難はある種の無限演算に関して閉じている極大集合を構成するための手段に欠けている，ということに起因しているように思われる．
>
> これらの問題の完全な解決には，集合論の通常の公理と異なるだけでなく，それらを集合論の公理に含めることについて文献ですでに議論され，本論文でもすでに言及したような仮説（つまり，到達不可能数の存在を保証するような存在公理あるいは，カントルのもののように基数の間の算術的関係を規定するような仮説）とも全く異なるな新しい公理が必要となる，ということも多いにあり得ることに思える．

彼等の問題の肯定的な答自身が巨大基数の仮定として受け入れれらるようになってしまったので，このような本質的な原理が実現されたとは言いがたいように思われるかもしれない．しかし，1960年代に研究された様々な反映の原理（§6を参照）は “ある種の無限演算に関して閉じている極大集合” という考えを正当化している．特に，Π^1_1-記述不可能性による弱コンパクト性の特徴付けは，局所的な意味のよく分かる原理が組合せ論的な問題の肯定的解決を導く例となっている．一方，ベルナイズ Bernays [61] の2階の記述不可能性原理は，本質的には On のすべての $n \in \omega$ に対する Π^1_n-記述不可能性の原理となっているが，これは大域的なものの例となっている．

Erdös-Tarski [43] での関連した問題を文脈の中で見るために，エルデシュによって初められたプログラムについて解説しよう．ラドー (Richard Rado) は1950年代以来この研究分野での主な共同研究者で，ハイナルもやはりその頃からの共同研究者であった．面白いことに彼のもとの同国人フォン・ノイマンと同じように，ハイナルの最初の仕事は

集合論の公理系に関するものであった（3.2 の前を参照）が，後には彼の興味はまったく別の分野に移っている．Erdös-Rado [56] で開発された一般的な枠組は**分割解析**と名付けられ，彼等の**順序数の分割記法**の特別な場合がその出発点となった．$x \subseteq \mathrm{On}$ に対し，$[x]^\gamma = \{y \subseteq x \mid y$ は順序型 γ を持つ$\}$ だったことを思い出そう．**順序数の分割関係**

$$\beta \longrightarrow (\alpha)^\gamma_\delta$$

は，任意の $f\colon [\beta]^\gamma \to \delta$ に対し，$H \in [\beta]^\alpha$ で f に関し一様なもの，つまり，$|f``[H]^\gamma| \le 1$ となるものが存在する，という主張である．別の言い方をすると，順序型が γ の β の部分集合の族の，任意の δ 個への分割に対し，順序型が α の $H \subseteq \beta$ で，順序型が γ の H の部分集合はすべて，この分割での同じ成分に入っているようなものが存在するということである．このような式で $\longrightarrow$ を $\not\longrightarrow$ の代わりに書いたときには，この命題や対応する類似の関係の否定を表すことにする．このような“矢印”の記法の背景にあるアイデアは，この関係が，左側の β をより大きくしたり，右側の α, γ, δ のうちの任意のものをより小さくしたとき，この関係が保存されるということである．もちろん δ は基数としてとることができ，α が基数なら，この関係を満たす最小の β も基数となる．ラムズィーの定理の無限版は $\omega \longrightarrow (\omega)^m_n$ が任意の $m, n \in \omega$ に対し成り立つという命題であるが，これは 7.7 で証明する．

すぐに気がつかれた事実の一つは，選択公理のもとでは γ は有限でなければならない，ということであった：

7.1 命題 (Erdös-Rado [52: 434])．任意の κ に対し $\kappa \not\longrightarrow (\omega)^\omega_2$ である．

証明 $\prec$ を $[\kappa]^\omega$ 上の整列順序とし，$f\colon [\kappa]^\omega \to 2$ を，すべての $t \in [s]^\omega - \{s\}$ が $s \prec t$ を満たすとき $f(s) = 0$, そうでなければ $f(s) = 1$ として定義する．このとき，どんな $x \in [\kappa]^\omega$ も f に関して一様であり得ない：y を $[x]^\omega$ の $\prec$ に関して最小の元とすると，$f(y) = 0$ でなければならない．ところが，$\subset$ に関する任意の無限集合の無限増加列 $x_0 \subset x_1 \subset x_2 \ldots \subset x$ をとると，$f(x_n) = 0$ がすべての n について成り立つなら，$\ldots x_2 \prec x_1 \prec x_0$ となるから，これは $\prec$ が整列順序であるという仮定に矛盾する． ⊣

Erdös-Rado [56] では順序数の分割関係の一般論に関する基本的な結果が与えられている．これとは独立にクレパも Djuro Kurepa [59] で類似の結果を得ている．後に Erdös-Hajnal-Rado [65] は，基数に対する，GCH のもとでの，ほとんど完全な結果を得ている．シェラハ Shelah [75] による結果をさらに加えて，エルデシュ，ハイナル，マテ，ラドーによる本 Erdös-Hajnal-Máté-Rado [84] では，GCH を仮定しない一般の場合における，きわめて複雑な結果の詳細が論じられている．これらの証明での要(かなめ)となっているのは，木を用いて大きい一様な集合を構成するという基本的な論法である．

木とは半順序集合 $\langle T, <_T\rangle$ で，任意の $t \in T$ に対し，$<_T$ に関して t の前にある元の全体の集合 $\{u \in T \mid u <_T t\}$ が $<_T$ で整列されるものことをいう．T **の** α **番目のレヴェル**は，$t \in T$ で t の前にある元の集合が $<_T$ で順序型 α を持つようなものの全体とする．T の**高さ**とは，T の α 番目のレヴェルが空となるような最小の α として定義される．T の**連鎖**とは，T の順序に関し線型順序集合となる T の部分集合のことで，T の**反鎖**とは

$<_T$ に関し互いに比較不可能な元からなる部分集合のこととする．例えば各レヴェルは反鎖となる．T の**枝**とは，T の極大な連鎖のことで，T の**共終枝**とは，T の枝で，T の空でないレヴェルのすべてと共通部分が空でないようなものとする．T の α-枝とは，$<_T$ に関する順序型が α となるような T の枝のこととする．T の**部分木**とは，部分集合 $\overline{T} \subseteq T$ を $<_T$ による順序関係で考えたもののことをいう．集合論でいつでも仮定されていることではないが，ここでは，木の 0 番目のレヴェルはただ一つの元からなるものとし，この元を**根**と呼ぶことにする．

現代集合論では，木は，基本的な組合せ論的な対象として，いたるところに現れる．木に関する最初の組織的な研究は，クレパがパリでフレシェ(Fréchet) のもとで書いた学位論文 Kurepa [35] においてなされたが，ここでは木と線型順序集合の同値命題のいくつか，例えばスースリンの問題に関するものについて (Kurepa [35: 127ff]), が導かれている．基本的な組合せ論的結果については Levy [79: IX§2] を，L での木については Devlin [84] を，また高級な議論については Todorčević [84] を参照されたい．基本的な例としては，$\langle {}^{<\gamma}x, \subset \rangle$，つまり集合 ${}^{<\gamma}x = \bigcup_{\alpha<\gamma} {}^{\alpha}x$ を真部分集合の関係で順序付けたものがある．$x \neq \emptyset$ なら，これの高さは γ で α 番目のレヴェルは ${}^{\alpha}x$ となる．

次の補題は，木による分割の基本的な解析法を与えるもので，これの一般的な形のものは**分岐の補題**と呼ばれている（Erdös-Hajnal-Rado [65: §6] を参照）．これは，分割での大きな一様な集合と木での長い連鎖の間の密接な関係を確立し，それにより，無限組合せ論での中心的手法である**木による論法**の基礎を与える：大きな一様な集合を直接的に帰納法で構成するかわりに，ある木に長い連鎖が存在することから，十分に大きな一様な集合が存在しなければならないことを帰結するのである．この種の議論の最初のものは，よく知られたケゥーニッヒの補題 Dénes König [27] を応用するものであったが，まずこれを一般化したものを以下で考察する．§0 で取りきめたように，$f(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ の代わりに $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ と書き，このときには，$\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ が成り立っているものとする．

7.2 補題　$2 \leq n < \omega$ として，σ を基数とし，f: $[\kappa]^n \to \sigma$ とする．このとき木 $\langle \kappa, <_f \rangle$ で以下を満たすものが存在する：

(a) $\xi <_f \eta$ なら $\xi < \eta$.

(b) $\xi_1 <_f \ldots <_f \xi_{n-1} <_f \delta <_f \eta$ なら，

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \delta) = f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \eta) .$$

(c) 各 $\alpha < \kappa$ に対し，この木の α 番目のレヴェルの濃度は高々 $\sigma^{|\omega+\alpha|}$ で，σ と α が有限のときには，やはり有限となる．

証明　このような木を帰納的に定義する．まず初めの n 個のレヴェルを $0 <_f 1 <_f \ldots <_f n-1$ で定義する．$n \leq \eta < \kappa$ で，すべての $\xi < \eta$ が木の元として確定されている，つまり，$<_f|(\eta \times \eta)$ がすでに定義されている，としよう．このとき，それまでにすでに定義されている部分での連鎖 b で次の性質を持つもののうち極大なものを選ぶ：

$\xi \in b$ で $\xi' <_f \xi$ なら $\xi' \in b$,

任意の b の元の列 $\xi_1 <_f \ldots <_f \xi_n$ に対し，$f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \eta)$.

ここで，$\xi <_f \eta$ がすべての $\xi \in b$ に対し成り立つ，と定義する．

（実際には，このような b は一意に決まる：もし $b_1 \neq b_2$ が上のような b の条件を満たすものだとすると，$c = b_1 \cap b_2$ として γ_1 を $b_1 - c$ の $<_f$ での最小元とし，γ_2 を $b_2 - c$ の $<_f$ での最小元とする．例えば，$\gamma_1 < \gamma_2$ となっている，とする．このとき，$\xi_1 <_f \ldots <_f \xi_{n-1}$ が c の元なら，

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \gamma_1) = f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \eta) = f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \gamma_2)$$

となるが，γ_2 は c の上におかれているのに，$c \cup \{\gamma_1\}$ を考えると c がこのとき極大性の条件を満たしていないことになってしまい矛盾である．）

$\langle \kappa, <_f \rangle$ は (a) と (b) を満たす木になる．証明を完了させるために，(c) を帰納法で示す：極限順序数 $\alpha > 0$ に対しては，まず b が この木の α 番目のレヴェル以下の部分の極大な連鎖とすると，b は高々一つしか直後の元を持たないことに注意する：$\eta_1 < \eta_2$ が二つとも b の直後の元だったとして，任意の b の元 $\xi_1 <_f \ldots <_f \xi_{n-1}$ に対し，α が極限順序数だから $\xi \in b$ を $\xi_{n-1} <_f \xi$ ととれるが，このとき

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \eta_1) = f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi) = f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \eta_2)$$

となる．ところが，η_2 が b の上に置かれたときに，$b \cup \{\eta_1\}$ を考えると，b は極大でないことが分かるからこれは矛盾である．よって，α 番目のレヴェルの濃度は，この木の α 番目のレヴェル以下の部分の極大な連鎖の数より大きくならない．帰納法により，この数は高々 $\prod_{\beta<\alpha} \sigma^{|\omega+\beta|} = \sigma^{|\alpha|}$ となるが，これは求めていた評価となっている．

非極限順序数に関しては，まず ξ が α 番目のレヴェルの元なら，$(\alpha+1)$ 番目のレヴェルにおける ξ の直後の元は高々 $\sigma^{|\alpha|^{n-2}}$ 個しかないことに注意する：$\eta_1 < \eta_2$ が両方とも ξ の直後の元なら，ある $\xi_1 <_f \ldots <_f \xi_{n-1} \leq_f \xi$ で，

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \eta_1) \neq f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \eta_2) \tag{$*$}$$

となるものがある．そうでなければ η_2 は前と同じ議論で直後の元ではあり得なくなってしまうからである．実際，ξ_{n-1} は ξ になる．そうでなければ，$(*)$ は前の段落とまったく同じ議論で等式とならなくてはならないことが言えてしまうからである．ξ は α 番目のレヴェルの元だったから，このような $(n-2)$-組 $\langle \xi_1, \ldots, \xi_{n-2} \rangle$ は高々 $|\alpha|^{n-2}$ 個しかなく，任意の ξ の直後の元は，このような $(n-2)$-組に対して値 $f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, \xi, \eta) < \sigma$ を決定する．これらの値は，$(*)$ により直後の元ごとに異なるから，直後の元は，高々 $\sigma^{|\alpha|^{n-2}}$ 個しか存在しないことが分かる．

残りは簡単である：帰納法により，α 番目のレヴェルの濃度は高々$\sigma^{|\omega+\alpha|} \cdot \sigma^{|\alpha|^{n-2}} \leq \sigma^{|\omega+\alpha|}$ であることが示せる．また，σ も α も有限で α 番目のレヴェルが有限なら，$\sigma^{|\alpha|^{n-2}}$ は有限だから，$(\alpha+1)$ 番目のレヴェルも有限になることが分かる． ⊣

この補題がどのように使われるかを見るために，これを用いて**エルデシュ=ラドーの定理**と呼ばれている定理を証明してみる．特に，この定理により，任意の $\alpha, \delta, n \in \omega$ に対し，κ で $\kappa \longrightarrow (\alpha)^{n+1}_{\delta}$ を満たすものがあることが分かる．$n = 1$ の場合はすでに Erdös [42] で扱われている．定理は Kurepa [59] でも独立に確立されている．定理を述べるために，基数

κ を基とするベート数を，$\mathrm{beth}_0(\kappa)=\kappa$, および，$n\in\omega$ に対し，$\mathrm{beth}_{n+1}(\kappa)=2^{\mathrm{beth}_n(\kappa)}$ で定義する．

7.3 定理　(Erdös-Rado [56])．任意の κ と $n\in\omega$ に対し，

$$\mathrm{beth}_n(\kappa)^+ \longrightarrow (\kappa^+)^{n+1}_\kappa$$

が成り立つ．

証明　n に関する帰納法による．$n=0$ の場合は κ^+ が正則であることからよい．n に対し命題が成り立つと仮定して，f: $[\mathrm{beth}_{n+1}(\kappa)^+]^{n+2}\to\kappa$ とする．$<_f$ を，これに対応する，補題 7.2 でのような $\mathrm{beth}_{n+1}(\kappa)^+$ 上の木の順序とする．このとき，この木の $\mathrm{beth}_n(\kappa)^+$ 番目のレヴェルは空でない：そうでなければ補題の (c) により，

$$\mathrm{beth}_{n+1}(\kappa)^+ \ \le\ \bigcup\{\kappa^{|\alpha|}\mid \alpha<(\mathrm{beth}_n(\kappa))^+\}\ \le\ 2^{\mathrm{beth}_n(\kappa)}=\mathrm{beth}_{n+1}(\kappa)\ .$$

となり矛盾となるからである．

η を $\mathrm{beth}_n(\kappa)^+$ 番目のレヴェルの元として $C=\{\xi\mid\xi<_f\eta\}$ を考える．補題の (a) と (b) により，g: $[C]^{n+1}\to\kappa$ を

$$g(\xi_1,\ldots,\xi_{n+1})=f(\xi_1,\ldots,\xi_{n+1},\delta)\quad ここに，\quad \delta\in C-(\xi_{n+1}+1)$$

で与えることができる．ここで，帰納法の仮定により，g に対し定理を適用できるから，もとの f に対して一様な，濃度 κ^+ の C の部分集合をとることができる．　$\dashv$

ここでの $\mathrm{beth}_n(\kappa)^+$ は $\mathrm{beth}_n(\kappa)$ では置き換えられないことが知られている (Erdös-Hajnal-Rado [65]) ので，この意味で，7.3 はすでに最良の結果となっている．この事実は，それよりずっと前に知られていた $n=1$ における基本的な反例から出発して，Erdös-Hajnal-Rado [65: 118ff] での "stepping-up lemma" を用いて導くことができる：

7.4 演習　(Gödel – Erdös-Kakutani [43: 459])．任意の κ に対し，

$$2^\kappa \not\longrightarrow (3)^2_\kappa$$

である．

ヒント　$\langle f_\alpha\mid\alpha<2^\kappa\rangle$ を ${}^\kappa 2$ の枚挙として，$F(\alpha,\beta)=$ '$f_\alpha(\xi)\neq f_\beta(\xi)$ となる最小の ξ'，として定義される F: $[2^\kappa]^2\to\kappa$ を考えればよい．　$\dashv$

7.5 命題　(Sierpiński [33]; $\kappa=\omega$ の場合は：Kurepa [41: 487])．任意の κ に対し，

$$2^\kappa \not\longrightarrow (\kappa^+)^2_2\ .$$

証明　$<$ を ${}^\kappa 2$ の辞書式順序とする．つまり，$f\neq g\in{}^\kappa 2$ に対し，$f<g \ \Leftrightarrow\ f(\alpha)\neq g(\alpha)$ となる最小の $\alpha<\kappa$ に対し，$f(\alpha)<g(\alpha)$ が成り立つ，とする．$\langle f_\alpha\mid\alpha<2^\kappa\rangle$ を ${}^\kappa 2$ の枚挙として，F: $[2^\kappa]^2\to 2$ を，$f_\alpha<f_\beta$ なら，$F(\alpha,\beta)=0$, そうでなければ，$F(\alpha,\beta)=1$, と定義する．

F に関する一様な集合 $H \in [2^\kappa]^{\kappa^+}$ があったとして矛盾を導く．$F``[H]^2 = \{0\}$ としてみる (他の場合も全く同様である)．各々の $\alpha \in H$ に対し，$d(\alpha)$ を，ある $\gamma \in H$ に対し $f_\alpha|\xi = f_\gamma|\xi$ となるが，$f_\alpha(\xi) < f_\gamma(\xi)$ であるような最小の順序数 $\xi < \kappa$ とする．$\xi < \kappa$ に対し，

$$H_\xi = \{\alpha \in H \mid d(\alpha) = \xi\}$$

とおく．任意の $\xi < \kappa$ に対し，$\alpha, \beta \in H_\xi$ なら，$f_\alpha|\xi = f_\beta|\xi$ となることに注意する．したがって，$\alpha \in H_\xi$ と $\gamma \in H$ が $f_\alpha|\xi = f_\gamma|\xi$ だが $f_\alpha(\xi) < f_\gamma(\xi)$ となっていれば，H_ξ の別の元もこの γ に関して同じ性質を持つ．よって，$H_\xi \subseteq \{\alpha \in H \mid f_\alpha < f_\gamma\}$ となり，一様性から H は $<$ に関し順序型 κ^+ に整列されていているから，$|H_\xi| \le \kappa$ である．ところが，$H = \bigcup_{\xi<\kappa} H_\xi$ だから，これは κ^+ が正則基数であることに矛盾する． ⊣

任意の λ に対し，7.3 を用いることで，列 $\langle \lambda_k \mid k \in \omega \rangle$ で，$\lambda_0 = \lambda$ かつ，$k \in \omega$ に対し，$\lambda_{k+1} \longrightarrow (\alpha)^n_\delta$ が任意の $\alpha, \delta < \lambda_k$ と $n \in \omega$ で成り立つようなものがとれる．このことから，$\kappa = \sup(\{\lambda_k \mid k \in \omega\})$ とすると，$\kappa > \lambda$ で，$\kappa \longrightarrow (\alpha)^n_\delta$ が任意の $\alpha, \delta < \kappa$ と $n \in \omega$ に対し成り立つことが分かる．次の結果は，ラムズィーの結果 $\omega \longrightarrow (\omega)^2_2$ の自然な拡張に関するものである：

7.6 系 (Erdös). $\kappa > \omega$ で，$\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$ なら，κ は到達不可能となる．

証明 まず，κ は正則であることを示す：もしそうでなければ，ある $\gamma < \kappa$ に対し，互いに素な集合族の和集合 $\kappa = \bigcup_{\xi<\gamma} X_\xi$ で，$|X_\xi| < \kappa$ が各 $\xi < \gamma$ に対し成り立つようなものとして κ を表せるが，関数 f: $[\kappa]^2 \to 2$ を，α と β が同一の X_ξ の元なら $f(\alpha, \beta) = 0$, そうでなければ $f(\alpha, \beta) = 1$, として定義すると，これは濃度 κ の一様な集合を持ち得ない．

次に κ が強極限であることを示す：そうでなければ，$\lambda < \kappa$ で，$\kappa \le 2^\lambda$ となるものがある．しかし，このときには，$\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$ は，λ に対する 7.5 に矛盾する． ⊣

これより弱い，κ は弱到達不可能である，という結論は Erdös [42] でほとんど陽に述べられている（Erdös-Tarski [43: 328] を参照されたい）．

木の性質

7.3 の証明は大きな一様な集合の存在が木での長い連鎖の存在に関連付けられることを示している．$\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$ に関する議論で鍵となるのは，7.3 での濃度の議論をクレパが Kurepa [35] で考察している強い性質で置き換えることである：**κ-木**とは高さが κ の木で，各レヴェルの濃度は κ 未満であるようなものをいう．

κ が**木の性質**を持つ，とは，すべての κ-木が共終枝を持つことである．

この性質は，ここの言葉で言うと，ω **は木の性質を持つ**ことを主張するよく知られたケゥーニッヒの補題 König [27] の拡張となっている．

7.7 演習 （$\kappa = \omega$ の場合は，Ramsey [30], $n = \lambda = 2$ の場合は，Erdös-Tarski [43: 328] による） κ は ω または，到達不可能で木の性質を持つとする，このとき任意の $n \in \omega$ と $\lambda < \kappa$ に対し，$\kappa \longrightarrow (\kappa)^n_\lambda$ が成り立つ．

ヒント　7.3での帰納法による議論を用いる；$\kappa = \omega$ の場合には，7.2(c) の主張の最後の部分を適用する．　⊣

ラムズィーのもとの証明も基本的には上のようなものであった．もっとも彼はケゥーニッヒの補題について明言しているわけではない．

§4で述べたように，Erdös-Tarski [43] の最後の部分で予告された結果の詳細は，バークレイでの 1958-9 年のモストフスキーとタルスキーのセミナーで与えられ，Erdös-Tarski [61] に発表された．ハンフ (§4) とスコット (§5) の決定的な結果がこれに続くことになるのであるが，それに加えて，木と分割による弱コンパクト性の同値命題も，間もなく得られている：

7.8 定理　(Erdös-Tarski [43, 61], Hanf [64a], および Monk-Scott [64]). $\kappa > \omega$ に対し，次は同値である：

(a) κ は弱コンパクトである．

(b) κ は到達不可能で木の性質を持つ．

(c) $\kappa \longrightarrow (\kappa)^n_\lambda$ がすべての $n < \omega$ と $\lambda < \kappa$ に対し成り立つ．

(d) $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$ が成り立つ．

証明　(a) → (b). 記述不可能性は弱コンパクト性から帰結できる．木の性質は，コンパクト性に関する典型的な議論で示すことができる：$\langle T, <_T \rangle$ を κ-木とする．各 $t \in T$ に（0 変数の）命題記号 P_t を対応させ，次のような $L_{\kappa\omega}$ の文からなる集合を考える：各 $\alpha < \kappa$ に対し，離接 $\bigvee \{P_t \mid t$ は T の α 番目のレヴェルの元$\}$; $<_T$ で比較不可能な $t, t' \in T$ に対し，$\neg(P_t \wedge P_{t'})$. T の高さは κ だから，この κ 個の文の集まりは κ-充足可能であることが分かる．したがって，弱コンパクト性から，この集合は充足可能となる．$\mathcal{M}$ をこのモデルとすると，$\{t \in T \mid \mathcal{M} \models P_t\}$ は T の共終枝となる．

(b) → (c) は 7.7 から導ける．(c) → (d) は明らかである．証明を完了させるには，(d) → (b) → (a) を示すのが都合がよい．

(d) → (b). 到達不可能性は 7.6 から帰結できる．木の性質を示すために，$\langle T, <_T \rangle$ を κ-木とする．$|T| = \kappa$ だから，$T = \kappa$ と仮定してよい．$\xi < \kappa$ が $\geq \alpha$ 番目のレヴェルの元なら，$\pi_\alpha(\xi)$ を ξ の前にある T の元で α 番目のレヴェルの元となっているものとする（ただし，ξ 自身が α 番目のレヴェルの元なら，$\pi_\alpha(\xi) = \xi$ とする）．$<_T$ で比較不可能な 2 つの元 ξ, η の順序を以下のように指定することで，$<_T$ を線型順序に拡張することができる：α を $\pi_\alpha(\xi) \neq \pi_\alpha(\eta)$ となるような最小のものとして，$\xi \prec \eta \iff \pi_\alpha(\xi) < \pi_\alpha(\eta)$ と定義する．

ここで，$f\colon [\kappa]^2 \to 2$ を，（$\xi < \eta$ で）$\xi \prec \eta$ なら，$f(\xi, \eta) = 0$, そうでなければ $f(\xi, \eta) = 1$ として定義する．$\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$ により，f に関して一様な $H \in [\kappa]^\kappa$ がとれる．T の各レヴェルは濃度が κ 未満だから，$\rho_\alpha < \kappa$ で，$\rho_\alpha < \xi$ かつ $\xi \in H$ なら，ξ は $\geq \alpha$ 番目のレヴェルに属しているようなものがとれる．$\prec$ の定義から，2 つの順序数 $\gamma \prec \delta$ のレヴェルが両方とも $\geq \alpha$ なら，$\pi_\alpha(\gamma) \prec \pi_\alpha(\delta)$ または，$\pi_\alpha(\gamma) = \pi_\alpha(\delta)$ である．したがって，もし $f``[H]^2 = \{0\}$ なら，$\langle \pi_\alpha(\xi) \mid \rho_\alpha < \xi \wedge \xi \in H \rangle$ は $\xi$ で $\prec$ に関し減少的でない．同様に，$f``[H]^2 = \{1\}$ なら，これは ξ で $\prec$ に関し増加的でない．いずれの場合にも，$\sigma_\alpha < \kappa$

と b_α で，$\sigma_\alpha < \xi$ かつ $\xi \in H$ なら，$\pi_\alpha(\xi) = b_\alpha$ となるようなものがとれる．2つの b_α の形をした元は，$<_T$ に関し T で後にある元を共有するから，$\langle b_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ は枝となっていることが分かる．

(b) → (a). 弱コンパクト性と同値な拡張の性質 (4.5) が成り立つことを示す．$R \subseteq V_\kappa$ とする．このとき，推移的な $X \neq V_\kappa$ と $S \subseteq X$ で，$\langle V_\kappa, \in, R \rangle \prec \langle X, \in, S \rangle$ となるものがとれればよい．κ は到達不可能だから，6.1 により，

$$\{\alpha < \kappa \mid \langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha \rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R \rangle\}$$

は κ で閉非有界である．$\langle \alpha_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$ をこれの増加的な枚挙とする．

ここで，木 $\langle T, <_T \rangle$ を定義する．$\langle V_\kappa, \in, R \rangle$ でのスコーレム関数の完全族（§0 を参照）を固定して，以下で $X \subseteq V_\kappa$ のスコーレム閉包と言ったときには，この完全族に関するものとする．$\alpha_\xi < \beta < \kappa$ に対し，

$$H(\xi, \beta) = V_{\alpha_\xi} \cup \{\beta\} \text{ の } \langle V_\kappa, \in, R \rangle \text{ でのスコーレム閉包}$$

とする．したがって，

$$\langle V_{\alpha_\xi}, \in, R \cap V_{\alpha_\xi} \rangle \prec H(\xi, \beta)$$

となる．

$$H(\xi,\beta) \approx H(\overline{\xi},\overline{\beta}) \iff \xi = \overline{\xi} \text{ で，これらの構造間の同型写像で，} V_{\alpha_\xi} \text{ は動かさず } \beta \text{ を } \overline{\beta} \text{ に移すものが存在する}$$

と定義する．明らかに $\approx$ は同値関係となるので，$[H(\xi,\beta)]$ で $H(\xi,\beta)$ の同値類を表すことにする．T の元はこれらの $[H(\xi,\beta)]$ として，

$$[H(\xi,\beta)] <_T [H(\overline{\xi},\overline{\beta})] \iff \xi < \overline{\xi},\ \beta \le \overline{\beta} \text{ で } H(\xi,\beta) \text{ は } H(\overline{\xi},\overline{\beta}) \text{ での } V_{\alpha_\xi} \cup \{\overline{\beta}\} \text{ のスコーレム閉包と同型になる}$$

とする．$\langle T, <_T \rangle$ が実際に木になることは容易に示せる;T の ξ 番目のレヴェルは $\{[H(\xi,\beta)] \mid \alpha_\xi < \beta < \kappa\}$ となることに注意すればよい．$\langle T, <_T \rangle$ が κ-木になることは，κ の到達不可能性により，集合 x に対して，$V_{\alpha_\xi} \cup \{x\}$ から生成されるスコーレム閉包の可能な数は同型を除いて $2^{|V_{\alpha_\xi}|} < \kappa$ しかないことから分かる．

したがって，木の性質から，T の κ-枝 $\langle [H(\xi, \beta_\xi)] \mid \xi < \kappa \rangle$ が存在する．$<_T$ の定義から，$\xi \le \eta < \kappa$ なら，初等的埋め込み $i_{\xi\eta}$: $H(\xi,\beta_\xi) \prec H(\eta,\beta_\eta)$ で V_{α_ξ} を動かさないものが存在する．よって，$i_{\xi\eta}(\beta_\xi) = \beta_\eta$ である．定義から，$\xi \le \eta \le \rho < \kappa$ なら，$i_{\xi\rho} = i_{\eta\rho} \circ i_{\xi\eta}$ となることが分かる．したがって，これの順極限 (§0) をとることができ，$\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ により，この順極限は整順的となる．これの推移的崩壊 (0.4) $\langle X, \in, S \rangle$ は $\langle V_\kappa, \in, R \rangle$ の初等的拡張となる．β_ξ はすべて同一の $\beta \ge \kappa$ となる $\beta \in X$ に対応するから，$\langle X, \in, S \rangle$ は求めるものとなっている． ⊣

(a) → (b) の証明は弱コンパクト性が，それの定義での性質を $L_{\kappa\omega}$ の述語論理に制限したものと同値になることを示している．それはともかく，今日では，この概念の無限言語

によるもともとの定義より，もっと直接的な記述，特に (b) が好まれる傾向がある．ケゥーニッヒの補題が $L_{\omega\omega}$ のコンパクト性の数学的な本質であるように，木の性質は，これの一般化における要点となっている．弱コンパクト性の木に関連した性質による他の特徴付けは，Baumgartner [75: 123], Shelah [79],Erdös-Hajnal-Máté-Rado [84: §31]（これも Baumgartner による結果である），Todorčević [87] で与えられている．Keisler-Tarski [64] でも述べられていた (§4) ように，弱コンパクト基数の大きさに関する結果の純粋に組合せ論的な証明はまさに待ち望まれていたことであった．

到達不可能性，したがって，分割の性質 $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$ から切り離して考えたときの木の性質は，特に強制法が発見された後に到達不可能でない基数に対しての相対的無矛盾性の結果が得られるようになってくると，それ自身として大変興味のある研究対象であると考えられるようになった．ω_1 が木の性質を持たない，ということはアロンシャイン Nathan Aronszajn による 1934 の結果で，これは，Kurepa [35: 96] で発表され，Erdös-Tarski [43: 328] で（間違って）引用されている．当時パリでクレパと同期の学生であったアロンシャインはロジックではあまり目立たない存在のように思えるかもしれないが，彼は後に関数解析の専門家として有名になっている（例えば，Aronszajn [52] を参照）．彼の集合論に関する論文は Aronszajn [52a] 一つのみで，しかもこの論文は木とはまったく関係がないのであるが，それにもかかわらず彼の名前が無限組合せ論で常用の表現となってしまったというのは，数学史での偶然と言うべきであろう：

κ-アロンシャイン木とは κ-木で共終枝を持たないもののことである．

つまり，κ-アロンシャイン木は，κ の木の性質に対する反例となっているようなものである．**κ が特異基数なら κ-アロンシャイン木は存在する**，ということを注意しておく：$\kappa - \{0\} = \bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ を互いに素な和で，$\gamma < \kappa$, かつ，$|X_\alpha| < \kappa$ が各 $\alpha < \gamma$ に対し成り立っているとして，$\langle \kappa, <_T \rangle$ を，$\xi <_T \zeta \iff \xi < \zeta$ で $\xi, \zeta \in \{0\} \cup X_\alpha$ がある $\alpha < \gamma$ に対し成り立つ，として考えればよい．正則な κ については，一様に幅のない κ-木は常に共終枝を持つ：

7.9 命題 (Kurepa [35: 80])．κ を正則とし，$\lambda < \kappa$ とする．$\langle T, <_T \rangle$ が κ-木で，各レヴェルの濃度は λ 未満なら，$\langle T, <_T \rangle$ は共終枝を持つ．

証明　もし必要なら，この木を刈り込むことにより，極限レヴェルの異なる元は，前のどれかのレヴェルで，異なった $<_T$ に関する前の元を持つ，としてよい．さらに $T = \kappa$ としてよい．T_α でこの木の α 番目のレヴェルを表すことにする．$|T_\alpha| < \lambda$ である．まず λ が正則であると仮定して結果を導く：

$\mathrm{cf}(\alpha) = \lambda$ となる各 $\alpha < \kappa$ に対し，$\xi_\alpha \in T_\alpha$ を選ぶ．このような α に対し，$f(\alpha) < \alpha$ を，任意の $\xi \in T_\alpha - \{\xi_\alpha\}$ に対し，ξ と ξ_α が $T_{f(\alpha)}$ で共通の $<_T$ に関する前の元を持っていないようにとれる．$\{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \lambda\}$ は κ で定常だから，0.1(c) により，κ の非有界な部分集合 X で f がこの上で一定の値，例えば γ をとるものがある．$|T_\gamma| < \kappa$ により，κ で非有界な $Y \subseteq X$ で，T_γ の一つの元が $\{\xi_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ のすべての元の $<_T$ に関する前の元となるようなものがある．ところが，このときには，$\{\xi_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ が $\langle \kappa, <_T \rangle$

での連鎖となることはすぐに分かるから，これにより共終枝が得られる．

$\lambda < \kappa$ が特異基数のときには，正則な $\nu < \lambda$ で，$Y = \{\alpha < \kappa \mid |T_\alpha| < \nu\}$ が κ で非有界となるものがある．上の議論により，$\bigcup_{\alpha \in Y} T_\alpha$ により得られる部分木は共終枝を持つ．ところが，そのような枝はもとの木での共終枝を生成する． ⊣

スペッカー Specker はアロンシャインのもとの結果を，濃度に関するある仮定によるものに拡張している．以下でこの命題のトドゥチェヴィッチ Stevo Todorčević による，"minimal walk" を用いた大変にエレガントな証明を与える：

7.10 定理 ($\kappa = \omega$ の場合は Aronszajn – Kurepa [35: 96]; Specker [49])．κ が正則で $2^{<\kappa} = \kappa$ なら，κ^+-アロンシャイン木が存在する．

証明 (Todorčević [87])．各 $\alpha < \kappa^+$ に対し，C_α を α の閉非有界な部分集合で順序型 $\leq \kappa$ を持つものとする；非極限順序数については単に $\xi \in C_{\xi+1}$ となるようにすればよい．ρ_β: $\beta \to {}^{<\omega}[\mathcal{P}(\beta)]$ を各 $\beta < \kappa^+$ に対し次のように定義する：任意の $\alpha < \beta$ に対し，$\beta_0^\alpha = \beta$ とし，$\beta_{i+1}^\alpha = \min(C_{\beta_i^\alpha} - \alpha) < \beta_i^\alpha$ として，これを $\beta_n^\alpha = \alpha$ となるまで続ける．ここで，

$$\rho_\beta(\alpha) = \langle C_{\beta_i^\alpha} \cap \alpha \mid i < n \rangle$$

とする．いくつかの性質について注意しておく：

(i) $\xi < \alpha < \beta < \kappa^+$ なら，$j \in \omega$ で $\beta_i^\xi = \beta_i^\alpha$ が $i \leq j$ に対して成り立ち，$\xi \leq \beta_{j+1}^\xi < \alpha$ となるようなものが一意に存在する．

(ii) $\xi < \alpha < \beta < \kappa^+$ で，$\rho_\beta(\xi)$ と $\rho_\beta(\alpha)$ が同じ長さ n を持つなら，ある $j < n$ に対し，$C_{\beta_j^\xi} \cap \xi$ は $C_{\beta_j^\alpha} \cap \alpha$ の真の始片となる．

(iii) $\alpha < \beta < \gamma$ で $\rho_\beta(\alpha) = \rho_\gamma(\alpha)$ なら，$\rho_\beta|\alpha = \rho_\gamma|\alpha$ となる．

(ii) を示すには，j を (i) のようにとると，$\beta_j^\xi = \beta_j^\alpha$ となり，β_{j+1}^ξ が $C_{\beta_j^\alpha} \cap \alpha$ に属していることから，$C_{\beta_j^\xi} \cap \xi$ は $C_{\beta_j^\alpha} \cap \alpha$ の真の始片となる．(iii) には，$\xi < \alpha$ として，j を，$\beta_j^\xi = \beta_j^\alpha$ かつ $\gamma_j^\xi = \gamma_j^\alpha$ となるような最大のものとする．このとき，$i \leq j$ に対しては，$\rho_\beta(\alpha) = \rho_\gamma(\alpha)$ から，$C_{\beta_i^\alpha} \cap \alpha = C_{\gamma_i^\alpha} \cap \alpha$ となるから，$C_{\beta_i^\xi} \cap \xi = C_{\gamma_i^\xi} \cap \xi$ が導かれる．さらに，(i) により，$\beta_{j+1}^\xi < \alpha$ か，あるいは $\gamma_{j+1}^\xi < \alpha$ となっている．どちらの場合にも，$\rho_\beta(\alpha) = \rho_\gamma(\alpha)$ により $C_{\beta_j^\alpha} \cap \alpha = C_{\gamma_j^\alpha} \cap \alpha$ となるから，$\beta_{j+1}^\xi = \gamma_{j+1}^\xi$ となり，したがって，$i \geq j$ に対しても，$\beta_i^\xi = \gamma_i^\xi$ である．よって $\rho_\beta(\xi) = \rho_\gamma(\xi)$ となる．

$$T = \{\rho_\beta|\alpha \mid \alpha \leq \beta < \kappa^+\}$$

とおと，$\langle T, \subset \rangle$ は高さ κ^+ の木となるが，これは，κ^+-アロンシャイン木である：まず，b が T の共終枝だったとすると，$f = \bigcup b$ は定義域 κ^+ を持つ関数となる．C_α の順序型は高々 κ だから，$X \subseteq \kappa^+$ で，$|X| = \kappa^+$ かつ，ある固定された $n \in \omega$ と順序数の列 $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ で，任意の $\alpha \in X$ に対し $f(\alpha)$ は n 個の元を持ち，そのうちの i 番目の元

は順序型 ζ_i を持っているというようにできる．ところが，このことから，(ii) により，b は枝であり得ないから，矛盾である．

あとは，$2^{<\kappa} = \kappa$ で κ は正則だから，任意の $\alpha < \kappa^+$ に対し，ρ_β の定義と (iii) により，T の α 番目のレヴェルの濃度は高々

$$|\{C_\beta \cap \alpha \mid \alpha \leq \beta < \kappa^+\}| \ \leq \kappa^{<\kappa} = \kappa$$

となることに注意すればよい．　⊣

κ^+-アロンシャイン木の最初の構成法では，これに続く展開で重要になるある性質もさらに成り立つことが保証されていた．

κ-木が**特殊**であるとは，κ 未満の個数の反鎖の和集合として表せることである．

明らかに，**特殊な κ-木は，κ-アロンシャイン木である**．トドウチェヴィッチによる構成法でも，特殊な κ^+-木を得ることができる：

7.11 演習　7.10 の仮定のもとで，特殊な κ^+-木が存在する．

ヒント　前出の構成を変更して，

$$\overline{\rho}_\beta(\alpha) = \langle \mathrm{ot}(C_{\beta_i^\alpha} \cap \alpha) \mid i < n \rangle$$

で与えられる，$\overline{\rho}_\beta\colon \beta \to {}^{<\omega}\kappa$ をとり，

$$\overline{T} = \{\overline{\rho}_\beta|(\alpha+1) \mid \alpha < \beta < \kappa^+\}$$

とする．前出の (ii) により，各 $\overline{\rho}_\beta$ は単射となるから，$s \in {}^{<\omega}\kappa$ に対し，

$$A_s = \{f \in \overline{T} \mid \exists\alpha(\mathrm{dom}(f) = \alpha + 1 \ \wedge \ f(\alpha) = s)\}$$

は，$\langle \overline{T}, \subset \rangle$ の反鎖となり，$\overline{T} = \bigcup\{A_s \mid s \in {}^{<\omega}\kappa\}$ である．　⊣

上とは対照的に，$2^{\aleph_0}$ より小さいか等しい基数が木の性質を持ち得るということの最初の徴候を示す結果は，次のようなものであった．

7.12 命題　(Silver [66, 71])．κ が実数値可測なら，κ は木の性質を持つ．

これは，後で関連する文脈で述べるように (16.4(c)), 7.9 の直接的な帰結として得られる．この後，1980 年代の終わりまで，ZFC における木の性質から導かれる新しい帰結はほとんど得られていない．一方，1970 年代に得られた巨大基数のもとでの無矛盾性の結果は，ω_2 のような到達不可能でない基数での可能性を明らかにした（第 II 巻の木の性質の項を参照）．

すべての有限部分集合の族の分割

エルデシュ，ハイナル，ラドーの定式化した，もう一つの分割の関係は，モデル理論の手法のさらに直接的な巨大基数の研究への応用をうながすことになる．$x \subseteq \mathrm{On}$ に対し，

$[x]^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega}[x]^n$ だったことを思い出しておこう．次の分割の関係は，Erdös-Hajnal [58: 113] で初めて扱われている：

$$\beta \longrightarrow (\alpha)_\delta^{<\omega}$$

は，任意の $f\colon [\beta]^{<\omega} \to \delta$ に対し，$H \in [\beta]^\alpha$ で，f に関し一様になるもの，つまり，$|f``[H]^n| \leq 1$ がすべての $n \in \omega$ に対し成り立つものが存在する，という命題を表す．これは別の言いかたをすると，すべての n に対し，H は $f|[\beta]^n$ に関し前の意味で一様になっているということである．$\alpha \geq \omega$ に対し

エルデシュ基数 $\kappa(\alpha)$ とは，$\lambda \longrightarrow (\alpha)_2^{<\omega}$ の成り立つような最小の λ とする．

この記法を用いるときには，$\lambda \longrightarrow (\alpha)_2^{<\omega}$ を満たす λ が存在するということを暗黙に仮定する：普通の分割の関係とは違い，これは ZFC では確立することができない（7.15(b) を参照）．次にエルデシュ基数の固定点を考える：

κ が**ラムズィー基数**とは，$\kappa \longrightarrow (\kappa)_2^{<\omega}$ が成り立つこととする．

特に，**ラムズィー基数は弱コンパクトである．** 歴史的には，このような分割の関係に関する最初の言及は，"ラムズィー基数" という命名が実際にはむしろあまり適当でないことを示す，次のような結果であった：

7.13 演習 (Erdös-Rado [52: 435])．ω はラムズィー基数でない．

ヒント $f\colon [\omega]^{<\omega} \to 2$ を，$k_1 \leq n$ なら $f(k_1, \ldots, k_n) = 0$ そうでなければ，$= 1$ として定義されるものとすると，f は一様な無限集合を持たない． ⊣

次のような証明は初期の組合せ論での典型的な論法である：

7.14 命題 $\alpha \geq \omega$ とするとき：

(a) $\alpha < \beta$ なら，$\kappa(\alpha) < \kappa(\beta)$ となる．

(b) $\kappa(\alpha)$ は正則基数である．

(c) κ がラムズィー基数となるのは，任意の $\gamma < \kappa$ に対し $\kappa \longrightarrow (\kappa)_\gamma^{<\omega}$ となる，ちょうどそのときである．

証明 (a) 各 $\gamma < \kappa(\alpha)$ に対し，$f_\gamma\colon [\gamma]^{<\omega} \to 2$ を順序型 α の一様な集合を持たないようなものとする．$g\colon [\kappa(\alpha)]^{<\omega} \to 2$ を $g(\xi_1, \ldots, \xi_n) = f_{\xi_n}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$（かつ，$n = 1$ なら $= 1$）として定義する．H が g に関して一様な集合とすると，$\gamma < \kappa(\alpha)$, $\gamma \in H$ に対し $H \cap \gamma$ は f_γ に関して一様になるから，この順序型は $< \alpha$ となる，したがって，H の順序型は $\leq \alpha$ となるから，$\kappa(\alpha) < \kappa(\beta)$ である．

(b) $\kappa(\alpha)$ が特異基数だったとして矛盾を導く．このときには，ある $\delta < \kappa(\alpha)$ に対し，減少的でない関数 $h\colon \kappa(\alpha) \to \delta$ で $|h^{-1}(\{\gamma\})| < \kappa(\alpha)$ が各 $\gamma < \delta$ に対し成り立つようなものが存在する．$f\colon [\delta]^{<\omega} \to 2$ と各 $\gamma < \delta$ に対し $f_\gamma\colon [h^{-1}(\{\gamma\})]^{<\omega} \to 2$ を，それぞれ一様な集合で順序型が α となるようなものを持たないものとする．ここで，$g\colon [\kappa(\alpha)]^{<\omega} \to 2$ を，

$$g(\xi_1,\ldots,\xi_n)=\begin{cases}0 & n=2 \text{ で } h(\xi_1)=h(\xi_2) \text{ のとき}\\ 1 & n=2 \text{ で } h(\xi_1)<h(\xi_2) \text{ のとき}\\ f_\gamma(\xi_3,\ldots,\xi_n) & n>2 \text{ で } h(\xi_1)=\cdots=h(\xi_n)=\gamma \text{ のとき}\\ f(h(\xi_3),\ldots,h(\xi_n)) & n>2 \text{ で } h(\xi_1)<\cdots<h(\xi_n) \text{ のとき}\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

と定義する．$\overline{H}\in[\kappa(\alpha)]^\alpha$ が g に関し一様だったとして，ρ_1 と ρ_2 を $\overline{H}$ の初めの2つの元とする．$\alpha\geq\omega$ だから，$H=\overline{H}-\{\rho_1,\rho_2\}$ の順序型も α となる．$g``[\overline{H}]^2=\{0\}$ なら，$\gamma<\delta$ で $h``\overline{H}=\{\gamma\}$ となるものがあるから，ρ_1 と ρ_2 を g の定義での3番目の場合での ξ_1 と ξ_2 としてとると，H は f_γ に関して一様になることが分かるが，これは矛盾である．$g``[\overline{H}]^2=\{1\}$ なら，$h``\overline{H}$ の順序型は α となり，ρ_1 と ρ_2 を g の定義での4番目の場合での ξ_1 と ξ_2 としてとると，$h``H$ が f に関して一様になることが分かるが，これも矛盾である．したがって，$\kappa(\alpha)$ は正則でなくてはならない．

(c) ある $\gamma<\kappa$ に対し，f: $[\kappa]^{<\omega}\to\gamma$ とする．g: $[\kappa]^{<\omega}\to 2$ を，$n=2m$ で，$f(\xi_1,\ldots,\xi_m)=f(\xi_{m+1},\ldots,\xi_n)$ なら $g(\xi_1,\ldots,\xi_n)=0$, そうでなければ，$g(\xi_1,\ldots,\xi_n)=1$ として定義する．$H\in[\kappa]^\kappa$ が g にし関て一様だったとすると，$\gamma<\kappa$ だから，$s,t\in[H]^m$ で，$\max(s)<\min(t)$ かつ，$f(s)=f(t)$ となるものが存在する．したがって，$g(s\cup t)=0$ となり，一様性から，$g``[H]^n=\{0\}$ である．任意の $u,v\in[H]^m$ に対し，$w\in[H]^m$ を，$\max(u),\max(v)<\min(w)$ となるようにとると，$f(u)=f(w)=f(v)$ となる．したがって，H は f に関しても一様である．　⊣

Erdös-Hajnal-Rado [65: §17] は組合せ論の技法を駆使して，α が基数である場合には，$\kappa(\alpha)$ が大きなものとなることを示している．しかし，モデル理論の手法を用いることで，そこでの結果よりずっと良いものを得ることができる．次のものは 7.14(c) を一般化する基本的な結果であるが，これも最初はモデル理論的な方法で証明されている．ここで与える証明はさらに簡明なもので， Baumgartner-Galvin [78] でのアイデアに基づく：

7.15 命題　(Silver [66]). $\alpha\geq\omega$ を極限順序数とする．このとき，

(a) 任意の $\gamma<\kappa(\alpha)$ に対し，$\kappa(\alpha)\longrightarrow(\alpha)^{<\omega}_\gamma$ となる．

(b) $\kappa(\alpha)$ は到達不可能である．

証明　(a) $\kappa=\kappa(\alpha)$ として，まず 7.14(c) と同じ議論により，$\kappa\longrightarrow(\alpha)^{<\omega}_t$ が任意の $t\in\omega$ に対し成り立つことに注意する．

$\gamma<\kappa$ に対し，f: $[\kappa]^{<\omega}\to\gamma$ として，g: $[\gamma]^{<\omega}\to 2$ は順序型 α の一様な集合を持たないとする．h: $[\kappa]^{<\omega}\to 4$ を $n=2^i3^j$ がどの $i,j>0$ に対しても成り立たないときには，$h(\xi_1,\ldots,\xi_n)=0$, このような $i,j>0$ が存在するときには，

$$h(\xi_1,\ldots,\xi_n)=\begin{cases}0 & f(\xi_1,\ldots,\xi_i)=f(\xi_{i+1},\ldots,\xi_{2i})\text{ のとき}\\ 1 & f(\xi_1,\ldots,\xi_i)>f(\xi_{i+1},\ldots,\xi_{2i})\text{ のとき}\\ 2 & \langle f(\xi_{ik+1},\ldots,\xi_{i(k+1)})\mid k<j\rangle\text{ が } j \text{ 個の元からなる } g \text{ に関し}\\ & \text{一様な順序数の集合の増加列による枚挙となっているとき}\\ 3 & \text{それ以外のとき}\end{cases}$$

と定義する．最初に述べた注意により，$H\in[\kappa]^\alpha$ で h に関して一様なものが存在する．$h``[H]^{<\omega}=\{0\}$ なら，7.14(c) での議論により $H$ は $f$ に関しても一様となっていることが導ける．そこで，$\overline{n}=2^{\overline{i}}3^{\overline{j}}$, $h``[H]^{\overline{n}}\neq\{0\}$ として矛盾が導ければよい．

まず，$h``[H]^{\overline{n}}\neq\{1\}$ でもあることに注意する．そうでなければ，順序数の無限下降列がとれてしまうからである．$\langle\zeta_\beta\mid\beta<\alpha\rangle$ を $H$ の増加列による枚挙として，すべての $\beta<\alpha$ に対し $\eta_\beta=f(\zeta_{\overline{i}\beta+1},\ldots,\zeta_{\overline{i}(\beta+1)})$ とする．これは $\alpha$ が極限順序数であることから可能である．$h``[H]^{\overline{n}}\neq\{0\},\{1\}$ により，$\langle\eta_\beta\mid\beta<\alpha\rangle$ は真の増加列となっている．特に，$j>0$ として $n=2^{\overline{i}}3^j$ の形をした任意の自然数に対し，$h``[H]^n\neq\{0\},\{1\}$ となっていることが分かる．以下で $h``[H]^n=\{2\}$ がすべてのこのような n に対し成り立つことを示すが，このことから $\{\eta_\beta\mid\beta<\alpha\}$ の任意の有限部分集合は g に関し一様となり，したがって，この集合自身も g に関し一様であることが導ける．ところが，これは g の選び方に矛盾するから，これにより証明が完了する．

与えられた $n=2^{\overline{i}}3^j$ で $j>0$ となるものに対し上の主張を示すために，ラムズィーの定理 7.7 を j 回適用して，すべての $k<j$ で $g|[\gamma]^k$ に関する一様な集合となるような無限集合 $W\subseteq\{\eta_\beta\mid\beta<\omega\}$ をとる．$\eta_{\beta_1}<\cdots<\eta_{\beta_j}$ を W の最初の j 個の元とする．このとき，h は任意の

$$\zeta_{\overline{i}\beta_1+1},\ldots,\zeta_{\overline{i}(\beta_1+1)},\zeta_{\overline{i}\beta_2+1},\ldots,\zeta_{\overline{i}(\beta_2+1)},\ldots,\zeta_{\overline{i}\beta_j+1},\ldots,\zeta_{\overline{i}(\beta_j+1)}$$

で始まっているような n-組に対し値 2 をとる．したがって一様性により $h``[H]^n=\{2\}$ である．

(b) 7.14(b) により $\kappa(\alpha)$ は正則基数だから，これが強極限であることを示せばよい．ところが，もし，$\lambda<\kappa$ だが，$2^\lambda\geq\kappa$ となるものがあったとすれば，λ に対する 7.4 により，$\kappa\not\to(3)^2_\lambda$ となってしまう．これは (a) に矛盾である． ⊣

7.15(b) とは対照的に，$\alpha\geq\omega$ と $n<\omega$ に対し，$\kappa(\alpha+n+1)$ は $\kappa(\alpha)$ から到達可能である；7.3 での記法を使うと $\kappa(\alpha+n+1)=\mathrm{beth}_n(\kappa(\alpha))^+$ が成り立つ（これは S. Thompson の結果である —— Drake [74: 221] を参照）．

到達不可能性がからんでいる可能性を示唆する最初の結果は 7.15(b) の特殊な場合で，Erdös-Hajnal [58: 125] によるとこれはフォドァ Géza Fodor により得られている．エルデシュとハイナルは**可測基数はラムズィーである**という結果も得ている．Erdös-Hajnal [62] では，実質的には簡明な 7.14(a) に気が付いていて，これを用いると，最小の到達不可能基数が可測基数でないことが簡単に証明できることを注意しているが，これはハンフ=タルスキーの結果の得られるより数年前のことであった．この成果はハンガリーの数学と彼等の分割解析の勝利とみなされてよいはずのものであったのに，ほとんど注目されずに終っている

のは実に不思議な気がする．エルデシュは Erdös-Tarski [43] で述べられている問題を知っていたことは確実であるが，Erdös-Hajnal [58] が突き進もうとしていた方向はこれとは別であり，フォドァの結果は変則的で重要性を持たないものと見なされていたのであろう．正確をきすために言っておくと，この組合せ論的なアプローチはハンフの画期的な結果と比べると見劣りするもので，この方法では可測基数がマーロ基数であることを示すことすらできない．

モデル理論的なアプローチの長所を示すもう一つの例として，ラインハート Reinhardt とシルバーは $\kappa(\omega)$ がすでに最小の弱コンパクト基数より大きいものとなっていることを示している：

7.16 命題　(Reinhardt-Silver [65]). $\kappa(\omega)$ より小さな全面的に記述不可能な基数が存在する．

この結果の証明のスケッチはそこで必要な準備のできたところで与える (9.18). その後，エルデシュ基数はさらに一般化されて，その大きさについての自然な階層による議論が見つかっている（第 II 巻の "Subtle Properties" の項を参照）．

正規性を用いることで，可測基数の強い意味でのラムズィーの性質がローボトムにより示されている：

7.17 定理　(Rowbottom [64, 71]). κ を可測基数として，U を κ 上の正規超フィルターとする．このとき，$\gamma < \kappa$ として，f: $[\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ なら，U の元で f に関し一様なものが存在する．

証明　各 $n \in \omega$ に対し，$f|[\kappa]^n$ に関して一様な $X_n \in U$ があれば，$\bigcap_{n\in\omega} X_n \in U$ は求めるようなものとなる．したがって，以下が各 $n \in \omega$ について示せればよい：g: $[\kappa]^n \to \gamma$ で $\gamma < \kappa$ なら，U の元で，g に関し一様なものが存在する．

帰納法により示す．$n = 1$ の場合は，U が κ-完備であることからよい．命題が $n \geq 1$ のときに成り立つとして，g: $[\kappa]^{n+1} \to \gamma$ で $\gamma < \kappa$ とする．各 $s \in [\kappa]^n$ に対し，g_s: $\kappa \to \gamma$ を，

$$g_s(\beta) = \begin{cases} g(s \cup \{\beta\}) & \max(s) < \beta \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

として定義する．κ-完備性により，各 $s \in [\kappa]^n$ に対し，$\delta_s < \gamma$ と $Y_s \in U$ で $g_s``Y_s = \{\delta_s\}$ となるものがある．帰納法の仮定により，$\delta < \gamma$ と $Z \in U$ で，$s \in [Z]^n$ なら $\delta_s = \delta$ となるようなものがとれる．ここで，κ-完備性から，$Z_\alpha = \bigcap\{Y_s \mid \max(s) \leq \alpha\} \in U$ が各 $\alpha < \kappa$ に対し成り立つ．したがって，正規性から，$H = Z \cap \triangle_{\alpha<\kappa} Z_\alpha \in U$ となる．あとは，$g``[H]^{n+1} = \{\delta\}$ となることを確かめればよい：$t \in [H]^{n+1}$ として，$t = s \cup \{\beta\}$, ここに $\max(s) < \beta$ とすれば，$\beta \in Z_{\max(s)} \subseteq Y_s$ で，$s \in [Z]^n$ だから，$g(t) = g_s(\beta) = \delta_s = \delta$ である．　⊣

7.18 系　(Erdös-Hajnal [58: 125]). 可測基数はラムズィー基数である．　⊣

ローボトムは，最小のラムズィー基数は可測基数でないことにも気付いているが，これは，

記述不可能性で典型的な議論を用いることで直ちに示すことができる：

7.19 演習 κ が可測基数で U は κ 上の正規超フィルターとするとき，

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ はラムズィー}\} \in U$$

が成り立つ．

ヒント Π^1_2 文 φ で，κ はラムズィー基数 $\Leftrightarrow$ $\langle V_\kappa, \in \rangle \models \varphi$ となるものがとれる．したがって，主張は 6.5 から導ける． $\dashv$

次の節では，すべての有限集合の族の分割をモデル理論的な転移の性質と関連づけ，L に関する強力な帰結がそれから導かれることを示す．

§8 分割と構造

ローボトム Frederick Rowbottom はウィスコンシン大学でキースラーの学生として彼の学位論文 Rowbottom [64] で可測基数の分割の性質の研究を行なった．彼の重要な結果の一つはすでに前節の終わりで述べた．ここでは，モデル理論での転移の性質による特徴付けに基づく，彼の主要な論法を追ってみる．この新しい概念を突破口として，彼は L と V が本質的に違うことを主張する命題を導くことに成功したのであった．

可算な一階の言語で選ばれた 1 変数述語を $R \subseteq A$ と解釈するような構造 $\mathcal{A} = \langle A, R, \ldots \rangle$ は，$|A| = \kappa$ で $|R| = \lambda$ のとき，**タイプ** $\langle \kappa, \lambda \rangle$ を持つという．

$$\begin{aligned} \langle \kappa, \lambda \rangle \twoheadrightarrow \langle \mu, \nu \rangle \quad &\Leftrightarrow \quad A \text{ がタイプ } \langle \kappa, \lambda \rangle \text{ なら，} \\ &\qquad \mathcal{B} \prec \mathcal{A} \text{ でタイプ } \langle \mu, \nu \rangle \text{ のものが存在する．} \\ \langle \kappa, \lambda \rangle \twoheadrightarrow \langle \mu, {<}\nu \rangle \quad &\Leftrightarrow \quad A \text{ がタイプ } \langle \kappa, \lambda \rangle \text{ なら，ある } \rho < \nu \text{ に対し} \\ &\qquad \mathcal{B} \prec \mathcal{A} \text{ でタイプ } \langle \mu, \rho \rangle \text{ のものが存在する．} \end{aligned}$$

これらは，レーベンハイム=スコーレムの定理の，明らかに強力な二つの基数に対するバージョンとなっている．Vaught [63: 309] でチャング Chen-Chung Chang によるものとして引用されていることから，転移の性質 $\langle \kappa, \lambda \rangle \twoheadrightarrow \langle \mu, \nu \rangle$ は，組 (κ, λ), (μ, ν) に対するチャングの仮説と呼ばれている．次のテストケースが間もなく選出されている：

チャングの仮説とは，$\langle \omega_2, \omega_1 \rangle \twoheadrightarrow \langle \omega_1, \omega \rangle$ のことである．

もちろん無限の 1 変数述語が，初等的部分構造で有限の述語に対応することはあり得ないので，これは，$\langle \omega_2, \omega_1 \rangle \twoheadrightarrow \langle \omega_1, {<}\omega_1 \rangle$ と同値となる．一般には，厳密さの度合の低い方の $\langle \mu, {<}\nu \rangle$ による記述が巨大基数の仮説から直接に導かれるのであるが，これをさらに分析することにより，$\langle \mu, \nu \rangle$ の形の帰結を導くことができる (cf. 8.5(b))．

ローボトムはモデル理論の概念である $\twoheadrightarrow$ と今までに論じてきたのとは多少タイプの異なる分割の性質の同値性を確立している．面白いことに，この分割の性質の重要な応用はこの性質に関する記法が導入されるより前になされている：

まず，Erdös-Hajnal-Rado [65: 144] によるかぎ括弧の分割関係

$$\beta \longrightarrow [\alpha]^{\gamma}_{\delta}$$

を，任意の $f\colon [\beta]^{\gamma} \to \delta$ に対し，$H \in [\beta]^{\alpha}$ で，$f``[H]^{\gamma} \neq \delta$ となるものがあること，とする．つまり．f は $[H]^{\gamma}$ で，少なくとも一つの値をとらない，ということであり，これは，普通の分割関係での結論に比べずっと弱いものになっている．普通の分割関係でと同じように，$\gamma < \omega$ の場合に焦点があてられる．もっとも Erdös-Hajnal [66] では，非常に巧妙な選択公理の応用によって，任意の κ に対し $\kappa \not\longrightarrow [\kappa]^{\omega}_{\kappa}$ が証明されている (23.13) が，これは，巨大基数の仮説に対する究極的な制限を果たす結果となっている．かぎ括弧の分割関係の否定は組合せ論的な強い命題となり，これの可能性を調べることが研究の要点になる（Erdös-Hajnal-Máté-Rado [84] および Todorčević [87] を参照）．

かぎ括弧の分割関係の変形

$$\beta \longrightarrow [\alpha]^{\gamma}_{\delta, <\eta}$$

は，任意の $f\colon [\beta]^{\gamma} \to \delta$ に対し，$H \in [\beta]^{\alpha}$ で，$|f``[H]^{\gamma}| < \eta$ となるものが存在するという主張とする．

最後に，普通の分割関係でと同様に，Erdös-Hajnal-Rado [65: 156] では，次のより強い形のものが考察されている：

$$\beta \;\longrightarrow\; [\alpha]^{<\omega}_{\delta}$$

は，任意の $f\colon [\beta]^{<\omega} \to \delta$ に対し，$H \in [\beta]^{\alpha}$ で，$f``[H]^{<\omega} \;\neq\; \delta$ となるものが存在するという主張とする．

$$\beta \;\longrightarrow\; [\alpha]^{<\omega}_{\delta, <\eta}$$

も同様に定義される．

ローボトムによる基本的な発見は次のように述べることができる：

8.1 定理　(Rowbottom [64, 71]). $\kappa \geq \lambda$ で，$\kappa \geq \mu \geq \nu > \omega$ とする．このとき，以下は同値である：

(a) $\langle \kappa, \lambda \rangle \twoheadrightarrow \langle \mu, < \nu \rangle$.

(b) $\kappa \to [\mu]^{<\omega}_{\lambda, <\nu}$.

証明　順方向の証明には，$f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \lambda$ とする．ここで，構造

$$\mathcal{A} = \langle \kappa, \lambda, \in, f | [\kappa]^n \rangle_{n \in \omega}$$

を考える．仮定により，$H \in [\kappa]^{\mu}$ で $|\lambda \cap H| < \nu$ かつ，

$$\langle H, \lambda \cap H, \in, f | [H]^n \rangle_{n \in \omega} \prec \mathcal{A}$$

となるものが存在する．明らかに H は求めるものである．

逆方向の証明には，当然ながらスコーレム化を行う．$\mathcal{A} = \langle A, R, \ldots \rangle$ をタイプ $\langle \kappa, \lambda \rangle$ の構造とする．元の呼びかえにより，$A = \kappa$ かつ，$R = \lambda$ となっているとしてよい．

$\{h_n \mid n \in \omega\}$ を $\mathcal{A}$ のスコーレム関数の完全族 (§0) として，h_n は $k(n)$-変数関数で $k(n) \leq n$ となっているとする．f: $[\kappa]^{<\omega} \to \lambda$ を，

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \begin{cases} h_n(\xi_1, \ldots, \xi_{k(n)}) & \text{これが } \lambda \text{ より小さいとき，} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

として定義する．(b) により，$H \in [\kappa]^\mu$ で，$|f``[H]^{<\omega}| < \nu$ となるものがとれるから，$B = \bigcup_n h_n``[H]^{k(n)}$ とおく．このとき，$|B| = \mu$ となり，B は，構造 $\langle B, \lambda \cap B, \ldots \rangle \prec \mathcal{A}$ の領域となる．また，$\lambda \cap B \subseteq f``[H]^{<\omega}$ により，$|\lambda \cap B| < \nu$ だから，これにより証明が完了する．　⊣

現代の視点から見ると，この特徴付け定理は，同義語的な 2 つの命題を述べた自明なものに思えるが，これは，もちろん我々がスコーレム Skolem [23] という巨人の肩に乗って見ているからである．このような転移の性質のあるものに対しては，もっと簡単な組合せ論での同値命題を与えることができる．事実，エルデシュ，ハイナル，ラドーは彼等の記法を導入するより前に，Erdös-Hajnal-Rado [65: 154] で，関係 $\omega_2 \longrightarrow [\omega_1]^2_{\omega_1, <\omega_1}$ をウラムの問うたある問題との関連で考察しているが，この関係は後にチャングの仮説と同値であることが示されている．ついでに，これを一般化したものを示しておく：

8.2 命題　（$n = 2$ の場合は Erdös-Hajnal [74: 275]）．$1 < n < \omega$ に対し，

$$[\omega_n] \longrightarrow [\omega_1]^{<\omega}_{\omega_1, <\omega_1} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_n \longrightarrow [\omega_1]^n_{\omega_1, <\omega_1}$$

が成り立つ．特に，チャングの仮説が成り立つことと，$\omega_2 \longrightarrow [\omega_1]^2_{\omega_1, <\omega_1}$ とは同値である．

証明　以下を $n \in \omega$ に関する帰納法で示す：

(*)　任意の f: $[\omega_n]^{<\omega} \to \omega_1$ に対し，g: $[\omega_n]^n \to \omega_1$ で，次の条件を満たすものが存在する：$s \in [\omega_n]^{<\omega}$ が $|s| \geq n$ なら，$t \in [s]^n$ で $f(s) \leq g(t)$ となるものがある．

このような f が与えられたとき，対応する g をとると，$H \subseteq \omega_n$ で，$g``[H]^n$ が可算なら，$\sup(f``[H]^{<\omega}) \leq \sup(g``[H]^n) < \omega_1$ となるから，$f``[H]^{<\omega}$ も可算となる，したがって，これにより証明が完了することが分かる．

$n = 0$ に対しては，$[\omega_0]^0 = \{0\}$ だから，$g(0) = \sup(\mathrm{ran}(f))$ とすることで (*) が成り立つことが分かる．

次に (*) が n に対し成り立っているとして，f: $[\omega_{n+1}]^{<\omega} \to \omega_1$ とする．各 $\alpha < \omega_{n+1}$ に対し p_α: $\alpha \to \omega_n$ を単射として，f_α: $[\omega_n]^{<\omega} \to \omega_1$ を

$$f_\alpha(x) = f(p_\alpha^{-1}(x) \cup \{\alpha\})$$

で定義する．帰納法の仮定を用いて，g_α: $[\omega_n]^n \to \omega_1$ を f_α に対して (*) でのようにとる．ここで，g: $[\omega_{n+1}]^{n+1} \to \omega_1$ を

$$g(t) = g_\alpha(p_\alpha``(t - \{\alpha\})) \quad \text{ここに } \alpha = \max(t)$$

とする．$|s| \geq n+1$ で $\alpha = \max(s)$ とすると，ある $y \in [p_\alpha``(s - \{\alpha\})]^n$ に対し，

$$f(s) = f_\alpha(p_\alpha``(s - \{\alpha\})) \leq g_\alpha(y)$$

となるから，$t = p_\alpha^{-1}(y) \cup \{\alpha\}$ とすれば

$$f(s) \leq g(t)$$

が成り立つ．したがって証明が完了した．　$\dashv$

エルデシュ=ラドーの定理 (定理 7.3) により，GCH のもとでは $\omega_n \longrightarrow (\omega_2)^{n-1}_{\omega_1}$ が成立するから，この意味で，上の結果は可能なもののうちで最良のものとなっている．さらに，1991 年には，チャングの仮説が $\omega_2 \longrightarrow [\omega_1]^3_{\omega_1}$ と同値になることがトドウチェヴィッチによって示されている．CH を仮定すると 7.3 から，$\omega_2 \longrightarrow (\omega_1)^2_\omega$ が導け，したがって，特に $\omega_2 \longrightarrow [\omega_1]^2_{\omega_1}$ となるから，トドウチェヴィッチの結果での指数は最良のものとなっている．シルバーは 1967 年に，κ が $\kappa \longrightarrow (\omega_1)^{<\omega}_2$ を満たせば，強制法による拡大で，チャングの仮説が成り立つようなものが得られることを示している（第 II 巻でのクレパの仮説とチャングの仮説に関する個所を参照）．

ローボトム基数

ローボトムが注目した可測基数のきわだった性質は次のようなものであった．$\omega < \nu < \kappa$ として，

κ は **ν-ローボトム**　$\Leftrightarrow$　$\kappa \longrightarrow [\kappa]^{<\omega}_{\lambda,<\nu}$ が任意の $\lambda < \kappa$ に対し成り立つ；また，

κ は**ローボトム**　$\Leftrightarrow$　κ は ω_1-ローボトム

とする．7.14(c) によりラムズィー基数はローボトムである．ガイフマン（9.1 を参照）とローボトムは，巨大基数と $V = L$ の共存が不可能であることを示す，最初の構造的な結果を，おたがいに独立に，しかも，ほとんど同時に得ている．スコット (5.5) とガイフマンが超巾の大域的な使用によっているのに対し，ローボトムは，分割の性質のみから，どのような局所的な帰結が導けるかを示している．次の定理は彼のこれらの結果の典型を示すものとなっている．これらの結果は間もなくシルバーの結果（§9 を参照）によって凌駕されることになるのだが，そうだとしても，L と累積的階層の低い部分に関するこのような驚くべき結果を最初に示すことができたのはガイフマンとローボトムであったのである．証明は現在の観点から纏めると，大変短いものとして述べることができる：

8.3 定理　(Rowbottom [64, 71]). $\kappa > \lambda > \omega$ と $\kappa \geq \mu > \omega$ で，$\langle \kappa, \lambda \rangle \twoheadrightarrow \langle \mu, <\omega_1 \rangle$ となるものがあるとする（例えば，ローボトム基数が存在する，あるいは，κ で $\kappa \longrightarrow (\omega_1)^{<\omega}_2$ となるものがある，あるいは，チャングの仮説 $\langle \omega_2, \omega_1 \rangle \twoheadrightarrow \langle \omega_1, \omega \rangle$ が成り立つときがそうである）．このとき，ω_1 は L で到達不可能となり，したがって特に $\mathcal{P}(\omega)^L$ は可算になる．

証明　すべての $\alpha < \omega_1$ に対し $\mathcal{P}(\alpha)^L$ が可算であることを示せばよい；そうなら，ω_1 は正則だから，L で到達不可能であることが帰結できる．

与えられた α に対し，

$$\mathcal{A} = \langle L_\kappa, L_\lambda, \in, \beta \rangle_{\beta \le \alpha}$$

を可算な言語の構造とする．仮定により，

$$\mathcal{B} = \langle X, R, \in, \beta \rangle_{\beta \le \alpha} \prec \mathcal{A}$$

で，$|X| = \mu$ かつ $|R| < \omega_1$ となるものが存在する．帰納法により $\beta \cap X = \beta$ が $\beta \le \alpha$ に対し示せる．0.4 により，$\mathcal{B}$ の推移的崩壊 $\mathcal{T}$ で，ある $\gamma \ge \mu$ に対し

$$\mathcal{T} = \langle L_\gamma, S, \in, \beta \rangle_{\beta \le \alpha}$$

という形をしているものが存在する．i を崩壊の同型写像の逆写像とする．したがって，$i\colon \mathcal{T} \prec \mathcal{A}$ で，$i(\beta) = \beta$ が $\beta \le \alpha$ に対して成り立っている．このことから，$x \in \mathcal{P}(\alpha) \cap L_\gamma$ なら，$i(x) = x$ となることが分かる．さらに，$\mathcal{P}(\alpha)^L \subseteq L_{\omega_1} \subseteq L_\lambda$ だから，i の初等性から，$x \in S$ である．一方 $\gamma \ge \mu > \omega$ だから，$\mathcal{P}(\alpha) \cap L_\gamma = \mathcal{P}(\alpha)^L$ でもあるので，$\mathcal{P}(\alpha)^L \subseteq S$ となり，したがって，これが可算であることが分かる． ⊣

歴史的には，ローボトムが最初に得た洞察は，($|\mathcal{P}(\omega)|^L$, $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))|^L$ などの) L で定義可能な任意の順序数は可算である，という結論であった．すでに気がついていると思うが，8.1 や 8.3 での可算言語への制限は本質的なことではない．ローボトムは，たくさんのスコーレム関数に対応する関数の集合の族に対して同時に一様になるような集合が得られることを主張する 8.1 の線にそった一般的な命題を考え，この命題を成り立たせるためにはラムズィー基数で十分であることを示している．以下は，この命題を単一の関数の族に対して便利な形に変形したものである．

8.4 定理 (Rowbottom [64, 71]). $\langle A, R, \ldots \rangle$ を（一階の）言語で ν 未満の個数の非論理記号を持つものとする．ここに，$R \subseteq A$ で，$|A| \ge \kappa$ かつ，$|R| = \lambda < \kappa$ とする．

(a) $\lambda^{<\nu} < \kappa$ で，κ は ν-ローボトム，あるいは

(b) $\lambda = \nu$ は正則基数で，$\kappa \longrightarrow [\kappa]^{<\omega}_{\nu, <\nu}$

が成り立っている，とする．このとき，$\langle B, R \cap B, \ldots \rangle \prec \langle A, R, \ldots \rangle$ で，$|B| = \kappa$ かつ，$|R \cap B| < \nu$ となるものが存在する．

証明 元の呼びかえをおこなって，$A \supseteq \kappa$ かつ $R = \lambda$ となっているとして，8.1 の証明のように，$\{h_\alpha \mid \alpha < \rho\}$ をこの言語に関するスコーレム関数の完全族とする．ここに $\rho < \nu$ で h_α は $k(\alpha)$-変数とする．

まず，(a) が成り立っていると仮定する．f を

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \{h_\alpha(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mid \alpha < \rho \ \wedge \ n = k(\alpha) \ \wedge \ h_\alpha(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \lambda\}$$

で定義される $[\kappa]^{<\omega}$ 上の関数とする．したがって，$|\mathrm{ran}(f)| \le \lambda^\rho$ となっているから，$H \in [\kappa]^\kappa$ で $|f``[H]^{<\omega}| < \nu$ となるものがとれる．$B = \bigcup_{\alpha<\rho} h_\alpha``[H]^{k(\alpha)}$ とおくと，$\langle B, \lambda \cap B, \ldots \rangle \prec \langle A, \lambda, \ldots \rangle$ で，

$$|\lambda \cap B| \le |\bigcup f``[H]^{<\omega}| < \rho \cdot |f``[H]^{<\omega}| < \nu$$

となる．

今度は (b) を仮定して，$[\kappa]^{<\omega}$ 上の関数 $\overline{f}$ を，上の f を使って

$$\overline{f}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sup(f(\xi_1, \ldots, \xi_n))$$

として定義する．このとき $\lambda = \nu$ の正則性から，$\mathrm{ran}(\overline{f}) \subseteq \nu$ となる．残りは前と同様にしてできる．ここで，ふたたび ν の正則性を用いて，対応する B が $|\lambda \cap B| < \nu$ を満たすことを保証することに注意する．$\dashv$

8.5 系　κ をラムズィー基数とする．このとき，

(a) 任意の $\alpha < \kappa$ に対し，$|\mathcal{P}(\alpha)^L| = |\alpha|$ が成立する．したがって，すべての非可算な正則基数 $\lambda < \kappa$ は L で到達不可能となる．

(b) すべての $\nu \leq \lambda < \kappa$ に対し，$\langle \kappa, \lambda \rangle \twoheadrightarrow \langle \kappa, \nu \rangle$ である．

証明　(a) は 8.3 の証明で，非可算な言語を用いることで示せる．

(b) タイプ $\langle \kappa, \lambda \rangle$ の（可算な言語での）構造 $\langle A, R, \ldots \rangle$ が与えられたとき，$S \in [R]^\nu$ として，拡張 $\langle A, R, \ldots, x \rangle_{x \in S}$ を考える．8.4 でそこでの ν を ν^+ で置き換えたものをこれに適用して，初等的部分構造

$$\langle B, R \cap B, \ldots, b_x \rangle_{x \in S}$$

で，$|B| = \kappa$ かつ $|R \cap B| \leq \nu$ となっているものが得られる．ところが，各 b_x により，$|R \cap B| = \nu$ となる．したがって，この構造のもとの言語への還元 $\langle B, R \cap B, \ldots \rangle$ は，タイプ $\langle \kappa, \nu \rangle$ を持つことが分かる．$\dashv$

ローボトム基数の仮定は，もともと 8.3 のような強い帰結を導くものとして構想されたのであったが，これが大きな基数となることを帰結する結果が何も得られないままになっているのは，歴史的逆転と言えるだろう．明らかな制約として知られているのは次のもののみである：

8.6 演習　任意の λ に対し，

(a) $\lambda^+ \not\rightarrow [\lambda + 1]^2_{\lambda, <\lambda}$,

(b) $\lambda \not\rightarrow [\lambda]^1_{\mathrm{cf}(\lambda), <\mathrm{cf}(\lambda)}$

が成り立つ．したがって，ν-ローボトム基数 κ は弱到達不可能であるか，共終数が ν 以下であるかのいずれかである．

ヒント　(a) 各 $\beta < \lambda^+$ に対し f_β: $\beta \to \lambda$ を単射として，$g(\alpha, \beta) = f_\beta(\alpha)$ で定義される，g: $[\lambda^+]^2 \to \lambda$ を考えればよい．

(b) $\langle \gamma_\alpha \mid \alpha < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$ を κ で共終として，$h(\xi) =$“$\xi < \gamma_\alpha$ となる最小の α” として定義される h: $\lambda \to \mathrm{cf}(\lambda)$ を考える．$\dashv$

プリクリ Karel Prikry は特異基数が強い分割の性質を持ち得ることを示した：

8.7 定理　(Prikry [70])．κ を特異基数で，可測基数の極限になっているようなものとする．このとき κ は $\mathrm{cf}(\kappa)^+$-ローボトム基数となる．

証明 $\nu = \mathrm{cf}(\kappa)$ として，$\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \nu \rangle$ を κ の閉非有界な集合の増加列による枚挙で，$\kappa_0 = \nu$, かつ，すべての $\alpha < \nu$ に対し，$\kappa_{\alpha+1}$ は可測基数となっているようなものとする．$\alpha < \nu$ に対し，$U_{\alpha+1}$ を $\kappa_{\alpha+1}$ 上の正規超フィルターとして，D を

$$X \in D \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq \kappa \wedge \exists \beta < \nu \forall \alpha (\beta \leq \alpha < \nu \to X \cap \kappa_{\alpha+1} \in U_{\alpha+1})$$

で定義する．したがって，D は κ 上の一様なフィルターとなる．$s \in [\kappa]^{<\omega}$ に対し，

$$\mathrm{type}(s) = \{\langle \alpha, k \rangle \in \nu \times \omega \mid |s \cap (\kappa_{\alpha+1} - \kappa_\alpha)| = k > 0\}$$

とする．ここで次の命題を示す：

(∗) 任意の $\gamma < \kappa$ と $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ に対し，$H \in D$ で，$s_0, s_1 \in [H]^{<\omega}$ が $\mathrm{type}(s_0) = \mathrm{type}(s_1)$ を満たすなら常に $f(s_0) = f(s_1)$ となるようなものが存在する．

$\mathrm{type}(s)$ の可能性は高々 ν 個だから，これから，$|f``[H]^{<\omega}| \leq \nu$ となり，したがって κ は ν^+-ローボトム基数となっていることが分かる．

$n \in \omega$ に対し次の命題を考える：

$(*)_n$ 任意の $\gamma < \kappa$ と $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ に対し，$H \subseteq \kappa$ で，

(i) すべての $\kappa_{\alpha+1} > \gamma$ に対し $H \cap \kappa_{\alpha+1} \in U_{\alpha+1}$, かつ

(ii) 任意の $s_0, s_1 \in [H]^{<\omega}$ で $\mathrm{type}(s_0) = \mathrm{type}(s_1)$ かつ $|\mathrm{type}(s_0)| = n$ となるものに対し，$f(s_0) = f(s_1)$

となるものが存在する．

$f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ で，$\gamma < \kappa$ として，各 $n \in \omega$ に対し，この f に関し $(*)_n$ を満たすような H_n が存在すれば，(i) により，$\bigcap_n H_n \in D$ となり，(ii) により，(∗) は $H = \bigcap_n H_n$ により満たされる．したがって，帰納法により，すべての $n \in \omega$ に対し，$(*)_n$ が示せれば十分であることが分かった：

$(*)_0$ が成り立つことは自明だから，帰納法のステップを見ることにする．$(*)_n$ が成り立つと仮定して，$f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ で $\gamma < \kappa$ とする．$\kappa_{\alpha+1} > \gamma$ となる $\alpha < \nu$ と $t \in [\kappa_\alpha]^{<\omega}$ に対し，$f_t\colon [\kappa_{\alpha+1}]^{<\omega} \to \gamma$ を $f_t(u) = f(t \cup u)$ で定義する．7.17 により，f_t に関し一様な $X_t^\alpha \in U_{\alpha+1}$ がとれる．$\kappa_{\alpha+1} > \gamma$ となる $\alpha < \nu$ に対し，

$$X_\alpha = \bigcap \{X_t^\alpha \mid t \in [\kappa_\alpha]^{<\omega}\} - \kappa_\alpha$$

とする．$U_{\alpha+1}$ は $\kappa_{\alpha+1}$-完備だから，$X_\alpha \in U_{\alpha+1}$ である．

次に，各々の $\langle \alpha, k \rangle \in \nu \times \omega$ に対し，$f_{\alpha,k}\colon [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ を，

$$f_{\alpha,k}(t) = \begin{cases} f(t \cup u) & t \in [\kappa_\alpha]^{<\omega} \text{ で，} u \text{ はある（任意の）} [X_\alpha]^k \text{ の元,} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

として定義する．X_α の定義から，$f_{\alpha,k}$ の定義はうまくできる．$H_{\alpha,k} \subseteq \kappa$ を，$f_{\alpha,k}$ に関して $(*)_n$ でのようにとる．

ここで，

$$H = \bigcup\{X_\alpha \mid \alpha < \nu \ \wedge \ \gamma < \kappa_{\alpha+1}\} \cap \bigcap\{H_{\alpha,k} \mid \langle \alpha, k\rangle \in \nu \times \omega\}$$

とおく．$U_{\alpha+1}$ は ν^+-完備だから，$\kappa_{\alpha+1} > \gamma$ なら，$H \cap \kappa_{\alpha+1} \in U_{\alpha+1}$ となる．$s_0, s_1 \in [H]^{<\omega}$ が，$\mathrm{type}(s_0) = \mathrm{type}(s_1)$ かつ $|\mathrm{type}(s_0)| = n+1$ となっているとしよう．α を，ある k に対し，$\langle \alpha, k\rangle \in \mathrm{type}(s_0)$ となるような最大のものとして，$s_0 = t_0 \cup u_0$, $s_1 = t_1 \cup u_1$ とおく．ここに，$\mathrm{type}(t_0) = \mathrm{type}(t_1)$ で，$|\mathrm{type}(t_0)| = n$ となっており，$\mathrm{type}(u_0) = \mathrm{type}(u_1) = \{\langle \alpha, k\rangle\}$ であるとする．このとき，$f(s_0) = f_{\alpha,k}(t_0) = f_{\alpha,k}(t_1) = f(s_1)$ となるから，f に関して $(*)_{n+1}$ が示せたことになる．⊣

プリクリは強制法により，可測基数をローボトム基数に保ちながら，この共終数を ω にすることが可能であることを示している (18.6). しかしながら，次の重要な問題は依然として未解決のままである．

8.8 未解決問題　ω_ω はローボトム基数であり得るか？

これに関連した結果については，8.16 とこの前後に述べた注意も参照されたい．

ν-ローボトム基数が，巾集合の濃度に対していくつかの制限を与えることを示すのはそれほど難しくないが，これが発見されたのはずいぶん後になってからであった．

8.9 命題　(Prikry [75]). $2^{<\nu} = \kappa$ で，κ は正則な ν-ローボトム基数とする．このとき，すべての $\nu \le \lambda < \kappa$ に対し，$2^\lambda = \kappa$ が成立する．

証明　$\nu < \kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$ だから，$\mu < \nu$ で $2^\mu = \kappa$ となるものがある．帰納法で証明を進めて，$\lambda < \kappa$ で，すべての $\mu \le \lambda' < \lambda$ に対し，$2^{\lambda'} = \kappa$ が成り立っていると仮定する．λ が特異基数なら，よく知られた論法で，$2^\lambda = \kappa$ を得ることができる：$\langle \gamma_\alpha \mid \alpha < \mathrm{cf}(\lambda)\rangle$ を λ で共終とする．$X \subseteq \lambda$ に対し，$\mathrm{cf}(\lambda)$ 上の関数 f_X を，$f_X(\alpha) = X \cap \gamma_\alpha$ で定義する．このとき $X \ne Y$ なら，$f_X \ne f_Y$ となるから，$2^\lambda \le (2^{<\lambda})^{\mathrm{cf}(\lambda)} = 2^{<\lambda} = \kappa$ である．

今度は，λ を正則基数とする．上と同じように，$X \subseteq \lambda$ に対し，λ 上の関数 f_X を $f_X(\alpha) = X \cap \alpha$ で定義する．$2^{<\lambda} = \kappa$ だから，2^λ 個の λ から κ への関数からなる族 $\mathcal{F}$ で，**ほとんど互いに素**なものがある．つまり，$\mathcal{F}$ の任意の異なる元 f, g に対し $f(\alpha) \ne g(\alpha)$ がすべての十分に大きな $\alpha < \lambda$ に対し成立する．

ここで $2^\lambda > \kappa$ だったと仮定してみる．κ は正則だから，各 $f \in \mathcal{F}$ に対し，$\delta_f < \kappa$ で $\mathrm{ran}(f) \subseteq \delta_f$ となるものがある．したがって，$\delta < \kappa$ と $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ で，$|\mathcal{G}| = \kappa$ かつ，$f \in \mathcal{G}$ なら $\delta_f = \delta$ となるものが存在する．$\mathcal{G}$ を $\langle f_\xi \mid \xi < \kappa\rangle$ と枚挙して，$F\colon [\kappa]^2 \to \lambda$ を，$F(\xi, \zeta) =$「$f_\xi(\alpha) \ne f_\zeta(\alpha)$ がすべての $\beta \le \alpha < \lambda$ に対し成り立つような最小の β」として定義する．κ は ν-ローボトム基数だから，$H \in [\kappa]^\kappa$ で，$|F``[H]^2| < \nu$ となるものがある．$\lambda$ は正則で，仮定により $2^\lambda > \kappa$ だから，これと $2^{<\nu} = \kappa$ により，$\nu \le \lambda$ である．したがって，$\gamma = \sup(F``[H]^2) < \lambda$ となる．よって，$\{f_\xi(\gamma) \mid \xi \in H\}$ は κ 個の λ 未満の互いに異なる順序数からなることになるが，これは矛盾である．⊣

したがって，2^ν が ν^+**-ローボトム基数なら**，$\nu \le \lambda < 2^\nu$ **に対し**，$2^\lambda = 2^\nu$ **となる．**次の結果は 8.9 を補足するものとなっている．

8.10 命題 (Tryba [86]). $2^{<\nu} < \kappa$ で，κ は ν-ローボトム基数とするとき，κ は強極限となる．

証明 $\lambda < \kappa$ で，$2^\lambda \geq \kappa$ となるものがあったと仮定してみる．λ はこのようなもののうち最小とする．8.1 でと同様の議論で，$\langle M, \in\rangle \prec \langle V_{\kappa+\omega}, \in\rangle$ を $|M| = \kappa = |M \cap \kappa|$ で，$|M \cap \lambda| < \nu$ となるものとする．N を M の推移的崩壊として，j: $\langle N, \in\rangle \prec \langle V_{\kappa+\omega}, \in\rangle$ を崩壊の同型写像の逆写像とする．このとき $j(\kappa) = \kappa$ で，ある $\delta < \nu$ に対し，$j(\delta) = \lambda$ となる．仮定により $V_{\kappa+\omega}$ で，κ から $\mathcal{P}(\lambda)$ への単射が存在するから，N で κ から $\mathcal{P}(\delta)$ への単射が存在する．ところが，これは $2^{<\nu} < \kappa$ という仮定に矛盾する． ⊣

特に，ω_ω **がローボトム基数で，**$2^{\aleph_0} < \omega_\omega$ **なら，**ω_ω **は強極限になる．**この線にそった他の結果も Tryba [86] に発表されている．同様の議論により次のことを示すこともできる：

8.11 演習 (Tryba [81]). κ が ν-ローボトム基数で，$\nu \leq \mu < \kappa$ となる極限基数が存在するなら，κ は極限基数の極限となっている．

ヒント そうでないとして，κ より小さい極限基数のうち最大のもの λ があると仮定してみる．j: $\langle N, \in\rangle \prec \langle V_{\kappa+\omega}, \in\rangle$ をこの λ に関して 8.10 の証明でのようにとる．ここで μ が M での極限基数であることから，矛盾を導くことができる． ⊣

このことから，$\omega_{\omega+\omega}$ **はローボトム基数でなく，**ω_ω **より大きいローボトム基数は，**$\omega_{\omega\cdot\omega}$ **に等しいか，あるいは，それよりより大きくなる**，ということが分かる．μ が到達不可能基数である，マーロ基数である，等々と仮定すると，κ の大きさに関する類似の結果を得ることができる．同じ手法で κ **が** ν**-ローボトム基数で，**$\omega_\nu < \kappa$ **なら，**$\kappa = \omega_\kappa$ **となる**，ということを示すこともできる．

ν-ローボトム基数については，これ以外には，以下で議論することになる関連の概念からすでに帰結できることがらを除くと，組合せ論的にも，無矛盾性の議論に関してもほとんど何も知られていない．

ジョンソン基数

まったく別の角度からの新しい研究が普通の分割の関係の研究を本質的な代数的問題に対する考察に変身させることになった．ジョンソン Bjarni Jónsson はタルスキーの弟子で，無限ユニヴァーサル・アルジェブラでの第一人者であるが，彼は 1962 年に次の問題を提起した（問題の背景に関しては Jónsson [72: 3.9] を参照）：基数 κ に対し，濃度 κ の代数はすべて，同じ濃度の真の部分代数を持つか？ ここで**代数**とは，構造 $\mathcal{A} = \langle A, f_n\rangle_{n\in\omega}$ で，各 $n \in \omega$ に対し，f_n は，ある $k(n) \in \omega$ に対し f_n: $[A]^{k(n)} \to A$ となっているものとする；これの部分代数とは，構造 $\mathcal{A}_0 = \langle A_0, f_n|[A_0]^{k(n)}\rangle_{n\in\omega}$ で $A_0 \subseteq A$, かつ f_n“$[A_0]^{k(n)} \subseteq A_0$ となっているようなものことである．つまり，これらは，標準的なモデル理論での概念を関数記号のみを持つ言語に制限して考えたものとなっている．ジョンソンは，高々有限個の演算を持つ代数についてこの問題を提起しているが，この違いはコーディングにより解消できるので本質的なものではない．**ジョンソン代数**とは，同濃度の真の部分代数を持たないような代数のこととする．**ジョンソン基数**とは，その濃度のジョンソン代数の存在し

ないような基数のことである．あるいは，肯定的な命題で表現すると

κ はジョンソン基数　$\Leftrightarrow$　濃度 κ の任意の代数は同じ濃度の真の部分代数を持つ

となる．したがって，ジョンソンの問題は：ジョンソン基数は存在するか？と言いなおすことができる．

ローボトム基数と同じように，ジョンソン基数に対しても組合せ論的，あるいはモデル理論的な特徴付けを与えるとができる：

8.12 演習　((b) は Erdös-Hajnal [66], (c) は Keisler-Rowbottom [65] による）以下は同値である：

(a) κ はジョンソン基数である．

(b) $\kappa \longrightarrow [\kappa]^{<\omega}_{\kappa}$.

(c) 任意の可算な一階の言語の構造で，領域の濃度が κ なものに対し，これの真の初等的部分構造で領域の濃度が同じものが存在する．

ヒント　(a) → (b) には，$f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \kappa$ なら，代数 $\mathcal{A} = \langle \kappa, f|[\kappa]^n \rangle_{n\in\omega}$ を考察する．(b) → (c) は 8.1 の証明と同様にできる．　$\dashv$

このようにしてキースラーとローボトムは，**κ がある $\nu < \kappa$ に対し ν-ローボトム基数なら，κ はジョンソン基数である**ことに気がついたのであった．さらにスコーレム化により，述語記号と初等的部分構造をジョンソンの問題に結びつけることにも成功したが，これによりスコットの L に関する結果の拡張を示している：

8.13 命題　(Keisler-Rowbottom [65])．ジョンソン基数が存在するなら，$V \neq L$ となる．

証明　κ をジョンソン基数として，8.12(c) により $\langle B, \in \rangle \prec \langle L_\kappa, \in \rangle$ を，$|B| = \kappa$ で，$B \neq L_\kappa$ となるものとする．0.4 により，$\langle B, \in \rangle$ は推移的崩壊を持つが，3.3(a) により，これは $\langle L_\kappa, \in \rangle$ になる．$i\colon L_\kappa \prec L_\kappa$ を崩壊の同型写像の逆写像とすると，$B \neq L_\kappa$ により，これは恒等写像ではあり得ない．したがって，5.1(b) での議論により，臨界点 δ を持つ．ここで U を

$$X \in U \quad \Leftrightarrow \quad X \in \mathcal{P}(\delta)^L \ \wedge \ \delta \in i(X)$$

として定義すると，$\mathcal{P}(\delta)^L \subseteq L_{\delta^+} \subseteq L_\kappa$ だから，もし $V = L$ だったとすると，U は δ 上の δ-完備超フィルターとなり（5.6 を参照），したがって，δ は可測基数となる．ところがこれはスコットの結果 5.5 に矛盾する．　$\dashv$

ここでの結論は 8.3 でのそれより弱いものとなっているが，いずれにしても，これらの結果は，間もなく，クーネンによる，この方向で考え得る結論のうちもっとも強いものがこれらの仮定から導ける (21.4) という鋭利な結果により凌駕されることになるのである．クーネンはまた，可測基数の存在のもとで，基数がジョンソン基数であることとラムズィー基数であることが同値となることの，無矛盾性を示している (20.23)．しかしながら，ZFC のもとでは，ジョンソン基数の大きさに関することは，ローボトム基数に対してよりも，

もっとよく分かっていないため，この問題は重要な研究領域の一つとなった；これに関して，最初に得られた観察は次のようなものだった：

8.14 命題

(a) ω はジョンソン基数でない．

(b) (Chang, Rowbottom, Erdös-Hajnal [66]) κ がジョンソン基数でないなら，κ^+ もそうでない．

(c) (Erdös-Hajnal-Rado [65: 145]) $2^\kappa = \kappa^+$ なら，$\kappa^+ \not\to [\kappa^+]^2_{\kappa^+}$ となり，したがって，κ^+ はジョンソン基数ではない．

(d) (Rowbottom – Devlin [73: 311]) 最小のジョンソン基数は，弱到達不可能であるか共終数 ω の特異基数のどちらかである．

証明 (a) $f \in {}^\omega\omega$ を，$f(0) = 0$, それ以外の場合には $f(n) = n-1$ と定義すると，$\langle \omega, f \rangle$ はジョンソン代数となる．

(b) $\kappa \le \alpha < \kappa^+$ に対し，κ への全単射を用いて，f_α を $\alpha \not\to [\kappa]^{<\omega}_\alpha$ の例となっているようにとる．g: $[\kappa^+]^{<\omega} \to \kappa^+$ を，$\alpha = \max(s) \ge \kappa$ なら，$g(s) = f_\alpha(s - \{\alpha\})$, それ以外の場合には $g(s) = 0$ として定義する．このとき，g は $\kappa^+ \not\to [\kappa^+]^{<\omega}_{\kappa^+}$ を示す例となっている：$X \in [\kappa^+]^{\kappa^+}$ として，$\beta < \kappa^+$ を任意にとると，$\alpha \in X$ を，$\beta < \alpha$ で，$|X \cap \alpha| = \kappa$ となるようにとれる．このとき，f_α のとりかたから，ある $t \in [X \cap \alpha]^{<\omega}$ に対し $\beta = f_\alpha(t) = g(t^\frown\{\alpha\})$ となっている．

(c) $2^\kappa = \kappa^+$ により，枚挙 $\{X_\alpha \mid \kappa \le \alpha < \kappa^+\} = [\kappa^+]^\kappa$ を $X_\alpha \subseteq \alpha$ となるようにとれる．このとき，f: $[\kappa^+]^2 \to \kappa^+$ で，任意の $\kappa \le \beta < \kappa^+$ に対し，

$$(*) \qquad \kappa \le \alpha < \beta \text{ で } \eta < \beta, \text{ なら } \xi \in X_\alpha \text{ で } f(\xi, \beta) = \eta \text{ となる}$$

ようなものが存在する．これを示すには，上のような β に対し，$\{\langle \alpha_i, \eta_i \rangle \mid i < \kappa\} = \{\langle \alpha, \eta \rangle \mid \kappa \le \alpha < \beta \wedge \eta < \beta\}$ として，帰納的に，$\{\xi_i \mid i < \kappa\}$ を，$\xi_i \in X_{\alpha_i} - \{\xi_j \mid j < i\}$ となるように定義てして，f を各 $i < \kappa$ に対し，$f(\xi_i, \beta) = \eta_i$ となるようにとればよい．

f が $\kappa^+ \not\to [\kappa^+]^2_{\kappa^+}$ を例示するものとなっていることを示すために，$S \in [\kappa^+]^{\kappa^+}$ として，$\eta < \kappa^+$ を任意にとる．$\alpha < \kappa^+$ を $X_\alpha \subseteq S$ となるようにとり，$\beta \in S - (\max(\{\eta, \alpha\}) + 1)$ とすると，$(*)$ から，$\xi \in X_\alpha$ で，$f(\xi, \beta) = \eta$ となるようなものがとれる．

(d) κ を最小のジョンソン基数とする．このとき，(a) と (b) により，κ は非可算な極限基数となる．したがって，$\omega < \mathrm{cf}(\kappa) = \lambda < \kappa$ を仮定して，これから矛盾が導かれることを示せば十分である．$\langle \mu_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle$ を κ で閉非有界な基数の上昇列で，$\lambda < \mu_0$ となっているものとする．各 $\alpha < \lambda$ に対し $\mu_\alpha \not\to [\mu_\alpha]^{<\omega}_{\mu_\alpha}$ を例示する f_α をとり，f: $[\kappa]^{<\omega} \to \kappa$ を

$$f(s) = \begin{cases} f_\alpha(s - \{\alpha\}) & \alpha = \min(s) < \lambda \text{ かつ } \max(s) < \mu_\alpha \text{ のとき,} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

として定義する．また，g: $[\kappa]^{<\omega} \to \kappa$ を，$\lambda \not\to [\lambda]^{<\omega}_\lambda$ を例示する関数の任意の拡張として，h: $\kappa \to \lambda$ を $h(\xi) =$「$\mu_\alpha \le \xi < \mu_{\alpha+1}$ となるような α」として定義する．

以下で，

$$\langle \kappa, f|[\kappa]^n, g|[\kappa]^n, h\rangle_{n\in\omega}$$

がジョンソン代数であることを示すが，これは矛盾である．このために，$X \in [\kappa]^\kappa$ が部分代数の領域となっているとする．このとき，h により，$|X \cap \lambda| = \lambda$ となるから，g により，$X \cap \lambda = \lambda$ となっていることが分かる．$\xi < \kappa$ を任意にとる．$\alpha_0 < \lambda$ を $\xi < \mu_{\alpha_0}$ となるようにとり，帰納的に，$\alpha_n \le \alpha_{n+1} < \lambda$ を，$|X \cap \mu_{\alpha_{n+1}}| \ge \mu_{\alpha_n}$ となるようにとる．$\beta = \sup(\{\alpha_n \mid n \in \omega\})$ とおくと，$\lambda = \mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ だから，$\beta < \lambda$ となる．$\mu_\alpha, \alpha < \lambda$ は閉じた集合だったから，$|X \cap \mu_\beta| = \mu_\beta$ となる．したがって，f_β“$[(X \cap \mu_\beta) - \lambda]^{<\omega} = \mu_\beta$ となる．よって，f の定義と，$\beta \in \lambda = X \cap \lambda$ であることから，$\xi \in X$ が帰結できる．したがって，$X = \kappa$ となり，これによって得られる矛盾により証明が完了する．　⊣

(b) の証明はシェラハ Shelah [80] によりさらに精密化され，濃度が $\aleph_1$ のジョンソン代数となるような群の存在を示しているが，これは古くから知られたクーロシュKurosh による問題の答となっている．

クラインバーク Eugene Kleinberg はジョンソン基数がローボトム基数の性質に似た命題を満たすことを示している：

8.15 命題　(Kleinberg [73]).

(a) κ がジョンソン基数なら，$\alpha < \kappa$ で，$\kappa \longrightarrow [\kappa]^{<\omega}_\alpha$ となるものが存在する．δ がこのような α のうち最小なものなら，δ は正則で，$\kappa \longrightarrow [\kappa]^{<\omega}_{\delta,<\delta}$ となる．

(b) $\kappa \longrightarrow [\kappa]^{<\omega}_\lambda$ で，λ がジョンソン基数でないなら，$\kappa \longrightarrow [\kappa]^{<\omega}_{\lambda,<\lambda}$ となる．

(c) 最小のジョンソン基数 κ は ある $\nu < \kappa$ に対し，ν-ローボトム基数となる；実際，ν は (a) の δ のようにとることができる．

証明　(a) 各 $\alpha < \kappa$ に対し，f_α: $[\kappa]^{<\omega} \to \alpha$ で，$\kappa \not\longrightarrow [\kappa]^{<\omega}_\alpha$ を例示するようなものが存在する，と仮定してみる．このとき，f: $[\kappa]^{<\omega} \to \kappa$ を，$\alpha = \min(s)$ のとき，$f(s) = f_\alpha(s - \{\alpha\})$（かつ $f(\emptyset) = 0$）として定義すると，これが $\kappa \not\longrightarrow [\kappa]^{<\omega}_\kappa$ を例示するものとなることが容易に示せる．これは矛盾である．

δ に関する主張を示すには，$\kappa \longrightarrow [\kappa]^{<\omega}_{\mathrm{cf}(\delta),<\mathrm{cf}(\delta)}$ が示せれば十分である．そこで，これの反例 g が存在したと仮定して矛盾を導く．e: $\mathrm{cf}(\delta) \to \delta$ を共終として，$f_\alpha, \alpha < \delta$ を上と同じようにとる．h: $[\kappa]^{<\omega} \to \delta$ を，ある $i, j > 0$ に対し，$n = 2^i 3^j$ となるときには，

$$h(\xi_1, \ldots, \xi_n) = f_{e(g(\xi_1,\ldots,\xi_i))}(\xi_{i+1}, \ldots, \xi_{i+j}),$$

このような i, j がとれないときには $h(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ として定義する．このとき，h が $\kappa \not\longrightarrow [\kappa]^{<\omega}_\delta$ を例示するものとなっていることを容易に示すことができるが，これは矛盾である．

(b) $\langle \kappa, \lambda\rangle \twoheadrightarrow \langle \kappa, <\lambda\rangle$ が成り立つことを示す (8.1 を参照)．このために，$\mathcal{S} = \langle A, R, \ldots\rangle$ をタイプ $\langle \kappa, \lambda\rangle$ の構造とする．したがって，$A = \kappa, R = \lambda$ と仮定してよい．g: $[\kappa]^{<\omega} \to \kappa$ を，$\lambda \not\longrightarrow [\lambda]^{<\omega}_\lambda$ を例示するような関数の任意の拡張とする．$\mathcal{S}$ を構造 $\mathcal{A} = \langle \kappa, \lambda, \ldots, g|[\kappa]^n\rangle_{n\in\omega}$ に拡張して，関数 f: $[\kappa]^{<\omega} \to \lambda$ を，$\mathcal{A}$ に対するスコーレム関数の完全族 $\{h_n \mid n \in \omega\}$

から 8.1 でのように定義する．仮定により，$H \in [\kappa]^\kappa$ で，$f``[H]^{<\omega} \neq \lambda$ となるものが存在する．$A_0 = \bigcup_n h_n``[H]^{k(n)}$ とおくと，

$$\mathcal{A}_0 = \langle A_0, \lambda \cap A_0, \ldots, g|[A_0]^n \rangle_{n \in \omega} \prec \mathcal{A}$$

となる．$|\lambda \cap A_0| = \lambda$ だとすると，g により，$\lambda \cap A_0 = \lambda$ となるが，これは $f``[H]^{<\omega} \neq \lambda$ に矛盾する．したがって，$\mathcal{A}_0$ の g を含まないもとの言語への還元は，$\mathcal{S}$ の初等的部分構造で，ある $\rho < \lambda$ に対してタイプ $\langle \kappa, \rho \rangle$ を持つものとなっている．

(c) は (a) と (b) から直ちに導ける． ⊣

したがって，8.4(a)(b) により，ω_ω がジョンソン基数の最小の候補となっていることが分かる．これが実際にジョンソン基数であり得るかどうかは未解決で，この問題は 8.15(c) と次の結果の証明 —— この証明は強制法の文脈が確立されるまで (10.18) 保留する —— から，本質的には 8.8 と同じ問題であることが分かる．

8.16 定理 (Kleinberg [72, 79])．以下の理論は無矛盾等価である．

(a) ZFC + $\exists\kappa$(κ はローボトム基数)．

(b) ZFC + $\exists\kappa$(κ はジョンソン基数)．

またデブリン Devlin [73] は簡単な強制法による議論で次を得ている：(i) Con(ZFC + $\exists\kappa$(κ はジョンソン基数)) なら，Con(ZFC + $\exists\kappa$(κ はジョンソン基数 $\wedge\ \kappa \leq 2^{\aleph_0}$))，また，(ii) Con(ZFC + $\exists\kappa$(κ はラムズィー基数)) なら，Con(ZFC + $\exists\kappa$(κ はジョンソン基数) +「最小のジョンソン基数はラムズィー基数ではない」)．この後，シルバーは 1974 年にエレガントな議論で，ω_ω がジョンソン基数で，$2^{\aleph_0} < \omega_\omega$ なら，ω_ω はある内部モデルで可測基数になる，ということを示した（証明は Kanamori-Magidor [78: 129ff] を参照）．

この仕事以降では，Shelah [78] を除くと，1980 年代に再び注目があつまるようになるまで，ジョンソン基数の研究の本質的な展開は小休止する．この後，内部モデルの研究の進展によって，到達不可能でないジョンソン基数が巨大基数に関連した強い帰結を持つことが分かっている．例えば，コゥプケ Koepke は Donder-Koepke [83] の結果を拡張して，Koepke [88] で，**ジョンソン基数 κ で，ある $\xi < \kappa$ に対して $\kappa = \omega_\xi$ となるか，あるいは正則だが κ-マーロでないものが存在するなら，任意の λ に対し λ 個の可測基数を持つような内部モデルが存在する**ということを示している．彼はまた，プリクリの結果 8.7 が非可算な共終数に対しての無矛盾性の強さをシャープに示すものとなっていることを証明している：**ジョンソン基数 κ で，$\omega < \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ となるものが存在すれば，内部モデルで $\mathrm{cf}(\kappa)$ 個の可測基数を持つものが存在する．**この後コゥプケ Koepke [89] は，非極限なジョンソン基数が存在するという最も鋭利な可能性から，多くの可測基数が存在するということよりずっと強い帰結が導かれることが示している．この結果は，このようなジョンソン基数に関する一連の重要な研究の進展を完結させた．この方向の研究で，初めに得られたのは次の結果であった：

8.17 命題 (Tryba [84], Woodin)．λ を正則として，λ で定常な S で，任意の極限順序数 $\alpha < \lambda$ に対し，$S \cap \alpha$ が α で定常でないようなものが存在するとする．このとき λ はジョンソン基数ではない．特に，κ が正則基数なら，κ^+ はジョンソン基数ではない．

証明　ソロヴェイによるよく知られた結果 —— これは後に，対応する文脈の中で改めて述べる (16.9) —— により，S の λ 個の互いに素な定常な集合 S_η への分割 $S = \bigcup_{\eta<\lambda} S_\eta$ をとることができる．$f\colon S \to \lambda$ を，$f(\xi) =$"$\xi \in S_\eta$ となるような η" として定義する．次に，$\langle A, \in\rangle \prec \langle V_{\lambda+\omega}, \in\rangle$ を，$\lambda \cup \{S, f\} \subseteq A$ で $|A| = \lambda$ となるようにとり，$g\colon \lambda \to A$ を全単射とする．ここで，構造

$$\mathcal{A} = \langle A, \in, \{S\}, f, g\rangle$$

を考える．$\mathcal{B} = \langle B, \in, \{S\}, f|B, g|B\rangle \prec \mathcal{A}$ なら，g により，$|B| = \lambda \;\Leftrightarrow\; |B \cap \lambda| = \lambda$ で，$B = A \;\Leftrightarrow\; \lambda \subseteq B$ である．したがって，λ がジョンソン基数でないことを示すには，8.12(c) により，このような $\mathcal{B}$ に対し，$|B \cap \lambda| = \lambda$ なら，$\lambda \subseteq B$ となることが示せればよい：

$C = \{\xi < \lambda \mid \sup(B \cap \xi) = \xi\}$ とすると，$|B \cap \lambda| = \lambda$ により，これは λ で閉非有界となる．このとき $C \cap S \subseteq B$ である：そうでないとして，$\xi \in (C \cap S) - B$ としてみる．α を ξ より大きい $B \cap \lambda$ の元のうち最小のものとする．$\langle B, \in\rangle \prec \langle V_{\lambda+\omega}, \in\rangle$ により，B は一つ前の順序数をとる演算に関し閉じているから，α は極限順序数でなければならないことが分かる．したがって，$S \in B$, $\langle B, \in\rangle \prec \langle V_{\lambda+\omega}, \in\rangle$ および S に関する仮定から，$\mathcal{B}$ の意味で α で閉非有界な $D \in B$ で，$D \cap S = \emptyset$ となるものが存在する．ところが，このとき，$\xi \in C$ で，$(B \cap \alpha) = \xi$ だから，$D \cap B \cap \xi$ は ξ で非有界となり，よって，$\xi \in D \cap S$ となるが，これは矛盾である．

以上から，任意の $\eta < \lambda$ に対し，$C \cap S_\eta \subseteq B$ となるが，$C \cap S_\eta \neq \emptyset$ だから，$\xi \in S_\eta \cap B$ となるものがある．ところが，このとき，$g(\xi) = \eta \in B$ である．したがって，$\lambda \subseteq B$ が帰結できる．

最後の主張については，$S = \{\alpha < \kappa^+ \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \kappa\}$ とすると，S は κ^+ の定常集合となるが，任意の 極限 $\beta < \kappa^+$ に対し，β で閉非有界な集合で，共終数が κ より小さい順序数のみからなるものがあるから，$S \cap \beta$ は β で定常でないことが分かる．　$\dashv$

トドウチェヴィッチは大変エレガントな組合せ論での議論によって，この結果を対（つい）に対する分割の関係の否定を帰結する形のものに改良している：

8.18 定理　(Todorčević [87: 285]). λ を正則基数として，λ で定常な S で，任意の極限順序数 $\alpha < \lambda$ に対し，$S \cap \alpha$ は α で定常でないようなものが存在するとする．このとき，$\lambda \not\to [\lambda]^2_\lambda$ となる．特に，κ が正則基数なら，$\kappa^+ \not\to [\kappa^+]^2_{\kappa^+}$ である．

この結果は，弱コンパクト基数からの 4.6(a) と 7.8(d) の帰結を大幅に改良していることを注意しておく．またこれは，8.14(c) での仮定 $2^\kappa = \kappa^+$ が κ が正則基数の場合には不必要であることを示している．$\omega_1 \not\to [\omega_1]^2_{\omega_1}$ かどうかは 20 数年来の無限組合せ論での有名な未解決問題であった（Erdös-Hajnal [71] での Problem 15 を参照）．

κ が特異基数（で $2^\kappa = \kappa^+$ を仮定しない）とき，κ^+ がジョンソン基数であり得るかどうかは未解決であり，これは難問であるように思える．Shelah [78] と Tryba [86, 87] により，いくつかの制約が得られているが，問題の焦点である $\kappa = \omega_\omega$ の場合については，巨大基数による，何らかの肯定的な相対的無矛盾性が証明されるべく運命づけられているよ

うにみえた．それで，特異基数 κ がある不自然な性質を満たさないかぎり κ^+ はジョンソン基数にならないことを示す，シェラハの 1988 年の結果は予想外のことであった．これは，シェラハによって特異基数の巾の研究のために導入された，*pcf* **理論**のいくつもの成果の一つであった；これについては Burke-Magidor [90] あるいは Jech [92] での解説を参照．次の定理はこの状況をよく示している —— ここでの前提条件は実はさらに弱めることができる．

8.19 定理 (Shelah). κ は特異基数で正則なジョンソン基数の極限ではないとする．このとき，κ^+ はジョンソン基数ではない．特に，$\omega_{\omega+1}$ はジョンソン基数ではない．

トドウチェヴィッチははこの命題も対(つい)に対する分割の関係に対するものに精密化している； Burke-Magidor [90: 224] を参照．

8.20 定理 (Todorčević). κ は特異基数で，$\lambda \longrightarrow [\lambda]^2_\lambda$ を満たす正則基数の極限ではないとする．このとき，$\kappa^+ \not\longrightarrow [\kappa^+]^2_{\kappa^+}$ である．特に，$\omega_{\omega+1} \not\longrightarrow [\omega_{\omega+1}]^2_{\omega_{\omega+1}}$ である．

次の全体的な問題は依然として未解決である：

8.21 未解決問題 κ が特異基数のとき，$\kappa^+ \not\longrightarrow [\kappa^+]^2_{\kappa^+}$ か？

ここである程度詳しく見たように，ローボトムの仕事の組合せ論的な細分化に関する研究は，今日にいたるまでそのアクチュアリティーを失っていないが，これは主に強い分割の関係が累積的階層の比較的低い部分で得られる，という魅力的な可能性によるところが大きい．ここで我々は再び 1960 年代に戻り，シルバーによる L に関する劇的な進展について見ることにする．これは，ちょうどこのころに注目されるようになる**構造での識別不可能集合**を用いるものであった．

§9 識別不可能集合と $0^\#$

シルバー Jack Silver はバークレイでの学生で，1960 年代にそこの学部のメンバーになっている．これはちょうどバークレイで集合論の研究が大変盛んな時期であった．彼の 1966 年の学位論文 Silver[66] に現れる $0^\#$ （ゼロ・シャープ）に関する驚くべき結果の集合論に与えたインパクトに比するものは，この数年後にクーネンによって得られた結果（§19 を参照）くらいのものであろう．この節では，シルバーの結果を見ることにする．§14 では，ソロヴェイによってこれと同じ時期に始められた $0^\#$ の定義可能性と，$0^\#$ に関連した強制法に関する研究について述べる．ソロヴェイとシルバーは独立に，シルバーによる L の分析から $0^\#$ を抽出したのであった．

シルバーはガイフマンの画期的な仕事に触発され，これを拡張することで彼の結果を得ている．ガイフマンはタルスキーの学生として，1962 年にブール代数に関する学位論文を書いているが，この直後研究テーマを変えて，スコットによる可測基数と $V = L$ の共存の不可能性に関する結果の，次のような強い拡張を得ている：

9.1 定理 (Gaifman [64]). 可測基数が存在するとする．このとき，

(a) 閉非有界なクラス $C \subseteq \{\alpha \mid L_\alpha \prec L\}$ で，任意の無限な β に対し，$\alpha > \beta$ で，$|\alpha| = |\beta|$ かつ，$\alpha \in C$ となるものが存在する．このことから，任意の無限な $x \in L$ に対し，$|\mathcal{P}(x)^L| = |x|$ が成り立つことが導ける．

(b) $a \subseteq \omega$ が存在して，$L[a]$ において定義可能なクラス C で (a) を満たすものがとれる．このことから，いくらでも大きな L での基数で，$L[a]$ では基数でないようなものが存在することを帰結できる． ⊣

ガイフマンはこれらの結果を超巾反復の手法により得ている．この方法はクーネンにより，さらに研究されることになる（§19 を参照）．(a) により，ガイフマンはローボトムの局所的な帰結 8.5(a) を得ているが，それにも増して，L に対する**大域的な帰結**が，可測基数の存在から導けることを初めて示している．ガイフマンはシルバーの $0^{\#}$ に関する結果のすぐ近くまで到達していたのである．ここに，$0^{\#}$ とは ω の部分集合で，(b) を満たし，(a) を満たすような閉非有界なクラスを一意に決定し，さらに，これに付随する L の生成の図式を特定するものである．$0^{\#}$ の存在は，まったく新しい構造原理であり，これの抽出により，**L からの超越性のためには巨大基数が本質的に必要である**ということが明らかになった．

$0^{\#}$ の物語はモデル理論から始まった．与えられた理論のモデルでたくさんの自己同型を持つようなものを得ることの研究において，エレンフォイヒト (Andrzej Ehrenfeucht) とモストフスキーは識別不可能集合の概念を導入したが，これとの関連で，ラムズィーの定理 7.7 に焦点があてられるようになる．構造 $\mathcal{M}$ と，$\mathcal{M}$ の領域の部分集合 X で $<$（$\mathcal{M}$ での関係でなくてもよい）により線型順序が入れられたものに対して，$\langle X, < \rangle$ が **$\mathcal{M}$ の識別不可能集合**であるとは，$\mathcal{M}$ の言語での任意の論理式 $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ と X の元 $x_1 < \cdots < x_n$ および $y_1 < \cdots < y_n$ に対し，

$$\mathcal{M} \models \varphi[x_1, \ldots, x_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \models \varphi[y_1, \ldots, y_n]$$

が成り立つことである．つまり，すべての $n \in \omega$ に対し，X の n-組で上昇列となっているものは常に同じタイプを満たす．$<$ が明らかなときには $\langle X, < \rangle$ を X で置き換える，などの用語の変形は明瞭さをそこなわないであろう．次のものは，いくつかの重要な結果で基本的な役割を果たすことになる．

9.2 定理 (Ehrenfeucht-Mostowski [56]). T を無限モデルを持つ理論として，$\langle X, < \rangle$ を，線型順序集合とする．このとき，T のモデル $\mathcal{M}$ で，X をその領域に含み，X は $\mathcal{M}$ の識別不可能集合となっているようなものが存在する．

証明 各 $x \in X$ に対し定数記号 c_x を導入して，T の言語を拡張する．理論 $\overline{T} = T \cup \{c_x \neq c_y \mid x \neq y$ はともに X の元$\} \cup \{\varphi(c_{x_1}, \ldots, c_{x_n}) \leftrightarrow \varphi(c_{y_1}, \ldots, c_{y_n}) \mid \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ は T の言語の論理式で $x_1 < \cdots < x_n$、$y_1 < \cdots < y_n$ はすべて X の元$\}$ を考える．$\overline{T}$ が無矛盾であることが示せればよいが，コンパクト性定理により，これには，$\overline{T}$ のすべての有限な部分集合が充足可能であることを示せばよい．

$S \subseteq \overline{T}$ を有限として，$\mathcal{A}$ を T の無限モデルとし，$\{a_i \mid i \in \omega\}$ を $\mathcal{A}$ の領域の互いに異なる元とする．m を S に現れる新しい定数記号の数として，$k \leq m$ に対して $[\omega]^k$ 上の

関数 f_k を

$$f_k(i_1, \ldots, i_k) = \{\varphi(v_1, \ldots, v_k) \mid \varphi(c_{x_1}, \ldots, c_{x_k}) \leftrightarrow \varphi(c_{y_1}, \ldots, c_{y_k}) \in S \ \wedge \ \mathcal{A} \models \varphi[a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}]\}$$

により定義する．S は有限だから，f_k の値域も有限となる．したがってラムズィーの定理 7.7 を m 回適用することで各 f_k に対し一様な $H \in [\omega]^\omega$ が得られる．したがって，$\mathcal{A}$ は任意の m 個の $\{a_i \mid i \in H\}$ の元を順序を考慮して S に現れる新しい元に対応させることで S を満たすものにできる． ⊣

実際に，ラムズィーによる Ramsey [30] での彼の定理の有限版の応用目的は本質的には有限モデルの文脈で識別不可能集合を得ることであった．モーレイ (Michael Morley) は Morley [65,65a] で 9.2 を用いてモデル理論で重要な一連の結果を導き，この定理に対する注目を促した．この定理の証明はコンパクト性の論法を用いるものであるため，結果として得られるモデルに関して具体的な情報を多く含むものとはなっていない．シルバーは，構造での識別不可能集合が，強い分割の性質から直接に得られることを指摘している：

9.3 定理 (Silver [66, 71]). 無限の極限順序数 α に対し，$\kappa \longrightarrow (\alpha)_2^{<\omega}$ が成立することと，任意の可算言語に対する構造で κ をその領域の部分集合として持つような $\mathcal{M}$ に対し，$\mathcal{M}$ の識別不可能集合 $X \in [\kappa]^\alpha$ が存在することは同値である．

証明 $\{\varphi_n \mid n \in \omega\}$ を $\mathcal{M}$ の言語の論理式の枚挙とする．ここに φ_n はある $k(n) \leq n$ に対し，高々自由変数 $v_1, \ldots, v_{k(n)}$ を持つものとする．f: $[\kappa]^{<\omega} \to 2$ を $\mathcal{M} \models \varphi_n[\xi_1, \ldots, \xi_{k(n)}]$ なら，$f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$, そうでなければ $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 1$ として定義する．このとき，f に関し一様な集合で極限順序の順序型をもつ任意の集合は $\mathcal{M}$ の識別不可能集合となる．

逆に，f: $[\kappa]^{<\omega} \to 2$ として，X を構造 $\langle \kappa, \in, f|[\kappa]^n \rangle_{n\in\omega}$ の識別不可能集合とすると，X は f に関し一様になる． ⊣

構成的階層 L の一様性から，十分に豊かな構造が，大きな識別不可能集合を持つなら，この構造の理論に識別不可能集合の役割を果たす順序数のクラスをそそぎこむことで L を生成できる，ということに，シルバーは気が付く．これは，順序数のクラスを非述語的に用いてタイプ理論を拡張することで L を構成するという，ゲーデルの元のやり方からきているのであるが，識別不可能集合による生成により，重点は識別不可能集合の満たす理論に移行し，この結果 V と L との隔たりに関する驚くべき帰結が得られることになるのである．

シルバーの仕事を一連の補題で示すが，ここで導かれる種々の条件が $0^{\#}$ を形成することになる．これは後で重要になることであるが，これらの結果は，選択公理に依存しない．一見選択公理を用いているように見える議論からどのようにして選択公理の使用を取り除くことができるかについては，そのような要所要所で述べることにする．

3.3(a) により，論理式 $\varphi_0(v_0, v_1)$ で L において，L の整列順序 $<_L$ を定義するもので，任意の極限順序数 $\delta > \omega$ と $x, y \in L_\delta$ に対し，$x <_L y$ となることと $L_\delta \models \varphi_0[x, y]$ となることが同値になるようなものが存在する．任意の $\mathcal{L}_\in$ の論理式 $\varphi(v_0, \ldots, v_m)$ に対し，

次のようにして φ に対する**標準的スコーレム項** t_φ を定義することができる：

$$t_\varphi(v_1,\ldots,v_m)=v_0 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall v_{m+2}\neg\varphi(v_{m+2},v_1,\ldots,v_m) \ \wedge \ v_0=\emptyset) \vee$$
$$(\varphi(v_0,v_1,\ldots,v_m) \ \wedge \ \forall v_{m+1}(\varphi_0(v_{m+1},v_0)\to\neg\varphi(v_{m+1},v_1,\ldots,v_m)))\,.$$

φ_0 での整列順序の性質を満たすような任意の $\mathcal{M}=\langle M,E\rangle$ —— 例えば，$\mathcal{M}$ がある極限順序数 $\delta>\omega$ に対し $\langle L_\delta,\in\rangle$ と初等的同値になっているときに，対応する拡張

$$\langle M,E,t_\varphi^{\mathcal{M}}\rangle_\varphi$$

を考えることができる．ここに，解釈 $t_\varphi^{\mathcal{M}}$ は φ に対するスコーレム関数で，$t_\varphi^{\mathcal{M}}(x_1,\ldots,x_m)$ は，$\mathcal{M}\models\varphi[y,x_1,\ldots,x_m]$ となるようなものが存在するときには，φ_0 により，そのうちの最小の y をとることでうまく定義できる．$\{t_\varphi^{\mathcal{M}}\mid\varphi$ は $\mathcal{L}_\in$ の論理式$\}$ は定義可能性により，関数の合成に関して既に閉じていることに注意する．よって，これは $\mathcal{M}$ 上のスコーレム関数の完全族となっている．したがって，$X\subseteq M$ に対し，X の $\mathcal{M}$ でのスコーレム閉包は，領域

$$\{t_\varphi^{\mathcal{M}}(x_1,\ldots,x_m)\mid\varphi \text{ は } \mathcal{L}_\in \text{ 論理式で } x_1,\ldots,x_m\in X\}$$

を持つものとして一意に決まる．この集合は次の意味で標準的なものである：つまり，$\{x\}$ が $\mathcal{M}$ 上で X の元をパラメタとして定義可能な $x\in M$ は X を含むすべての $\mathcal{M}$ の初等的部分構造に含まれているから，このようなものの全体が上の集合となる．

本節では**スコーレム項**とは t_φ の形をしたものの一つのこととする．

もっとも，スコーレム項が具体的にどういう形をしたものであるかは，後の節でこれを再びとりあげるまで問題とはならないのであるが．

次に識別不可能集合を持つ理論について考察する．$\mathcal{L}_\in^*$ を，$\mathcal{L}_\in$ に定数記号 $\{c_k\mid k\in\omega\}$ を加えたものとする．EM-青写真（EM は Ehrenfeucht-Mostowski の頭文字）とは，ある $\mathcal{L}_\in^*$-構造

$$\langle L_\delta,\in,x_k\rangle_{k\in\omega}$$

の理論で，ここに δ は ω より真に大きな極限順序数で，$\{x_k\mid k\in\omega\}$ は $\langle L_\delta,\in\rangle$ の任意の識別不可能集合で昇順にならべられているものとする．ここで基本的なのは，任意の極限順序数 $\delta>\omega$ および任意の順序数からなる $\langle L_\delta,\in\rangle$ の識別不可能集合は EM-青写真を一意に決定するということである：任意の識別不可能集合の元の上昇列 $\langle x_k\mid k\in\omega\rangle$ に対し，$\langle L_\delta,\in,x_k\rangle_{k\in\omega}$ の理論をとればよい．

任意の $\mathcal{L}_\in^*$ の理論 T に対し T^- で T の $\mathcal{L}_\in$ との共通部分，つまり，T の部分でどの c_k も現れないようなものの全体を表すことにする．

9.4 補題　T を EM-青写真とする．このとき，任意の α に対し，T^- のモデル $\mathcal{M}=\mathcal{M}(T,\alpha)$ で次を満たすものが一意に決まる：

(a) 順序型 α を持つ $\mathcal{M}$ での意味での順序数の集合 X で，$\mathcal{M}$ の識別不可能集合となるものがある．さらに，任意の $\mathcal{L}_\in$ の論理式 $\varphi(v_1,\ldots,v_n)$ に対し，X の元の上昇列となっ

ている n-組で φ を $\mathcal{M}$ で満たすものが存在するのは，$\varphi(c_0,\ldots,c_{n-1})\in T$ となる，ちょうどそのときである．

(b) X の $\mathcal{M}$ でのスコーレム閉包は $\mathcal{M}$ 自身となる．

証明　EM-青写真の定義から，T は少なくとも一つは無限モデルを持つ．そこで，9.2 の証明から，(a) を満たすものが存在することが分かる．このモデルでの識別不可能集合のスコーレム閉包をとると，さらに (b) も満たすようなモデル $\mathcal{M}$ を得ることができる（α の各元に相当する定数記号によって拡張された言語 $\mathcal{L}^\alpha_\in$ でのモデルで (a) を満たすものがヘンキンの完全性定理の証明での構成法で得られているとすると，この項によるモデルはすでに (b) も満たしているが，$\mathcal{L}^\alpha_\in$ の項は α の整列順序から得られる順序で整列されているから，この構成は選択公理なしでできる）．

次に，二つのモデル $\mathcal{M}$ と $\overline{\mathcal{M}}$ があり，対応する識別不可能集合は X と $\overline{X}$ であるとする．X と $\overline{X}$ は両方とも順序型 α を持つから，$h\colon X\to\overline{X}$ を順序同型とする．このとき，h を $\mathcal{M}$ と $\overline{\mathcal{M}}$ の間の同型写像に拡張することができる：(b) により，$\mathcal{M}$ の元は，あるスコーレム項 t と X の元 $x_1,\ldots,x_n$ により，$t^{\mathcal{M}}(x_1,\ldots,x_n)$ という形に表せる．したがって，

$$\tilde{h}(t^{\mathcal{M}}(x_1,\ldots,x_n)) = t^{\overline{\mathcal{M}}}(h(x_1),\ldots,h(x_n))$$

で与えられる写像 $\tilde{h}$ が同型写像となることが示せればよい：任意の論理式 $\varphi(v_1,\ldots,v_n)$ と上昇列となっている X の元の n-組 $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ に対し，

$$\mathcal{M}\models\varphi[x_1,\ldots,x_n] \;\Leftrightarrow\; \varphi(c_0,\ldots,c_{n-1})\in T \;\Leftrightarrow\; \overline{\mathcal{M}}\models\varphi[h(x_1),\ldots,h(x_n)]$$

が成り立つ．スコーレム項は "定義可能" であるから，スコーレム項の満たすべき等式を主張する論理式を用いると $\tilde{h}$ がうまく定義できていることが確かめられる．同様にして，これが要素関係を保存し，全射であることも示せる．　$\dashv$

$\mathcal{M}(T,\alpha)$ が整順的であると非常に都合がよい．このときには，$\mathcal{M}(T,\alpha)$ は推移的崩壊を持ち，これは，3.3(a) により $\langle L_\delta,\in\rangle$ という形をしているからである．このようなときには

$$\mathcal{M}(T,\alpha) \text{ を } \langle L_\delta,\in\rangle \text{ と同一視する．}$$

今までもそうであったように $\langle L_\delta,\in\rangle$ を L_δ で表すことにする．

9.5 補題　T を EM-青写真とする．このとき，すべての α に対し $\mathcal{M}(T,\alpha)$ が整順的であることと，

(I)　すべての $\alpha<\omega_1$ に対し，$\mathcal{M}(T,\alpha)$ は整順的である

ことは同値となる．

証明　ある α に対し，$\mathcal{M}(T,\alpha)=\langle M,E\rangle$ が整順的でないとする．

$$\langle a_i \mid i\in\omega\rangle\in{}^\omega M \text{ で } a_{i+1}\;E\;a_i \text{ がすべての } i\in\omega \text{ に対し成り立っている}$$

ようなものをとる（ここでは，$\langle M, E\rangle$ が α の整列順序を受け継いで整列可能となるので選択公理は必要でない）．各 a_i は あるスコーレム項 t と識別不可能集合の元 $x_1, \ldots, x_j$ により，$t^{\langle M,E\rangle}(x_1, \ldots, x_j)$ という形をしているから，Y をこのような表現に現れる識別不可能集合の元の全体からなる可算集合とする．$\mathcal{N}$ を $\mathcal{M}(T, \alpha)$ での Y のスコーレム閉包とすると，$\mathcal{N}$ は整順的でない．一方，$\beta < \omega_1$ を Y の順序型とすると，$\mathcal{N} \cong \mathcal{M}(T, \beta)$ となる．　⊣

この結果は，任意の大きさの整順的なモデルを作れる EM-青写真を得るために強い分割の性質を用いる，というアイデアの動機付けとなっている：

9.6 補題　κ は $\kappa \longrightarrow (\omega_1)^{<\omega}_2$ を満たすとする．このとき，EM-青写真で 9.5 の (I) を満たすものが存在する．

証明　9.3 により，L_κ は非可算な識別不可能集合を持つ．T をこれに対応する EM-青写真とすると，任意の $\alpha < \omega_1$ に対し，$\mathcal{M}(T, \alpha)$ は，識別不可能集合の最初の α 個の元の L_κ でのスコーレム閉包に同型となるから，整順的である．　⊣

(I) からすでにローボトムの 8.3 での結論を導き出すことができる：

9.7 補題　(I) を満たす EM-青写真が存在すれば，$\mathcal{P}(\omega)^L$ は可算となる．

証明　ある $\delta \geq \omega_1$ に対し，$\mathcal{M}(T, \omega_1) = L_\delta$ となるが，このとき $\mathcal{P}(\omega)^L \subseteq L_\delta$ である．特に，$a \in \mathcal{P}(\omega)^L$ なら，あるスコーレム項 t と識別不可能集合の元 $x_0 < \cdots < x_n$ に対し，$a = t^{L_\delta}(x_0, \ldots, x_n)$ となる．$\langle z_i \mid i \in \omega\rangle$ を識別不可能集合の最初の ω 番目までの元とする．各 k は定義可能であるから，

$$k \in t^{L_\delta}(x_0, \ldots, x_n) \;\Leftrightarrow\; k \in t^{L_\delta}(z_0, \ldots, z_n)$$

となり，したがって，$a = t^{L_\delta}(z_0, \ldots, z_n)$ である．このような項は可算個しかないから，$\mathcal{P}(\omega)^L$ は可算であることが示せた．　⊣

9.6 での仮定は，さらに 2 つの，驚くべき帰結を持つ条件を満たすような，EM-青写真の存在をも内包している．9.6 の証明から，

(i) ρ は L_ρ が順序型 ω_1 の識別不可能集合を持つような最小の極限順序数とし；
(ii) H はこのような識別不可能集合のうち ω 番目の元が最小になるようなものとし；
(iii) T_0 はこれに対応する EM-青写真とする．

9.8 補題　$T = T_0$ に対し次の条件が成り立つ

(II)　任意の n-変数スコーレム項 t に対し T は，

$$t(c_0, \ldots, c_{n-1}) \in \mathrm{On} \;\to t(c_0, \ldots, c_{n-1}) < c_n$$

という文を含む．

証明 そうでないとして，ある t に対し

$$t(c_0, \ldots, c_{n-1}) \in \mathrm{On} \ \wedge \ c_n \leq t(c_0, \ldots, c_{n-1})$$

が T_0 の元となっている仮定する．$z_0 < \cdots < z_{n-1}$ をここで固定した L_ρ の識別不可能集合 H の初めの n 個の元として，$\overline{H} = H - \{z_0, \ldots, z_{n-1}\}$, $\delta = t^{L_\rho}(z_0, \ldots, z_{n-1}) < \rho$ とする．仮定と識別不可能性から，$\overline{H} \subseteq \delta$ である．さらに，δ は極限順序数で置き換えられる（ある極限順序数 $\overline{\delta}$ と $k \in \omega$ に対し $\delta = \overline{\delta} + k$ となっていれば，$\overline{H}$ は $\overline{\delta}$ 以下の要素を持つ．したがって $c_n \leq t(c_0, \ldots, c_{n-1}) - k$ が成り立ち，$\overline{H} \subseteq \overline{\delta}$ となる）．

ここで，$\overline{H}$ は L_δ での識別不可能集合となることを示すが，これは ρ が最小に選んであったことに矛盾する：$x_1 < \cdots < x_m$ と $y_1 < \cdots < y_m$ をすべて $\overline{H}$ の元とする．このとき，任意の論理式 $\varphi(v_1, \ldots, v_m)$ に対し，

$$(*) \qquad L_\delta \models \varphi[x_1, \ldots, x_m]$$

は $L_\delta \subseteq L_\rho$ が推移的であることから，$L_\rho \models \varphi^{L_\delta}[x_1, \ldots, x_m]$ と同値になる．L_δ は L_ρ で δ から定義可能であるから（Devlin [84: II§2] を参照），これを δ の定義と組み合せると，$(*)$ はある $\overline{\varphi}$ に対し，

$$L_\rho \models \overline{\varphi}[x_1, \ldots, x_m, z_0, \ldots, z_{n-1}]$$

と同値になることが分かる．同様に，

$$L_\delta \models \varphi[y_1, \ldots, y_m] \quad \Leftrightarrow \quad L_\rho \models \overline{\varphi}[y_1, \ldots, y_m, z_0, \ldots, z_{n-1}] .$$

となる．したがって，H が L_ρ で識別不可能集合あることから，$\overline{H}$ が L_δ での識別不可能集合であることを帰結できる． ⊣

次の特徴付けがただちに得られる：

9.9 補題 EM-青写真 T が 9.8 の (II) を満たすことと，任意の無限極限基数 α に対し，$\mathcal{M}(T, \alpha)$ に対応する識別不可能集合がこの構造での順序数の全体の中で共終になることは，同値である． ⊣

ローボトムもこの仕事に関与していたが，特に次に述べるもう一つの条件に関してそうであった (Devlin [73: 195]; Silver [71: 77]):

9.10 補題 $T = T_0$ に対し，次の条件が成り立つ：

(III) 任意の $(m+n+1)$-変数のスコーレム項 t に対し，T は，文

$$\begin{aligned} &t(c_0, \ldots, c_{m+n}) < c_m \ \rightarrow \\ &\qquad t(c_0, \ldots, c_{m+n}) = t(c_0, \ldots, c_{m-1}, c_{m+n+1}, \ldots, c_{m+2n+1}) \end{aligned}$$

を含む．

注意 この条件は “remarkable condition” と呼ばれているものである．識別不可能性の

論法により，ここでの結論は容易に次のように改良できる：任意の $k_1 < \cdots < k_{n+1}$ で $m \le k_1$ となるものに対し，

$$t(c_0, \ldots, c_{m+n}) = t(c_0, \ldots, c_{m-1}, c_{k_1}, \ldots, c_{k_{n+1}})$$

が成り立つ．以下では，(III) を用いるときには，断りなしにこの形のものとして用いる．

証明

$$t(c_0, \ldots, c_{m+n}) < c_m$$

が T_0 に含まれていると仮定してよい．$H = \bigcup\{s_\xi \mid \xi < \omega_1\}$ を互いに素な，ひとつながりになった集合への分割で，$|s_0| = m$，また，$0 \le \xi < \eta < \omega_1$ に対し，$|s_\eta| = n+1$ かつ $\max(s_\xi) < \min(s_\eta)$ となっているものとする．$0 < \xi < \omega_1$ に対し，$t(s_0, s_\xi)$ で $t^{L_\rho}(x_0, \ldots, x_{m-1}, y_0^\xi, \ldots, y_n^\xi)$ を表すことにする．ここに，$s_0 = \{x_0, \ldots, x_{m-1}\}$，$s_\xi = \{y_0^\xi, \ldots, y_n^\xi\}$ で，これらは昇順にならべられているとする．識別不可能性により，$t(s_0, s_\xi) \ne t(s_0, s_\eta)$ がどれかの（したがってすべての）$0 < \xi < \eta < \omega_1$ に対し成り立つことから矛盾が導ければよい．

$t(s_0, s_\xi) > t(s_0, s_\eta)$ が $0 < \xi < \eta < \omega_1$ に対し成り立つとするれば，順序数の無限下降列が得られてしまう．他方，もし $0 < \xi < \eta < \omega_1$ に対し，$t(s_0, s_\xi) < t(s_0, s_\eta)$ とすれば，$\{t(s_0, s_\xi) \mid 0 < \xi < \omega_1\}$ が L_ρ での識別不可能集合となることが容易に示せる．ここで，s_ω の最初の元 y_0^ω は H の ω 番目の元となるが，最初の仮定により，$t(s_0, s_\omega) < y_0^\omega$ となる．これは H の ω 番目の元の最小性の仮定に矛盾する．　$\dashv$

ここで，条件 (I)–(III) を満たす EM-青写真を分析する．このような T と任意の α に対し，ここでは，

$$\langle \iota_\xi^{T,\alpha} \mid \xi < \alpha \rangle$$

で，対応する $\mathcal{M}(T, \alpha)$ での識別不可能集合を昇順にならべたものとする．(III) は次のような重要な帰結をもたらす：

9.11 補題　T を (I)–(III) を満たす EM-青写真として $\omega \le \alpha \le \beta$ で α は極限順序数とする．このとき，$\{\iota_\xi^{T,\beta} \mid \xi < \alpha\}$ の $\mathcal{M}(T, \beta)$ でのスコーレム閉包は，$\iota = \iota_\alpha^{T,\beta}$ として L_ι である．したがって，

$$\mathcal{M}(T, \alpha) = L_\iota \text{ かつすべての } \xi < \alpha \text{ に対し } \iota_\xi^{T,\alpha} = \iota_\xi^{T,\beta} \text{ である．}$$

証明　$\mathcal{N}$ を上のようなスコーレム閉包とする．$\mathrm{On}^{\mathcal{N}} = \iota_\alpha^{T,\beta}$ を示せば，これから，$\mathcal{N}$ はすでに推移的であることが分かり，二番目の主張は $\mathcal{N}$ の定義と $\mathcal{M}(T, \alpha)$ の一意性から導ける．簡単のために，以下では識別不可能集合の元の上付き添数 ${}^{T,\beta}$ は省略する．

σ が $\mathcal{N}$ の順序数なら，α が極限順序数であることと，(II) により，あるスコーレム項 t と $\xi_0 < \cdots < \xi_{n-1} < \alpha$ があって，

$$\sigma = t^{\mathcal{M}(T,\beta)}(\iota_{\xi_0}, \ldots, \iota_{\xi_{n-1}}) < \iota_{\xi_n} < \iota_\alpha$$

となる．逆に，$\tau < \iota_\alpha$ なら，あるスコーレム項 u と識別不可能集合の元の昇順列で

$\zeta_{m-1} < \alpha \leq \eta_0$ となるものに対し，

$$\tau = u^{\mathcal{M}(T,\beta)}(\iota_{\zeta_0}, \ldots, \iota_{\zeta_{m-1}}, \iota_{\eta_0}, \ldots, \iota_{\eta_n}) \ < \ \iota_\alpha$$

とできる．(III) により，

$$\tau = u^{\mathcal{M}(T,\beta)}(\iota_{\zeta_0}, \ldots, \iota_{\zeta_{m-1}}, \iota_{\zeta_{m-1}+1}, \ldots, \iota_{\zeta_{m-1}+n+1})$$

となるが，α は極限順序数だから，これは $\mathcal{N}$ の元となる． ⊣

よって，(I)–(III) を満たす任意の EM-青写真 T と任意の ξ に対し，厳密さを欠くことなく，

ある（したがってすべての）極限順序数 $\alpha > \xi$ に対し $\iota_\xi^T = \iota_\xi^{T,\alpha}$ また
$I^T = \{\iota_\xi^T \mid \xi \in \mathrm{On}\}$

とすることにしてよい．

9.11 から種々の結論が得られる．

9.12 補題 T を (I)–(III) を満たす EM-青写真とする．このとき，

(a) $\xi < \zeta$ なら $L_{\iota_\xi^T} \prec L_{\iota_\zeta^T}$ となる．

(b) すべての ξ に対し，$|\iota_\xi^T| = |\xi| + \aleph_0$ となる．

(c) I^T は，順序数の閉非有界なクラスとなる．

(d) 任意の基数 $\lambda > \omega$ に対し，$\iota_\lambda^T = \lambda \in I^T$ となる．したがって，$\mathcal{M}(T, \lambda) = L_\lambda$ である．

(e) T は (I)–(III) を満たす唯一の EM-青写真である．

証明 (a) は $\xi < \zeta$ が無限極限順序数の場合には 9.11 から直接に導ける．したがって，十分に大きな $L_{\iota_\beta^T}$ での識別不可能性の論法により，任意のの $\xi < \zeta$ に対し成り立つことが示せる．

α が無限極限順序数なら，$L_{\iota_\alpha^T}$ は 9.11 によりそれ自身での $\{\iota_\xi^T \mid \xi < \alpha\}$ のスコーレム閉包となる．したがって，$|\iota_\alpha^T| = |\alpha|$ となり，これから (b) がすべての ξ に対し成り立つことが言える．9.9 により，$\{\iota_\xi^T \mid \xi < \alpha\}$ は ι_α^T で共終だから，これにより (c) もでる．

(d) は，(b) と (c) の帰結として得られる．

最後に (e) については，(d) により T が $\langle L_{\omega_\omega}, \in, \omega_{n+1}\rangle_{n\in\omega}$ の理論となっており，(I)-(III) を満たす他の EM-青写真 $\overline{T}$ についても同様であることに注意すればよい． ⊣

(a) と (d) を仮定すると，L は初等的連鎖 $\langle L_\lambda \mid \lambda > \omega, \lambda$ は基数$\rangle$ の和となるから，L での充足関係は ZFC で

$L \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \Leftrightarrow \quad L_\lambda \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ が
$a_1, \ldots, a_n \in L_\lambda$ となる，ある（任意の）$\lambda > \omega$ で成り立つ

として定義できる．特に，L での真理の定義は，文 σ に対し

$$L \models \sigma \quad \Leftrightarrow \quad L_{\omega_1} \models \sigma$$

によって与えられる．したがって，L で真となる文（のゲーデル数）の集合は**構成可能**となる．しかし，真理の定義不可能性から，これは L で**定義可能**ではあり得ないが，そもそも（本当の）ω_1 は識別不可能集合の元であることから L では定義できないわけである．L での充足関係を用いると次の補題のような命題が ZFC で記述できるようになる．

9.13 補題　T を (I)–(III) を満たす EM-青写真とする．このとき：

(a) すべての ξ に対し，$L_{\iota_\xi^T} \prec L$.

(b) C が L に対する識別不可能な順序数の閉非有界なクラスで，C の L でのスコーレム閉包がふたたび L となるのは，$C = I^T$ となるときである．

証明　(b) の順方向を示せば十分である：まず $C \cap I^T$ が無限であることに注意すると，C に対応する EM-青写真も T になることが分かる．$h\colon C \to I^T$ を順序同型とする．9.4 での一意性を示したときの証明から h は同型写像 $\tilde{h}\colon L \to L$ に拡張できるが，$\tilde{h}$ は恒等写像でなければならない（そうでなければ，値域に入らない順序数がでてきてしまう）．したがって，$C = I^T$ である．　⊣

9.12(e) により，(I)–(III) を満たす EM-青写真は，もし存在するなら一意に決まるから，このときには

$0^{\#}$ を (I)–(III) を満たす EM-青写真とする

と定義する．言いならわされている不正確な表現を踏襲して

$0^{\#}$ が存在する

というのを，(I)–(III) を満たす EM-青写真 T が存在する，という意味に用いる．帰納的な $\mathcal{L}_\in^*$ の算術化により，$0^{\#}$ は ω の部分集合と見なすことができる．シルバーが理論としての T に着目していたのに対し，ソロヴェイは Solovay [67] ── ここで#記法が導入されている ── でこれが ω の部分集合として得られることを強調している．“$0^{\#}$ が存在する” ということの意味は後の絶対性に関する結果 (14.12) で明らかになるが，そこでは，集合としての $0^{\#}$ が L の元とならないにもかかわらず，任意の $0^{\#}$ を含む ZF のモデルで $0^{\#}$ を定義するような論理式の存在することが示される．一意性から，9.12 と 9.13 での上付きの T を落せるが，次のものはシルバーの結果の主定理を総括するものとなっている：

9.14 定理　(Silver [66, 71]).

(a) $0^{\#}$ が存在することと，ある L_δ が非可算な識別不可能集合を持つことは同値である．したがって，$\kappa \longrightarrow (\omega_1)_2^{<\omega}$ がある κ について成り立てば（例えば κ が可測基数であるとき），$0^{\#}$ は存在する．

(b) $0^{\#}$ が存在することと，順序数の識別不可能なクラス I で，I の L でのスコーレム閉包はふたたび L となることで特徴付けされるようなものが存在することは同値である．特に，$\langle \iota_\xi \mid \xi \in \mathrm{On} \rangle$ を I の昇順の枚挙とすると，I は次のような性質を満たす：$\xi \le \zeta$ なら，$L_{\iota_\xi} \prec L_{\iota_\zeta} \prec L$ となり，$|\iota_\xi| = |\xi| + \aleph_0$ である．したがって，I はすべての非可算基数を含み，すべての極限順序数 $\alpha \ge \omega$ に対し，$\{\iota_\xi \mid \xi < \alpha\}$ の L_{ι_α} でのスコーレム閉包は再び L_{ι_α} となる．　⊣

このようにして，ガイフマンの 9.1 での結論は最終的なやりかたで拡張されたわけである：$0^\#$ の存在は，一つの理論から順序数の識別不可能なクラスを生成することで L を構成するための完全な方法を与える本質的な原理である．シルバーは，ガイフマンの仮定を $\kappa \longrightarrow (\omega_1)_2^{<\omega}$ に還元することにも成功している．次の結果により，彼はこの還元がエルデシュの基数の階層において最良のものとなっていることを示した：

9.15 定理 (Silver [66, 70]). M を ZFC の内部モデルとし，$\alpha < \omega_1^M$, $\kappa \longrightarrow (\alpha)_\delta^{<\omega}$ となっているとする．このとき，$(\kappa \longrightarrow (\alpha)_\delta^{<\omega})^M$ が成り立つ．したがって，

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \exists\kappa\forall\alpha < \omega_1(\kappa \longrightarrow (\alpha)_2^{<\omega}))$$

なら，

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \exists\kappa\forall\alpha < \omega_1(\kappa \longrightarrow (\alpha)_2^{<\omega}) + 0^\# \text{ は存在しない})$$

が言える．

証明 $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \delta$ で $f \in M$ とする．f に関し一様な M での集合で順序型 α を持つものが見つかればよい．$\alpha < \omega_1^M$ だから，$g \in M$, $g\colon \omega \to \alpha$ で全単射となるものがある．$D = \{d \mid d$ は，ある n に対し $d : g``n \to \kappa$ となる順序を保つ単射で，この値域は f に関し一様 $\}$ として，D 上の半順序 $\prec$ を $d \prec \bar{d} \iff d \supset \bar{d}$ と定義する．$g \in M$ で，$(\kappa^{<\omega})^M = \kappa^{<\omega}$ だから，$\langle D, \prec\rangle \in M$ となる．次の命題は ZFC で直ちに示せる：

$\prec$ が整順的でない $\iff$ 順序型 α の集合で f に関し一様になるものが存在する．

したがって，$\prec$ は V で整順的でない．したがって，絶対性 (0.3) により，$\prec$ は M でも整順的でない．したがって，上の命題を M で用いることにより，求めるものが得られる．

最後の主張は，9.7 により，((I) を満たす EM-青写真は存在しない $)^L$ だから，$M = L$ ととることで示せる． ⊣

M は上の議論を遂行するのに十分な，ある ZFC の単一の定理のモデルになっていればよく，上付きの $<\omega$ は任意の固定された “n”$(n \in \omega)$ で置き換えられることに注意する．

$0^\#$ の存在を帰結する組合せ論的な命題については，さらに研究されている．クーネンによる結果の系によりジョンソン基数が存在すれば $0^\#$ が存在する (21.4). Devlin-Paris [73] では，$\kappa \longrightarrow (\omega_1)_2^{<\omega}$ のある帰結から $0^\#$ を得る方法が示されている．Baumgartner-Galvin [78] はそれから生成される可能性のある EM-青写真に依存するようなエルデシュ基数の一般化が定式化され，この枠組で最適化された $0^\#$ の導出に関する結果が与えられている．

最終的には，内部モデルの仮定を組み込むことで，以下のような同値命題が得られる．ZF の内部モデル M に対し，

$$\eta \xrightarrow{M} (\alpha)_2^{<\omega}$$

を，すべての関数 $f\colon [\eta]^{<\omega} \to 2$ で $f \in M$ となるものに対し，$X \in [\eta]^\alpha$ （M の元とはかぎらない）で，f に関し一様になるものが存在する，という命題を表すことにする．

9.16 演習 (Gloede [72: 153]). 以下は同値である：

(a) $0^{\#}$ が存在する．

(b) すべての基数 $\lambda > \omega$ に対し，$\lambda \xrightarrow{L} (\lambda)_2^{<\omega}$.

(c) ある η に対し $\eta \xrightarrow{L} (\omega_1)_2^{<\omega}$. ⊣

$0^{\#}$ が存在するときには，巨大基数の性格を持った帰結で，特に識別不可能なクラス $\{\iota_\xi \mid \xi \in \mathrm{On}\}$ と直結したものがそれから導けるというのは十分想像のつくことである．

9.17 定理　$0^{\#}$ が存在すると仮定する．このとき：

(a) 初等的埋め込み $L \prec L$ が存在する．

(b) (ι_ξ は全面的に記述不可能 $)^L$ がすべての ξ に対し成り立つ．

(c) すべての無限な $x \in L$ に対し，$|\mathcal{P}(x)^L| = |x|$.

(d) すべての ξ と $\alpha < \omega_1^L$ に対し，$(\iota_\xi \to (\alpha)_2^{<\omega})^L$.

証明　(a) $\{\iota_\xi | \ \xi \in \mathrm{On}\}$ からそれ自身への任意の順序を保存する単射 h は

$$\tilde{h}(t^L(\iota_{\xi_1}, \ldots, \iota_{\xi_n})) = t^L(h(\iota_{\xi_1}), \ldots, h(\iota_{\xi_n}))$$

という定義により，$\tilde{h}$: $L \prec L$ に拡張できる（9.4 の証明を参照）．このような h で恒等写像でないものは，順序数のどれかを動かすような初等的埋め込みとなる．

(b) 識別不可能性により，ι_0 が L で全面的に記述不可能であることを示せばよい．h を上でのような写像で，$h(\iota_0) > \iota_0$ となるものとする．このとき ι_0 は $\tilde{h}$: $L \prec L$ の臨界点となる：もし $\delta = t^L(\iota_{\xi_1}, \ldots, \iota_{\xi_n}) < \iota_0$ で，$\xi_1 < \cdots < \xi_n$ なら，(III) により，

$$\tilde{h}(\delta) = t^L(h(\iota_{\xi_1}), \ldots, h(\iota_{\xi_n})) = t^L(\iota_{\xi_1}, \ldots, \iota_{\xi_n}) = \delta$$

となるからである．ここで 6.6 の証明での論法を用いることで，ι_0 が L で全面的に記述不可能であることが示せる．

(c) は，(b) により，(本物の）$|x|^+$ は L で到達不可能となるからよい．

(d) 識別不可能性から，ι_ξ は基数 $\lambda > \omega$ としてこの性質が示せればよい．そこで，f: $[\lambda]^{<\omega} \to 2$ で $f \in L$ と仮定する．このとき，$f = t^L(\iota_{\xi_0}, \ldots, \iota_{\xi_{m-1}}, \iota_{\zeta_0}, \ldots, \iota_{\zeta_n})$ で，識別不可能な元は昇順にならんでいて，$\iota_{\xi_{m-1}} < \lambda = \iota_\lambda \leq \iota_{\zeta_0}$ となっているとする．このとき識別不可能性の論法により $\{\iota_{\xi_{m-1}+1+\beta} \mid \beta \in \alpha\}$ は f に関し一様であることが分かる．したがって，9.15 の証明から，順序型 α の一様な集合が L で存在することが言える．⊣

少しわき道にそれて，前に約束した 7.16 の証明のスケッチを与えておく：

9.18 演習　(Reinhardt-Silver [65])．$\kappa(\omega)$ より小さい全面的に記述不可能基数が存在する．

ヒント　$\kappa = \kappa(\omega)$ として，W を V_κ の整列順序とし，I_0 を順序型が ω の $\langle V_\kappa, \in, W\rangle$ での識別不可能集合とする．$H \prec V_\kappa$ を W により導入されたスコーレム関数による I_0 の V_κ でのスコーレム閉包とする．H_0 をこの推移的崩壊として，e を崩壊の同型写像の逆写像とする．κ は到達不可能だから，H_0, H, V_κ はすべて ZFC のモデルになっていることに注意する．9.17(b) の証明でのようにして，任意の順序を保存する単射 h: $I_0 \to I_0$ で恒等写像でないものは，埋め込み $\tilde{h}$: $H_0 \prec H_0$ をひきおこし，この臨界点 δ は $H_0 \models$「δ は

全面的に記述不可能[1] を満たす．このとき，$e(\delta)$ は，H で全面的に記述不可能だから，V_κ で全面的に記述不可能となり，したがって実際に全面的に記述不可能である． ⊣

様々なシャープ

L に対する $0^\#$ の定義は，素直なやり方で $a \subseteq \mathrm{On}$ に対する内部モデル $L[a]$（§3 を参照）に拡張でき，これにより対応する $a^\# \subseteq \mathrm{On}$ を生成する．したがって，$0^\#$ が $L = L[0]$ に対するものだから $\#$ は，順序数の集合に対する演算として解釈できる．a を順序数の集合で，例えば $\alpha = \cup a$ とする．自明な場合を除くためにこれは無限順序数であるとしてよい．a に対する **EM-青写真**とは，

$$\langle L_\delta[a], \in, x_k, a, \xi \rangle_{k\in\omega, \xi\leq\alpha}$$

という形の構造で，$\delta > \alpha$ は極限順序数で $\{x_k \mid k \in \omega\}$ は $\langle L_\delta[a], \in, a, \xi\rangle_{\xi\leq\alpha}$ での順序数からなる識別不可能集合の昇順な枚挙となっていてるようなものの理論である．a に対する EM-青写真で (I)–(III) に対応するものを満たすものを得るためには，$|\alpha|$ 個の非論理記号を持つ言語の構造 $\mathcal{M}$ での順序数からなる無限の識別不可能集合が必要となる．このためには，9.3 での個別的な議論の代わりに，$\{\varphi_\zeta \mid \zeta < |\alpha|\}$ がこの言語の論理式を枚挙していて，φ_ζ の自由変数はすべて $v_1, \ldots, v_{k(\zeta)}$ に含まれているとして，関数

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \{\zeta < |\alpha| \mid k(\zeta) \leq n \ \wedge\ \mathcal{M} \models \varphi_\zeta[\xi_1, \ldots, \xi_{k(\zeta)}]\}$$

を用いればよい．したがって，分割の関係

$$\kappa \longrightarrow (\omega_1)^{<\omega}_{2^{|\alpha|}}$$

を満たす κ があれば十分である．他の議論の細部はほとんど変更なしに用いることができ，これにより，(I)–(III) を満たす EM-青写真 $a^\#$ が一意に決まり，これはコーディングにより $|\alpha|$ の部分集合とみなせるが，$\langle L[a], \in, a, \xi\rangle_{\xi\leq\alpha}$ に対応する閉非有界な順序数からなる識別不可能な元のクラス I_a も求まる．ここでは ω の部分集合として解釈されている実数の本質的な重要性から，$a \subseteq \omega$ に対する $a^\#$ が主に考察される（14.16 以降では，${}^\omega\omega$ の元として解釈された実数 a に対する $a^\#$ に考察の焦点が移行する）．このときには，非可算言語への逸脱は必要でないから：

9.19 定理 $\kappa \longrightarrow (\omega_1)^{<\omega}_2$ がある κ に対し成り立てば，すべての $a \subseteq \omega$ に対し，$a^\#$ が存在する． ⊣

このように，$0^\#$ の抽出は，分割解析の初期の結果からの様々なアイデアにより，モデル理論でのテクニックを導入して，L の研究へと登りつめることでなされた．シルバーの $0^\#$ に関する結果とソロヴェイのその定義可能性に関する結果 (§14) により，その重要性が確立された後で，さらに得られた結果が新しい構造的な直観を与えることになる．クーネンは間もなく 9.17 の逆が成り立つことを示している (21.1): **初等的埋め込み $j\colon L \prec L$ があれば，$0^\#$ が存在する．** この結果は内部モデル上の超越性に対する簡明な範例を与えている．つまり，初等的埋め込み $M \prec M$ の存在ということである．この後 1974 年に，イェ

ンセンは有名な被覆定理を確立するが，これは，1970年代の集合論でのもっとも重要な結果とみなされてよいものであった（これについては第II巻を参照）：**$0^\#$ が存在しないことと，任意の非可算集合 $X \subseteq \mathrm{On}$ に対し $Y \in L$ で，$Y \supseteq X$ かつ $|Y| = |X|$ となるものが存在することは同値である．** この結果は，$0^\#$ が存在するための驚くほど弱い条件を与えているだけでなく，$0^\#$ が存在しないときの V と L との間の強い制約関係を確立していて，この結果として，L の共終数に関する正規なふるまいの V に引き継がれることが帰結される．これらの結果により $0^\#$ の存在が，L 上の超越性にとっての中心的な仮説であることが裏付けられた．

第 3 章　強制法と実数の集合

この章では，コーエンの強制法による初期の成果で巨大基数に関連するものと，巨大基数の記述集合論への初期の応用について述べる．コーエンの発見は，集合論を一変させたが，この結果，巨大基数の仮説がより顕著な役割を果たすようになった．§10 では強制法の発展について議論し，基礎となる理論の復習をしたあと，弱い拡張とレヴィ崩壊に焦点をおく．§11 は，到達不可能基数が存在すれば，強制法による拡大の内部モデルで，すべての実数の集合がルベーグ可測になるようなものがとれる，というソロヴェイによる目の覚めるような結果にあてられている．§12 で記述集合論の歴史的発展を展望し，次の§13 で古典的な結果や，L により限界を示すゲーデルの結果を示すために必要になる枠組を準備する．ここで用意された舞台の上で，1960 年代以降集合論の主要な方向の一つとなる巨大基数と射影的集合に関する研究の結果が扱われる．§14 では，ソロヴェイのルベーグ可測性の結果から発展した彼の $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合に関する結果を示すが，これは後にさらに発展することになるものである．また，シャープの定義可能性に関するソロヴェイの結果および仮説についても述べる．このあと§15 で，古典的な記述集合論での方法を拡張し $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合を解析するためにシャープを用いる，マルティンによる手法について述べる．

§10　強制法の発展

1963 年の春，スタンフォード大学の解析学者コーエン Paul Cohen は，選択公理の ZF からの独立性および連続体仮説の ZFC からの独立性の略証をまとめた覚え書きを配布した．これらの証明は，もちろん，集合論のモデルの拡大を得るための手法である彼の強制法の初舞台であった．コーエンは 1963 年 5 月 3 日に彼の結果に関する講演をプリンストン高等研究所で行っている．この後 CH の結果に結果を収めた 2 つの論文 Cohen [63, 64] はすぐにゲーデルによって *Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.* に搭載されているが，この四半世紀前には，同じ雑誌にゲーデル自身の L に関する結果が発表されたのであった．

コーエンの革命的結果は明らかにより一般的な方法の可能性を示唆していたが，これを見抜いた周りにいたロジシャンたちは間もなく強制法の理論を発展させ，それによってさらに新しい結果を得だした．1963 年の中頃には，スタンフォードのフェファーマン Solomon Feferman は 1 階および 2 階の算術と選択公理に関する結果を得たが，この夏にスタンフォー

ドに来たレヴィはすぐに選択公理に関するより綿密な結果を得ている．その後さらに洗練された2つの結果が今度はプリンストン大学で得られている：イーストン William Easton の 1993 年後期におけるクラス強制法による正則基数の巾に関する結果 (Easton [64, 70]) と，ソロヴェイの 1964 年中頃の，到達不可能基数が存在すれば，強制法による拡大の内部モデルで，すべての実数の集合がルベーグ可測になるようなものがとれる，という結果 (Solovay [65b, 70]) である．この節では，強制法の発展について議論し，これの巨大基数との関わり，特にソロヴェイの結果にむけての準備を行う．強制法の始まりに関する，より詳しい事情については Moore [88] を参照されたい．

強制法は，驚くべき一般性と柔軟性を持つ，相対的無矛盾性および独立性の確立に際しての強い直観に支えられた図式を提供することになった．スコットによれば (Bell [85: ix]): "集合論は，コーエン以前と以後では同じ集合論ではあり得ず，現在の集合論のモデルに関する我々の知識の洗練度は前コーエン時代のそれとは全く比較を絶するものとなっている．" 現在から振りかえってみると，ベス Beth の直観論理の意味論（Dummett [77: §5] を参照）；ブール値モデルの 2-値準同形の研究（Rasiowa-Sikorski [63: VIII] を参照）；クリーニ Stephen Kleene とポスト Emil Post による比較不可能な Turing degree の構成方法（Lerman [83: II§2] を参照）などは，強制法の先駆と見なされ得るものであるが，実際にはコーエンはこれらの予兆については全く知らず，直接的かつ基本的な直観から出発して彼の結果を得たのであった．コーエンの功績は集合論のモデルを順序数のクラスを変更しない，極小なやり方で拡張する具体的な手続きを定式化したことであろう．スコットは続けて (Bell [85: ix]):

> 私はほとんどすべての当時の集合論研究者を知っているが，このうちの誰もこのようなやり方で証明がなされるとは思ってもいなかった，と確証できると思う．モデル理論での手法により，**超準**モデルはたくさんあることが分かっていたが，コーエンはひどく単純な最初の原理から出発して，モデルを**標準的**に（つまり整列的な順序数の集まりを持つように）保つ方法を見いだしたのであった．

ここに集合論は大きな変貌をとげ，これから先，この分野は豊かな実りをあげるようになるのだが，このことの奇異な様は筆舌に尽くしがたい．

彼の最初の論文 Cohen [63, 64] に続けてコーエンはさらにもう一つの論文 Cohen [65] を発表しているが，この後 1965 年春のハーバード大学での彼の講義を基にしたモノグラフ Cohen[66] で詳しい解説を与えている．後に，彼は自身の集合論の基礎に関する哲学的見解を 1967 年の夏に U.C.L.A. で行なわれた公理的集合論の学会への寄稿 Cohen [71] で述べている．この学会が，これまでの進歩を総括し，新しく開かれた研究領域へ創造力をそそぎこむというような，あの精神を高揚させる数少ない学会の一つであったことは皆の認めるところであった．

コーエンはまず数学での実存主義と形式主義の立場の比較から議論を始めている．彼は，可測基数の存在については，"これを認めることに対しても，また否定することに対しても，直観的に納得のゆく事実はまったく見いだされないように思う"(Cohen [71: 11ff]) と述べている．CH に関しては，これが正しくないということが受け入れられることになるであろうと考えているようである (Cohen [71: 12]): "これの正当化の議論となり得るのは，連続

体は巾集合の構成によって得られるわけであるが，これは置換の公理に基づく構成によって下から組みあげてゆくことでは到達できない．したがって，C [つまり $2^{\aleph_0}$] は $\aleph_1, \aleph_n, \aleph_\omega$ 等々より大きいと考えられる．” こう考えると，おそらく $2^{\aleph_0}$ は弱到達不可能基数にならなくてはならないであろう．コーエンのここでの思索は実存主義的な視点からなされているが，この見方は Cohen [66: 151] ではもっと断定的に主張されている．

ロビンソン Robinson [65] の影響があることを認めて，コーエン Cohen [71: 13] は，今度は形式主義の側に回って次のように続けている (p. 14):

> 慣れが批判能力をなまらせる，ということのもう一つの例としては到達不可能基数の公理があげられる．これを仮定することの通常の正当化は否定的なものであって，つまり，すべての基数が到達可能であると考えなければならない理由はない，というものである．同様な正当化は，有限集合から無限集合への移行でも行なわれている．適当な閉包演算の超限列を帰納的に構成するとき，我々は常に先へ先へと進めるから，この行きつく先に到達不可能基数があるべきである，というように議論するわけである．しかしながら，これはむしろ集合論の標準モデルの存在を正当化しているものであり，この命題は到達不可能基数の存在に比べてずっと弱いものであるから，私にはここでの議論はかなり疑わしいものであるように思える．到達不可能基数を認めることのもっと正直な理由は，経験により，このような基数が矛盾を導くことがなく，そのような矛盾が生じない，ということに対し我々がある種の直観を養っているということであろう．

この見方は，ツェルメロ Zermelo [30](§1) やゲーデル Gödel [47](§4) の見方とは正反対なものとなっている．

コーエンが結論として述べていることは，巨大基数の研究の後の発展を予見するものとなっていることは注目に値するが，ここで底流となっているのは懐疑と確信のなさを基調とした思惑である：

> それでも数学は，生命と力と奇蹟に満ち，しかし，それにもかかわらず押しつぶされそうな自己懐疑の萌芽をひめたプロメテウスの仕事に例えられよう．我々が状況を見渡し，これらの深淵な問題について思いをめぐらすことは稀である，というのはよいことである．それ以外の数学的生活においては，我々はこの輝かしい行列を見物し，あわよくばこの行列に参加することさえできるかもしれない．手の届かないと思われいた集合論の大問題は次々に解かれ，新しい公理が研究され，より大きな巨大基数が何らかの意味で我々の直観のとどくものとなってゆくであろう．これらすべてを通じて，数論が光輝く燈台として立ちはだかっていることになるであろう．我々が懐疑でおしつぶされそうになったとき —— これがあまりしばしば起こらないことを祈るが —— 我々は数論の安全な領域に戻って力がつくのを待ち，しかる後に再び，集合論の危険に満ちた地へと出陣することができるであろう．我々の宿命は，懐疑を抱いて生きることであり，我々がその絶対性に対する確信を持つことができないような問題を追求することであり，つまり，“真の” 科学がそれ自身人類の他の企てと同じく倫理的またおそらく経験論的性格を持つものであることを，認めざるを得ないことである．

注目すべきことに，20 年後のコメントでは，コーエンは，CH は正しくないという推量には触れず，連続体問題の形式的な解を強調している：

> ゲーデル自身は明らかにこの問題は絶対的な答が与えられるべきであるというプラトン的な見方をしていたため，彼の連続体仮説の集合論の公理との無矛盾性証明も，私のそれからの独立性の証明も最終的な答とは見なしていなかった．私の個人的な見方としては，現時点のこの問題の解は大変に満足のゆくものと見なしている．そしてこれが唯一の可能な解である

> と思う．この結果は，何が可能で何が可能でないかということに関する感触を与えるが，この意味でこれは大変に満足のゆくものと見なされるべきであると思う… 哲学の論文では違うかもしれないが，数学の論文では，この問題が決定不可能であるという解以外にはあり得ないと思う．

強制法はすぐに一般的な手法に鍛え上げられたが，これは特にソロヴェイの努力によるところが大きかった．彼の洗練された数学のスタイルと彼の強制法による巨大基数や記述集合論での基本的な結果により，ソロヴェイは集合論が爆発的に発展した，まさにこの時期を象徴する存在となった．彼は大学院では微分位相幾何の研究をしていたが，コーエンの 1963 年 5 月 3 日の講演を聴いて以来，集合論に力を集中するようになる．まず，CH の独立性の結果を，連続体の可能な大きさの特徴付けを与えることで拡張し (Solovay [63, 65]), 次に強制法を任意の半順序とその稠密集合に関するものとして拡張している．その後，ソロヴェイはテンネンバウム Stanley Tennenbaum と共同で，1965 年 6 月に強制法の反復の理論を確立し，これにより古典的なスースリン仮説の無矛盾性の証明を得た (Solovay-Tennenbaum [71: 201]).

論理式がある generic 拡大の族で成り立つことの記述の複雑性が，ソロヴェイを論理式の**ブール値**というアイデアへ導くことになった．後でヴォピェンカ Petr Vopěnka がすでに類似の概念を CH の独立性の証明の再整理 Vopěnka [64] で得ていたことが判明した（この論文には，κ を到達不可能基数とするとき，基数を保存して $2^{\aleph_0} \geq \kappa$ と強制することにより弱到達不可能だが強到達不可能ではないようなものにすることができる，という注目すべき注意が述べられている）．この概念は一般化，簡明化され，プラハでヴォピェンカにより始められた活発なセミナーの，そこで ∇-モデルと呼ばれているものに関する報告として一連の論文に発表され（Hájek [71: 78] を参照），論説 Vopěnka [67] で頂点に至った．しかしながら，これらのより早くに発表された論文は，一つにはここで用いられた定式化が，ブール代数ではなく完備束に値をとるようなものになっていたこともあり，大きなインパクトを与えるにいたらなかった．これとは独立に，スコットとソロヴェイは強制法をブール値モデルの言葉に完全に書きなおすというアイデアを押し進めて，ヴォピェンカのものと本質的には同値な定式化にたどりついた．任意の半順序を自然なやり方で “完備化” して完備ブール代数を得ることができるので，ブール値モデルの方法は一般性を全く失わないものとなっている．スコットの CH の独立性証明の再構成 Scott [67] や，1967 年の U.C.L.A. での学会で配られた彼の講義ノートによって，このアプローチはよく知られるものとなった．

コーエンの L の階層にそって分岐した言語と，彼の可算 $\in$-モデルへの依存が避けられることが最初に示されたのは，ブール値モデルによってであった．これらはエレガントな代数的装いを持っていて，より完全な情報を提供するように思えたため，最初は独立性の結果のための正しいアプローチであると思われていたのであった．ロッサー (J. Barkley Rosser [69]) は「簡明化された独立証明」(Simplified Independence Proofs) という題の本を書き，Solovay-Tennenbaum [71] はブール値モデルの言葉で書かれていた．しかし，シェーンフィールド (Joseph Shoenfield [71]) はすでに U.C.L.A. での講義で，半順序による強制法でも，ブール値でによるアプローチでの直接的な議論に対応するものが展開でき

ることを示していた．のみならず，ブール値モデルの方法は，抽象的すぎて新しい無矛盾性の結果を確立するためには直観性に欠けていることが次第に明らかになってきた．この抽象的な手法からの帰還はコーエンの具体的なアプローチの有効性を立証するもので，分岐した言語の使用ですら，帰納的関数論と集合論のはざまで強制法の議論を注意深く実行するに際しては，本質的な役割をはたしたのであった．

この時期には，強制法の応用の第一波と，それに付随しておこった巨大基数の理論での進歩により，集合論のさまざまな結果が驚くべきペースで確立されていった．ちょうどその時勢にのって書かれたマサイアス Adrian Mathias の概説はタイプされたものとして，U.C.L.A. での学会の直後に配布され，後に Mathias [79] として出版されたが，これは当時の発展を整理した形で伝える上で影響力が大きく，特に，当時バークレイの大学院生で後に重要な集合論の研究者となる，バウムガルトナー James Baumgartner, レイヴァー Richard Laver, ミッチェル William Mitchell といった人達にとって重要な情報源となった．

強制法の基礎

強制法に関する基礎で，Kunen [80], Jech [78], Bell [85] などの教科書にある強制法の 2 回の反復あたりまでの知識は仮定する．ここでは，大体は，一番目の Kunen の教科書での標準的な半順序によるアプローチと用語を採用する．ブール値によるアプローチは 2 番目の本で取り入れられており，3 番目の本では全面的に用いられている．第 II 巻での強制法の広範囲な使用に先立って，ここでは顕著な，あるいは特徴的な性質を以降で記述する：

強制法で，**半順序** (あるいは p.o.[1]) というときには，擬順序 $\langle P, \leq \rangle$ で，$\mathbb{1}$ で表される最大元を持つもののことをいう．$p, q \in P$（P の元を条件とも呼ぶ）に対し，

$$p \leq q \quad \Leftrightarrow \quad p \text{ は } q \text{ を拡張，あるいは精密化する}$$

とする．つまり，($\leq$ に関して）小さいほど，より多くの情報を持つものとする．これはブール値によるアプローチと対応し，意味するところは，p の許容するモデルの全体は q のそれより少ないということである．簡単のために $\langle P, \leq \rangle$ は普通には P と書くことにするが，区別の必要があるときには，$\leq$ の代りに $\leq_P$ と書き，$\mathbb{1}$ の代わりに $\mathbb{1}_P$ と書くことにする．

$\leq$ が反対称的であることを仮定する必要はない（Kunen [80: 52ff] を参照）．実際強制法の反復では，自然に定義される順序は反対称的でない．しかし，便宜上そのようなときは，

$$p \leq q \text{ かつ } q \leq p \text{ が成り立つときには } p \text{ と } q \text{ とを同一視する．}$$

特に，$\mathbb{1}_P$ は一意に決まる最大元とする．これは，同値類の p.o. を考えるということであるが，このことによる煩雑な記法はさける．

$$p \parallel q \quad \Leftrightarrow \quad p \text{ と } q \text{ は共存可能，つまり，} \exists r (r \leq p \ \wedge \ r \leq q)\,,$$
$$p \perp q \quad \Leftrightarrow \quad p \text{ と } q \text{ は共存不可能，つまり，} \neg (p \parallel q)$$

とする．$D \subseteq P$ に対し，

---

[1] [訳注] p.o. は英語 partial order の頭文字.

$$
\begin{array}{rcl}
D \text{ は } (P \text{ で}) \textbf{ 稠密} & \Leftrightarrow & \forall p \in P \exists d \in D (d \leq p)\,, \\
D \text{ は } (P \text{ で}) \textbf{ 前稠密} & \Leftrightarrow & \forall p \in P \exists d \in D (d \parallel p)\,, \\
D \text{ は } (P \text{ で}) \textbf{ 開稠密} & \Leftrightarrow & D \text{ は稠密} \wedge \forall d \in D \forall p \in P (p \leq d \ \rightarrow \ p \in D)\,, \\
D \text{ は } (P \text{ の}) \textbf{ 反鎖} & \Leftrightarrow & \forall p, q \in D (p \neq q \ \rightarrow \ p \perp q)\,, \\
D \text{ は } p \textbf{ の下の反鎖} & \Leftrightarrow & D \text{ は } \{q \mid q \leq p\} \text{ での反鎖}
\end{array}
$$

とする．D が稠密であるか，極大な反鎖であるときには，D は前稠密となる．

M を推移的な ZFC の $\in$-モデルとする．このとき，任意の集合 x に対し，

$M[x]$ を $M \cup \{x\}$ を含む最小の推移的な ZFC の $\in$-モデルとする

（ここではこのようなものがある場合を仮定している）．p.o. $P \in M$ と $G \subseteq P$ に対し，

G が M 上 P-generic とは，

$$
\begin{array}{rl}
\text{(i)} & \forall p, q \in G \exists r \in G (r \leq p \ \wedge \ r \leq q)\,, \\
\text{(ii)} & \forall p \in G \forall q \in P (p \leq q \ \rightarrow \ q \in G)\,, \\
\text{(iii)} & \forall D \subseteq P \ (D \text{ は } P \text{ で稠密} \wedge \ D \in M \rightarrow \ G \cap D \neq \emptyset)
\end{array}
$$

となること

とする．ここでは“稠密”を“前稠密”で置き換えてよい．このような G に対し，任意の極大な反鎖 $A \subseteq P$ で $A \in M$ となっているものをとると，$A \cap G$ はちょうど1つの元を持つことが容易に分かる．より一般的には，$p \in G$ で，A が p の下の極大な反鎖で $A \in M$ となっているとき，$A \cap G$ はちょうど1つの元を持つ．強制法の議論では，M を**基礎モデル**と呼び，$M[G]$ を **generic-拡大**と呼ぶ．自明な p.o. では $M = M[G]$ となるが，命題の記述と証明とを容易にするために，これも認めることにする．

特定の強制法の言語の形式化を固定することはしないが，名称（強制項）について，以下の取り決めをしておく：名称（あるいは区別の必要がある場合には P-名称）は点つきの記号，例えば $\dot{t}$ などで表される．これの generic-拡大 $M[G]$ での解釈は $\dot{t}^G$ あるいは $\dot{t}^{M[G]}$ と書く．これは，集合論の言語で定義可能な項についても同様に扱う，例えば，

$\dot{\omega}_2$ は generic-拡大での2番目の非可算基数の名称である．

ここで基本となる事実の一つは，集合 x が $M[G]$ の元となるのは x が $M[G]$ で G と有限個の M の元から定義できる，ちょうどそのときであるということで，したがって，このような x は対応する名称を持つことになる．$x \in M$ のときには，$\check{x}$ で x の標準的名称を表す．したがって，$\check{x}^G = x$ がすべての M 上 P-generic な G に対し成り立つ．通例となっているように，順序数 $\alpha \in M$ に対しては，順序数はすべての generic-拡大で絶対的であるから，$\check{\alpha}$ と書かずに単に α と書くことにする．$\dot{G}$ は generic な対象の標準的名称とし，$\check{V}$ は基礎モデルの標準的名称とする．これの意味は，基礎モデルは（定義可能な）クラスとみなせるので，すべての generic-拡大で内部モデルとなるということである．

P に対する強制関係は

$$p \Vdash_P \varphi$$

で表し，

$$\Vdash_P \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{1}_P \Vdash_P \varphi\,,$$
$$p \parallel_P \varphi \quad \Leftrightarrow \quad p \text{ は } \varphi \text{ を決定する，つまり，} p \Vdash_P \varphi \text{ または } p \Vdash_P \neg\varphi \text{ が成り立つ}$$

とする．下付きの P は文脈から明らかなときには省略する．これは，共存可能性を表す $\parallel$ でも同様である．個々の論理式 φ は日本語の数学用語で記述し，誤読のおそれのあるときには，これをクワインの引用記号「⌉で囲むことにする．$\Vdash$ は標準的な，推論に関して閉じた関係とする．これは歴史的には “weak forcing” と呼ばれていたもので，コーエンのもとの関係とは異なる（Kunen [80: 235ff] を参照）．**極大性原理**は，よく知られた性質の一つである：

$p \Vdash \exists x\varphi(x, \dot{t}_1, \ldots, \dot{t}_n)$ なら，ある名称 $\dot{t}$，で $p \Vdash \varphi(\dot{t}, \dot{t}_1, \ldots, \dot{t}_n)$ となるものが存在する．

これは，いくつかの議論で，決定的な役割を果たすが，これが成り立つためには，基礎モデルが選択公理を満たす必要がある．generic-集合の標準的名称 $\dot{G}$ と基礎モデルの標準的名称 $\check{V}$ は任意の $p, q \in P$ と名称 $\dot{t}$ に対し，原子論理式に対する強制関係の帰納的定義により，次のような性質を満たす：

$$p \Vdash \check{q} \in \dot{G} \quad \Leftrightarrow \quad \forall r \le p \exists s \le r (s \le q)\,.$$
$$p \Vdash \dot{t} \in \check{V} \quad \Leftrightarrow \quad \forall r \le p \exists s \le r \exists x (s \Vdash \check{x} = \dot{t})\,.$$

強制法による無矛盾性の結果は，通常は形式的に，問題となっている命題 φ に対し，p.o. P で $\Vdash_P \varphi$ となるものが存在する，という形に表す．$\Vdash_P \sigma$ がすべての ZFC の公理 σ に対し成り立ち，$\Vdash_P$ は推論に関し閉じているから，この簡素な表現が対応する有限的な相対的無矛盾性の結果にいちばん近い形のものとなる．しかしながら，通常の実践でと同じく，証明は，多くの場合，推移的な $\in$-モデルの議論で予告されたように，意味論的に行い，形式的な記述に対応して，V を基礎モデルと見なし，その generic-拡大 $V[G]$ を “とる” と考える．このことを頭において，

P-generic とは V 上 P-generic のことである

とする．もちろんこれは，カントル=ゲーデルの $V = \{x \mid x = x\}$ をすべての集合のユニヴァースと見る見方と抵触する．実際，これの拡張 $V[G]$ をとるというのはおかしな話である．しかしながら，この意味論的アプローチが，強制関係のちゃんとした形式化のできる議論に対応する方便にすぎないことは，よく知られており，これが強制法へのいきいきとした直観の水門を開くということもあるが，それ以上に，このアプローチが議論を理解しやすく記述する唯一の方法であることが多い．

この理論の重要な特色の一つは，異なる generic-拡大は対応する p.o. の間の埋め込みで対応付けられることである：P, Q を p.o. として，

$$
\begin{aligned}
&i\colon P \to Q \text{ は完備な埋め込み} \quad \Leftrightarrow \\
&\qquad \text{(i) } \forall p, q \in P(p \le q \ \to \ i(p) \le i(q)) \text{ , かつ} \\
&\qquad \text{(ii) } A \text{ が } P \text{ での極大な反鎖なら} \\
&\qquad\quad i``A \text{ は } Q \text{ での極大な反鎖となる.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&i\colon P \to Q \text{ は稠密な埋め込み} \quad \Leftrightarrow \quad i \text{ は完備な埋め込みで} \\
&\qquad \text{(iii) } i``P \text{ は } Q \text{ で稠密.}
\end{aligned}
$$

(iii) のもとでは，(ii) は，

$$\forall p, q \in P(p \perp q \ \to \ i(p) \perp i(q))$$

と弱められる．i が単射であることは要求されていないことに注意したい．

$$P \cong Q$$

で，p.o. の同型写像：$P \to Q$ が存在することを表す．Kunen [80: 218ff] では，"完備" の同値な定義が与えられ，次の命題が証明されている．これを記述するために，

$$\bar{i}(X) = \{q \in Q \mid \exists p \in X(i(p) \le q)\}$$

とおく．

10.1 命題　$i\colon P \to Q$ を完備な埋め込みとする．

(a) H が Q-generic なら $i^{-1}(H)$ は P-generic となる．したがって，$V[i^{-1}(H)] \subseteq V[H]$ が成り立つ．i が稠密なら，$\bar{i}(i^{-1}(H)) = H$ となり，したがって，$V[i^{-1}(H)] = V[H]$ が成り立つ．

(b) i が稠密で，G を P-generic とするとき，$\bar{i}(G)$ は Q-generic となり，$i^{-1}(\bar{i}(G)) = G$ である．したがって，$V[\bar{i}(G)] = V[G]$ が成り立つ．　$\dashv$

証明は自然なやり方ででき，二番目の主張は $i \in V$ から導ける．この結果により，P が Q の稠密な部分集合と同型になるときには，多くの場合，これらによる generic-拡大は同一視されるが，基本的な構成である分離的な商構造への移行（Jech [78: 152ff] を参照）での条件はこれより弱いものになっている：p.o. P に対し，

$$P \text{ は分離的} \quad \Leftrightarrow \quad \forall p, q \in P(p \not\le q \ \to \ \exists r \le p(r \perp q)) \text{ .}$$

とする．大概の場合には，実際に用いられる p.o. はすでに分離的である．この概念の意義は，ある種の秩序を保証することにある：分離的な p.o. は対応する完備ブール代数の稠密な部分集合と同型になる．また，これは次の簡単だが非常に便利な観察によって特徴付けられる：

10.2 補題　p.o. P が分離的となるのは，$\forall p, q \in P(p \le q \ \leftrightarrow \ p \Vdash \check{q} \in \dot{G})$ となる，ちょうどそのときである．　$\dashv$

p.o. P と $p, q \in P$ に対し，

$$p \approx q \quad \Leftrightarrow \quad \forall r \in P(r \parallel p \ \leftrightarrow \ r \parallel q)$$

として，

$$[p] = \{q \mid q \approx p\}$$

とおく．このとき $\approx$ は P 上の同値関係となり，$[p]$ は p の同値類となる．P の**分離的商構造**とは

$$P/{\approx} \; = \; \{[p] \mid p \in P\}$$

に

$$[p] \leq [q] \quad \Leftrightarrow \quad \forall r \in P(r \leq p \;\rightarrow\; r \parallel q)$$

で順序を入れたものである．容易に示せる次の命題により，可能なすべての generic-拡大を得るためには，分離的な p.o. だけで十分であることが分かる．

10.3 補題 p を $[p]$ に対応させる写像は P の $P/{\approx}$ への稠密な埋め込みとなる． $\dashv$

連鎖条件，閉鎖条件，密度条件（分配則）を満たす p.o. の generic 拡大におよぼす有益な効果に関する知識については仮定するが，細かい相違による混乱を避けるために定義を与えておく：p.o. P に対し，

P は **κ-連鎖条件** (κ-c.c.) を満たす $\Leftrightarrow$
任意の P での反鎖 A に対し，$|A| < \kappa$ が成り立つ．

P は **κ-閉鎖** $\Leftrightarrow$ $\gamma < \kappa$ で $\{p_\alpha \mid \alpha < \gamma\} \subseteq P$ が
$\alpha < \beta < \gamma$ なら $p_\beta \leq p_\alpha$ を満たすとき，
$p \in P$ で $p \leq p_\alpha$ がすべての $\alpha < \gamma$ に対し成り立つものが
存在する．

P は **κ-ベール** $\Leftrightarrow$ $\gamma < \kappa$ で 各 $\alpha < \gamma$ に対し D_α が開稠密なら
$\bigcap_{\alpha<\gamma} D_\alpha$ も開稠密となる．

これらはすべて $< \kappa$ で定義された概念となっている．κ^+-ベールは，ブール代数の分配則との関連から，κ-分配性とも呼ばれる．κ-連鎖条件は多くの場合，組合せ論で δ-レンマとして知られている以下の事実から導くことができる（Kunen [80: 49ff] を参照）が，読者はこれにある程度習熟していることを仮定する．

10.4 命題 （$\lambda = \omega$ の場合は Šanin [46] による） $\lambda < \kappa$ で κ は正則基数とし，$\alpha < \kappa$ なら $\alpha^{<\lambda} < \kappa$ が成り立つとする．$|A| = \kappa$ で，$x \in A$ なら $|x| < \lambda$ となるとき，$|B| = \kappa$ となる $B \subseteq A$ で，Δ-システムとなるものが存在する．つまり，

ある r で，任意の異なる $x, y \in B$ に対し $x \cap y = r$ が成り立つようなものが存在する．

特に，有限集合からなる非可算集合に対し，非可算な部分集合で Δ-システムとなるものが存在する． $\dashv$

連鎖条件が基数の巾の上限を定めることはよく知られている：

10.5 命題 P は κ-連鎖条件を満たすとする．与えられた λ に対し $\theta = (|P|^{<\kappa})^\lambda$ とおく．

このとき,

$$\Vdash_P \ulcorner 2^\lambda \leq \theta \urcorner$$

が成り立つ. ⊣

ここでの復習の最後に，ソロヴェイによって作られた**強制法の反復**の理論に関して仮定することをまとめておく．まず，**強制法の積**からはじめる：P と Q を p.o. として，p.o. の積 $P \times Q$ を

$$\langle p_0, q_0 \rangle \leq \langle p_1, q_1 \rangle \quad \Leftrightarrow \quad p_0 \leq_P p_1 \wedge q_0 \leq_Q q_1$$

によって順序を入れたものとして定義する．$P \times Q$ による強制は反復として特徴付けることができる（Kunen [80: 252ff] または Jech [78: 187ff] を参照）：

10.6 命題 (Solovay [70]). G が $P \times Q$-generic となるのは，ある P-generic な G_0 と $V[G_0]$ 上 Q-generic な G_1 により $G = G_0 \times G_1$ と表せる，ちょうどそのときである．したがって，$V[G] = V[G_0][G_1]$ となる． ⊣

もっと一般的には，たくさんの p.o. の積をとることもできる．すべての $\alpha < \delta$ に対し，P_α を p.o. とする．このとき，$p \in \prod_{\alpha<\delta} P_\alpha$ に対し，

$$\mathrm{supt}(p) = \{\alpha < \delta \mid p(\alpha) \neq 1\!\!1_{P_\alpha}\}$$

で p のサポートを定義する．ここで $\langle P_\alpha \mid \alpha < \delta \rangle$ の κ-積を,

$$\{p \in \textstyle\prod_{\alpha<\delta} P_\alpha \mid |\mathrm{supt}(p)| < \kappa\}$$

と定義し，

$$p \leq q \quad \Leftrightarrow \quad \forall \alpha < \delta (p(\alpha) \leq_{P_\alpha} q(\alpha))$$

で順序を入れる．例えば，“λ 個のコーエン実数を付加する” とは コーエン実数を付加する p.o. の λ 個のコピーの $\aleph_0$-積のことである．$\langle P_\alpha \mid \alpha < \delta \rangle$ のイーストン積とは，

$$\{p \in \textstyle\prod_{\alpha<\delta} P_\alpha \mid \forall \lambda (\lambda \text{ は正則基数} \to |\mathrm{supt}(p) \cap \lambda| < \lambda)\}$$

に前と同じような座標ごとの比較で順序を入れたものである．この積はイーストンによって導入されたもので，実際には，イーストンは真のクラスとなるような積を扱っている：

10.7 定理 (Easton [64, 70]). GCH が成り立つとして，F を正則基数のクラスから基数のクラスへのクラス関数で，任意の正則基数 $\kappa \leq \lambda$ に対し，$F(\kappa) \leq F(\lambda)$ かつ $\kappa < \mathrm{cf}(F(\kappa))$ が成り立つものとする．このとき，基数と共終数を保存する generic-拡大で，$2^\kappa = F(\kappa)$ がすべての正則基数 κ に対し成り立つようなものが存在する． ⊣

ここで用いられる強制法は，α が正則基数なら P_α は α の部分集合を $F(\alpha)$ 個付加するのに普通に用いられるもの，それ以外のときには P_α は自明な p.o. としたときの $\langle P_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On} \rangle$ のイーストン積である．次の補題はこのような積を用いるときに基本的な役割を果たす：

10.8 補題 P と Q を p.o. として，ある λ に対し P は λ^+-連鎖条件を満たし，Q は λ^+-閉鎖とする．G を V 上 $P \times Q$-generic として，$G = G_0 \times G_1$ を 10.6 でのようにとる．このとき任意の $V[G]$ の元 $f \colon \lambda \to V$ は $V[G_0]$ の元となる．特に，$\mathcal{P}(\lambda) \cap V[G] = \mathcal{P}(\lambda) \cap V[G_0]$ である． ⊣

もちろん，ここで真のクラスとなる条件で強制することが可能であることも確かめておく必要がある．これに関するより子細な議論と強制法の積については，Jech [78: §20] を参照されたい．

10.7 によって，κ が正則基数である場合の $F(\kappa) = 2^\kappa$ の可能な値を決定する問題は完全に解決されたことになる；ここで F に対する制限となるのは，F が減少的でないことと，よく知られたケゥーニッヒの結果と矛盾しないこと：$\kappa < \mathrm{cf}(F(\kappa))$ のみである．**特異基数問題**は特異基数 κ に対し 2^κ の可能な値を決定する，というものであるが，これはもっとずっと難しい問題で，解決からはまだほど遠いところにある．注目すべきことに，巨大基数はこの基本的な問題と深く関わっており，さらに驚くべきことに，この問題に関して巨大基数の介入は，実は本質的に避けられないものであることがわかっている（第 II 巻を参照）．

今度は P で強制して $V[G_0]$ を得た後，V の元とは限らないような p.o. $\dot{Q}^{G_0}$ で $V[G_0][G_1]$ を得る，ということを考えてみる．このときには，$\Vdash_P$ 「$\dot{Q}$ は p.o.」 となっているとしてよいから，

$$P * \dot{Q} = \{\langle p, \dot{q}\rangle \mid p \in P \ \wedge \ \Vdash_P \dot{q} \in \dot{Q}\} \quad \text{に}$$

$$\langle p_0, \dot{q}_0\rangle \ \leq \ \langle p_1, \dot{q}_1\rangle \quad \Leftrightarrow \quad p_0 \leq_P p_1 \ \wedge \ p_0 \Vdash_P \dot{q}_0 \leq_{\dot{Q}} \dot{q}_1$$

で順序を入れたものを考えることができる．このままでは，$\dot{q}$ の可能な範囲が限定できず，$\leq$ は反対称的とは限らないため，$P * \dot{Q}$ は 真のクラスになってしまう可能性があるが，この問題は前に注意したように，$\langle p_0, \dot{q}_0\rangle$ と $\langle p_1, \dot{q}_1\rangle$ は $\langle p_0, \dot{q}_0\rangle \leq \langle p_1, \dot{q}_1\rangle \leq \langle p_0, \dot{q}_0\rangle$ となるとき，つまり $p_0 = p_1 \ \wedge \ p_0 \Vdash_P \dot{q}_0 = \dot{q}_1$ となるときには同一視することで回避することができる．名称が妥当なやり方で導入してあれば，自然な代表元が選べて，この集まりを使って $P * \dot{Q}$ を考えることができる (Kunen [80: 269])．以下では，そのような縮小をおこなったと考えて，

$$P * \dot{Q} \text{ は集合となっていると仮定する．}$$

しかし，ぎこちない書きかたを避けるため，単に $\langle p, \dot{q}\rangle$ と書いてこれの同値類を表すことにする．自然な対応により，すべての P-名称は $P * \dot{Q}$-名称と考えることができる．さらに，p.o. の同型写像 $R \cong P * \dot{Q}$ があるときには，このような対応する名称は記法を簡単にするために，集合としては異なっても同一視することにする．$P * \dot{Q}$ による強制は，P により強制して，その後で $\dot{Q}$ で強制したものとして特徴付けられる（Kunen [80: 268ff] または Jech [78: 233ff] を参照）：

10.9 命題 (Solovay-Tennenbaum [71]).

(a) G_0 を P-generic として，G_1 を $V[G_0]$ 上 $\dot{Q}^{G_0}$-generic とする．

$$G_0 * G_1 = \{\langle p, \dot{q}\rangle \in P * \dot{Q} \mid p \in G_0 \ \wedge \ \dot{q}^{G_0} \in G_1\}$$

とおく．このとき，$G_0 * G_1$ は $P * \dot{Q}$-generic となり，$V[G_0 * G_1] = V[G_0][G_1]$ が成り立つ．

(b) 逆に，G を $P * \dot{Q}$-generic として，

$$G_0 = \{p \in P \mid \exists \dot{q}(\langle p, \dot{q}\rangle \in G)\}\ ,$$
$$G_1 = \{\dot{q}^{G_0} \mid \exists p(\langle p, \dot{q}\rangle \in G)\}$$

とおく．このとき，G_0 は P-generic となり，G_1 は $V[G_0]$ 上 $\dot{Q}^{G_0}$-generic となる．さらに，$G = G_0 * G_1$ となる．　⊣

$\dot{Q}$ がある $Q \in V$ に対しての $\check{Q}$ となっているときには，$P \times Q$ は $P * \dot{Q}$ の稠密な部分集合と同型になることが示せるので，10.6 は本質的には，この結果の特殊な場合となっている．

10.9(b) を用いて記述される次の構造定理は，基礎モデルと generic-拡大の間のすべての ZFC のモデルはそれ自身ふたたび generic-拡大となっていることを示している．この強制法の一般性を示す結果の自然な証明はブール値モデルを使ってなされるが（Jech [78: 264ff] を参照），半順序を用いて直接証明することも可能である．

10.10 命題　R を p.o. として，G を V 上 R-generic とし，N を推移的な ZFC の $\in$-モデルで $V \subseteq N \subseteq V[G]$ となっているものとする．このとき p.o. P と P-名称 $\dot{Q}$ で，$\Vdash_P$「$\dot{Q}$ は p.o.」で，$P * \dot{Q}$ は R と同型となり，これによって，R と $P * \dot{Q}$ を同一視したとき，10.9(b) でのように G_0 をとると，$V[G_0] = N$ となるようなものが存在する．　⊣

ZFC の $\in$-モデルは，その順序数の集合の全体で決定されるから（Jech [78: 127] を参照），上の命題の N は，ある $x \subseteq \mathrm{On}$ により，$N = V[x]$ とできることが分かる．Serge Grigorieff [75] はこのような状況を ZF のモデルにおいて調べている．

10.9 は歴史的には，マルティンの公理と $\neg$CH の無矛盾性を実質的に確立した議論の中で最初に使われている．このよく知られた公理を簡単に復習しておく：

P を p.o. として，$\mathcal{D}$ を P の稠密な部分集合とする．$G \subseteq P$ として，

G は $\mathcal{D}$-*generic*　$\Leftrightarrow$　(i) $\forall p, q \in G \exists r \in G(r \leq p \wedge r \leq q)$,
　(ii) $\forall p \in G \forall q \in P(p \leq q \rightarrow q \in G)$, かつ
　(iii) $\forall D \in \mathcal{D}(G \cap D \neq \emptyset)$

とする．任意の κ に対するマルティンの公理 (MA(κ)) とは，

> P が ω_1-連鎖条件を満たす p.o. で，$\mathcal{D}$ は高々 κ 個の P の稠密な部分集合からなる族であるとき，$\mathcal{D}$-generic な $G \subseteq P$ が存在する．

単に**マルティンの公理** (MA) と言ったときには，

$$\forall \kappa < 2^{\aleph_0}(\mathrm{MA}(\kappa))$$

のこととする．明らかに，この公理の動機となっているのは，generic である，という性質を小さな $\mathcal{D} \in V$ に制限したときには，内的な対象で generic なものが存在する，ということの正当化である．よく知られているように，MA(ω) は ZFC の定理で，一方 MA($2^{\aleph_0}$) も MA から ω_1-連鎖条件を除いたものも矛盾である．

10.11 定理 (Solovay-Tennenbaum [71]). κ を $\kappa^{<\kappa} = \kappa > \omega$ を満たす基数とする．このとき，ω_1-連鎖条件を満たす濃度 κ の p.o. P で，$\Vdash_P \mathrm{MA} \wedge 2^{\aleph_0} = \kappa$ となるものが存在する． ⊣

特に，GCH のモデルから出発すると，任意の非可算正則基数を $2^{\aleph_0}$ とするようにして MA を成り立たせることができる．MA に関する子細な議論は Jech [78: §23] あるいは Kunen [80: II§2] を参照されたい．後者では，MA は強制法が議論される前に公理的に導入されている．Fremlin [84] は MA からの帰結に関することがたくさんつまったポルトマント鞄のような本である．

弱い拡張

まず小手調べに，強制法と巨大基数に関して，すぐに分かる事実について考察する．これは，初めの頃は気がつかれずにいたことであったが，ゲーデルの早い時期の連続体問題に関する考察 (§3) に直接関わるものとなっている．強制法により，巨大基数は連続体の巾の大きさを決定しないということを示すことができるのである．コーエン自身が Cohen [64: 110] で注意しているように，彼の CH の独立性を示すための議論は到達不可能基数を保存し，マーロ基数も保存する（“... ことが証明可能であるように思える”）．さらにレヴィとソロヴェイは，可測基数も保存されることを証明した．実際，彼等の用いた議論は，おしなべて巨大基数 κ は任意の**弱い拡張**つまり，濃度が κ 未満の p.o. による強制で保存されるということを示すものとなっている．次の一連の便利な結果は，これをいくつかの場合に分けて示している：

10.12 命題 κ を到達不可能基数として，P を $|P| < \kappa$ となる p.o. とする．このとき

$$\Vdash_P \kappa \text{ は到達不可能基数}$$

となる．

証明 これは，$|P|^+$-連鎖条件から導かれる：$\Vdash$「κ は正則基数」だが，10.5 により，$\Vdash$「κ は強極限」となるからである． ⊣

10.13 命題 κ をマーロ基数として，P を $|P| < \kappa$ となる p.o. とする．このとき，

$$\Vdash_P \kappa \text{ はマーロ基数}$$

となる．

この証明はもっと一般的な次の便利な考察から導かれる：

10.14 補題 $\kappa > \omega$ を正則基数とし，P を κ-連鎖条件を満たす p.o. とする．$p \in P$ で，

$p \Vdash$「$\dot{C}$ はκ で閉非有界」とする．このとき，κ で閉非有界な C_0 で，$p \Vdash \check{C}_0 \subseteq \dot{C}$ となるものが存在する．

証明　$\alpha < \kappa$ に対し，

$$X_\alpha = \{\xi < \kappa \mid \exists q \leq p(q \Vdash \xi \text{ は } \dot{C} - (\alpha+1) \text{ の最小元})\}$$

とする．κ-連鎖条件により，$|X_\alpha| < \kappa$ であるから，$f(\alpha) = \sup(X_\alpha) < \kappa$ とおく．ここで，

$$C_0 = \{\beta < \kappa \mid \forall \alpha < \beta(f(\alpha) < \beta)\}$$

とすれば，C_0 は閉非有界な集合となる．

$p \Vdash \check{C}_0 \subseteq \dot{C}$ を示すために，そうではないと仮定して，$q \leq p$ と $\beta \in C_0$ で，$q \Vdash \beta \notin \dot{C}$ となるものがあるとしてみる．このときには，$r \leq q$ と $\alpha < \beta$ で，$r \Vdash \alpha = \sup(\dot{C} \cap \beta)$ となるものがとれる．さらにある $s \leq r$ と $\xi \in X_\alpha$ に対し，$s \Vdash$「ξ は $\dot{C} - (\alpha+1)$ の最小元」とできるが，$\beta \in C_0$ だから，$\xi < \beta$ となる．これは α の選びかたに矛盾である．　⊣

10.13 の証明　$p \Vdash$「$\dot{C}$ は κ の閉非有界部分集合」と仮定する．10.12 により，λ が到達不可能で，$|P| < \lambda$ なら，$\Vdash$「λ は到達不可能」となる．κ はマーロ基数だから，10.14 により $p \Vdash \lambda \in \dot{C}$ を満たす到達不可能基数 $\lambda < \kappa$ が存在する．　⊣

10.15 命題　(Levy [64], Solovay [65a], Levy-Solovay [67])．κ を可測基数として P を $|P| < \kappa$ となる p.o. とする．このとき，

$$\Vdash_P \kappa \text{ は可測基数}$$

となる．

証明　U を κ 上の κ-完備超フィルターとし，

$$\Vdash \dot{U} = \{Y \subseteq \kappa \mid \exists X \in \check{U}(X \subseteq Y)\}$$

を $\check{U}$ から生成されたフィルターとする．ここで $\Vdash$「$\dot{U}$ は κ 上の κ-完備な超フィルター」となることを示す．次の主張は，より一般的な性質を述べるものとなっている：

(∗)　$p \Vdash \dot{\tau}\colon \kappa \to \check{V}$ なら，$q \leq p$, $Z \in U$, $f\colon Z \to V$ で，$q \Vdash \dot{\tau}|\check{Z} = \check{f}$ となるものが存在する．

これを示すために，各 $\leq p$ に対し $X_r = \{\xi \in \kappa \mid \exists x(r \Vdash \dot{\tau}(\xi) = \check{x})\}$ とする．このとき $\bigcup_{r \leq p} X_r = \kappa$ となるが，$|P| < \kappa$ であるから，κ-完備性から，$q \leq p$ で，$X_q \in U$ となるものがある．ここで $f\colon X_q \to V$ を，$f(\xi) =$「$q \Vdash \dot{\tau}(\xi) = \check{x}$ となるような x」とする（$\dot{\tau}$ は関数に強制されるから，このような x は一意に決まる）．したがって，$q \Vdash \dot{\tau}|\check{X}_q = \check{f}$ となる．

証明を完成させるために，まず，$\Vdash$「$\dot{U}$ は非単項」となっていることに注意する．したがって，$\Vdash$「$\dot{U}$ は超フィルターで κ-完備」を示せばよい．これには，$\gamma < \kappa$ で，$\Vdash \dot{\tau}\colon \kappa \to \gamma$ となっているときに，$\Vdash \dot{\tau}^{-1}(\{\alpha\}) \in \dot{U}$ となる α が存在することを示せばよいことは，簡

単に分かる（2.7 を参照）：

上の主張から，$Z \in U$ と $f\colon Z \to \gamma$ で，$\Vdash \dot{\tau}|\check{Z} = \check{f}$ となるものがあるが，U は κ-完備だから，$\alpha < \gamma$ で，$A = f^{-1}(\{\alpha\}) \in U$ となるものがある．したがって，$\Vdash \check{A} \cap \check{Z} \subseteq \dot{\tau}^{-1}(\{\alpha\}) \in \dot{U}$ となる． ⊣

上の主張 (∗) からは，U が正規なら，$\Vdash$「$\dot{U}$ は正規」となることも帰結できる．

10.16 演習 (Levy-Solovay [67])．10.15 は，“可測基数” を “ラムズィー基数” または，“弱コンパクト” で置き換えても成り立つ．

ヒント ラムズィーについては，$p \Vdash \dot{\tau}\colon [\kappa]^{<\omega} \to 2$ なら，$g\colon [\kappa]^{<\omega} \to \mathcal{P}(P \times 2)$ を $g(s) = \{\langle q, i\rangle \mid q \leq p \ \wedge \ q \Vdash \dot{\tau}(\check{s}) = i\}$ で定義する．ここで H が g に関し一様なら，$p \Vdash$「$\check{H}$ は $\dot{\tau}$ に対し一様」となることを示せばよい． ⊣

同様の議論は，他の様々な巨大基数に対しても可能である．p.o. が大きいときの巨大基数の保存という問題は，強制法の理論の発展，および，巨大基数の理論の発展を促すことになる．

レヴィ崩壊

コーエンの革命的結果に続く強制法による最初のいくつか結果が発表されたのは，それのわずか 4 週間後であったが，注目すべきことに，このうちの一つは到達不可能基数が用いられているものであった．定義可能性の問題に絡んで，レヴィは Levy [63, 70] で到達不可能基数を慎重に崩壊する方法を開発したが，これは現在では集合論の基礎に属すものとなっており，巨大基数と ω_1 や ω_2 の組合せ論的な性質を結びつける無矛盾等価性の結果を得るためには，この方法で十分なことが多いことが経験的に知られている．分かりやすさのためと，後での便宜のために，まず一般的な枠組を与えておく：

$S \subseteq \mathrm{On}$ と正則基数 λ に対し，

$$\begin{aligned}\mathrm{Col}(\lambda, S) = \{p \mid p \text{ は関数 } \wedge \ |p| < \lambda \ \wedge \ \mathrm{dom}(p) \subseteq S \times \lambda \\ \wedge \ \forall\langle\alpha,\xi\rangle \in \mathrm{dom}(p)\,(p(\alpha,\xi) = 0 \vee p(\alpha,\xi) \in \alpha)\}\end{aligned}$$

とし，これに $p \leq q \ \Leftrightarrow \ p \supseteq q$ で順序を入れる．したがって，$\mathrm{Col}(\lambda, S)$ は，すべての $\alpha \in S$ に対し，上射：$\lambda \to \alpha$ を generic に付加するものとなっている．$\mathrm{Col}(\omega, \{\omega\})$ は本質的にはコーエンによる ω の部分集合，つまりコーエン実数を 1 つ付加するもとの p.o. と一致する；$\mathrm{Col}(\lambda, \{\lambda\})$ は，これの一般化で λ のコーエン部分集合を 1 つ付け加えるものとなり，$\kappa > \lambda$ に対する $\mathrm{Col}(\lambda, \{\kappa\})$ は $|\kappa|$ を λ に崩壊する標準的な p.o. である．次の補題でいくつかの基本的な性質を列挙する：

10.17 補題

(a) $\mathrm{Col}(\lambda, S)$ は λ-閉鎖である．

(b) $S = X \cup Y$ を互いに素な和集合として，$P_0 = \mathrm{Col}(\lambda, X)$, $P_1 = \mathrm{Col}(\lambda, Y)$ とする．このとき，G が $\mathrm{Col}(\lambda, S)$-generic となるのは，P_0-generic な G_0 と $\mathrm{Col}(\lambda, Y)^{V[G_0]} = P_1$

に対し，G_1 を $V[G_0]$ 上 P_1-generic として，$G = \{p \cup q \parallel p \in G_0, q \in G_1\}$ と表せる，ちょうどそのときである．

(c) κ を正則基数として，$\kappa > \lambda$ で，κ は到達不可能であるか，または $\lambda = \omega$ であるとする．このとき，$\mathrm{Col}(\lambda, \kappa)$ は κ-連鎖条件を満たす．

(d) $\mathrm{Col}(\lambda, \kappa)$ が κ-連鎖条件を満たせば，これによる強制は λ 未満のすべての基数，ならびに κ より大きいか等しいすべての基数を保存する．

(e) κ を正則基数として，$\mathrm{Col}(\lambda, \kappa)$ は κ-連鎖条件を満たすとする．G を $\mathrm{Col}(\lambda, \kappa)$-generic とするとき，ある $\gamma < \kappa$ に対し $x\colon \gamma \to \mathrm{On}$ となる任意の，$x \in V[G]$ に対し，$\delta < \kappa$ で，$x \in V[G \cap \mathrm{Col}(\lambda, \delta)]$ となるものが存在する．

証明　(a) これは明らかである．

(b) $p \in \mathrm{Col}(\lambda, S)$ を $\langle p|(X \times \lambda), p|(Y \times \lambda)\rangle$ に対応させる写像は $\mathrm{Col}(\lambda, S)$ と p.o. の積 $P_0 \times P_1$ との同型写像となるから，この命題は 10.6 から導ける．$\mathrm{Col}(\lambda, Y)^{V[G_0]} = P_1$ となることは，P_0 による強制は長さが λ 未満の新しい順序数の列を付け加えないことが (a) から言えるからよい．

(c) これは，Δ-レンマの典型的な応用により導くことができる：$\{p_\beta \mid \beta < \kappa\} \subseteq \mathrm{Col}(\lambda, \kappa)$ が与えられたとして，Δ-レンマと仮定から，$X \in [\kappa]^\kappa$ と，$r \subseteq \kappa \times \lambda$ で，$\beta \neq \gamma$ が両方とも X の元なら，つねに $\mathrm{dom}(p_\beta) \cap \mathrm{dom}(p_\gamma) = r$ となるようなものがとれる．さらに，$\mathrm{Col}(\lambda, \kappa)$ の定義と $|r| < \kappa$ から，$Y \in [X]^\kappa$ で，$\beta \neq \gamma$ が両方とも Y の元なら，$p_\beta \,|\, r = p_\gamma \,|\, r$ となるようなものがとれる．このとき，このような β と γ に対し，p_β と p_γ は共存可能となる．

(d) には (a) を用いればよい．

(e) $\dot{x}$ を $\dot{x}^G = x$ となるようにとり，各 $\alpha < \gamma$ に対し，$A_\alpha \subseteq \mathrm{Col}(\lambda, \kappa)$ を $p \in A_\alpha$ なら ξ で $p \Vdash \dot{x}(\alpha) = \xi$ となるものがあるような極大な反鎖とする．κ-連鎖条件により，各 $\alpha < \gamma$ に対し，$|A_\alpha| < \kappa$ となる．したがって，$|\bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha| < \kappa$ である．κ は正則基数だから，$\delta < \kappa$ で，$p \in \bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha$ なら，$\mathrm{dom}(p) \subseteq \delta \times \lambda$ となるようなものがある．ここで，x は $G \cap \mathrm{Col}(\lambda, \delta)$ から，$x(\alpha) = \xi \ \Leftrightarrow\ p \in G \cap A_\alpha$ が一意に決まって $p \Vdash \dot{x}(\alpha) = \xi$ となる，とすることで定義できる．　⊣

$\kappa > \lambda$ に対し，

$\mathrm{Col}(\lambda, \kappa)$ を**レヴィ崩壊**と呼ぶ．

さらに，これが κ-連鎖条件を満たすときには，10.17(d) により，

$\mathrm{Col}(\lambda, \kappa)$ は κ を λ^+ に崩壊する

ということにする．実際には，$\mathrm{Col}(\lambda, \kappa)$ は 基数としての κ を崩壊するわけではなくて，λ と κ の真に間にあるすべての基数を崩壊して κ を λ の直後の基数にするわけであるから，これは単に用語としてこういうことにする，ということにすぎない．レヴィのもとの p.o. は κ が到達不可能である場合の $\mathrm{Col}(\lambda, \kappa)$ であり，10.17(c) は普通には到達不可能基数の場合に用いられる．

ここで少しわき道にそれて，8.16 のローボトム基数とジョンソン基数の無矛盾等価性の

証明をしておく．ローボトム基数はジョンソン基数だから，無矛盾等価の含意の片方は明らかとなるから，次の命題で証明を完了できる．この結果は，弱い拡張の議論に次の 2 点のひねりを加えて証明される：10.17(c) が $\lambda = \omega$ の場合で用いられ，（強）到達不可能は巨大基数の性質として保存されない．

10.18 命題 (Kleinberg [72, 79]). κ を最小のジョンソン基数とするとき，p.o. P で

$$\Vdash_P \kappa \text{ はローボトム基数}$$

となるようなものが存在する．

証明 8.15 により，正則基数 $\nu < \kappa$ で，

$$(*) \qquad \kappa \text{ は } \nu\text{-ローボトム基数で，すべての } \alpha < \nu \text{ に対し } \kappa \not\to [\kappa]^{<\omega}_{\alpha}$$

となるものがある．10.17(c) により，$P = \mathrm{Col}(\omega, \nu)$ は ν-連鎖条件を満たすから，任意の generic-拡大で $\nu = \omega_1$ となる．したがって，

$$\Vdash_P \kappa \text{ は } \nu\text{-ローボトム基数}$$

となることを示せばよい．このために，$p \in P, \gamma < \kappa$ で，$p \Vdash \dot{f}\colon [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ であるとする．各 $s \in [\kappa]^{<\omega}$ に対し，$A_s \subseteq P$ を，各 $r \in A_s$ に対し $\alpha_r < \gamma$ で，$r \Vdash \dot{f}(\check{s}) = \alpha_r$ となるようなものがあるような p の下の極大な反鎖とする．ν-連鎖条件により，$|A_s| < \nu$ となるから，$(*)$ により，$g_s\colon [\kappa]^{<\omega} \to A_s$ で，任意の $X \in [\kappa]^{\kappa}$ に対し，$g_s``X^{<\omega} = A_s$ となるようなものが存在する．ここで，$h\colon [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ を，$n = 2^i 3^j$ となる $i, j > 0$ がとれるときには，

$$h(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \ulcorner g_{\{\xi_1,\ldots,\xi_i\}}(\xi_{i+1}, \ldots, \xi_{i+j}) \Vdash \dot{f}(\xi_1, \ldots, \xi_i) = \alpha \text{ となるような } \alpha \urcorner$$

それ以外のときには $h(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ として定義する．$(*)$ により，$H \in [\kappa]^{\kappa}$ で，$E = h``[H]^{<\omega}$ して，$|E| < \nu$ となるようなものが存在する．証明を終えるには，$p \Vdash \dot{f}``[\check{H}]^{<\omega} \subseteq \check{E}$ を示せばよい．

このために $q \leq p$ で，ある $s \in [H]^{<\omega}$ と $\alpha < \gamma$ に対し，$q \Vdash \dot{f}(s) = \alpha$ となっているとする．A_s の定義から，$r \in A_s$ で q と共存可能になるものが存在する．$p \Vdash \ulcorner \dot{f}$ は関数$\urcorner$ だから，$\alpha = \alpha_r$ である．g_s の定義から，$t \in [H - (\max(s)+1)]^{<\omega}$ で，$g_s(t) = r$ となるものがある．そこで，$s = \{\xi_1, \ldots, \xi_i\}, t = \{\xi_{i+1}, \ldots, \xi_{i+j}\}$ として，$n = 2^i 3^j$ に対し，$\xi_{i+j+1} < \cdots < \xi_n$ を $H - (\max(t)+1)$ から任意に選ぶと，$h(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \alpha \in E$ となることが容易に分かり，これにより証明が完了する． ⊣

また主要な発展の文脈にもどることにする．レヴィの崩壊によるもとの結果については，§11 でソロヴェイの結果との関連で議論することにするが，この両方の結果の証明では，次のような $\mathrm{Col}(\lambda, S)$ の基本的な性質が使われている．

P は**弱一様** $\Leftrightarrow$ 任意の $p, q \in P$ に対し，
P の自己同型 e で，$e(p) \parallel q$ となるものが存在する

この性質は，AC の独立性証明で用いられたものであった．ここで "弱" と言っているのは，ブール代数 B が一様であるということが，$a, b \in B$ で a, b が共に 0 でないとき，$e(a) = b$ となる自己同型 e が存在する，として定義されていることに由来する．次の命題のうち最初のものは弱一様性の意義を示している．

10.19 命題

(a) P を弱一様な p.o. とするとき，任意の強制法の言語の論理式 $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ と，$x_1, \ldots, x_n \in V$ に対し，$\Vdash_P \varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$ か $\Vdash_P \neg\varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$ かのどちらかが成立する．

(b) $\mathrm{Col}(\lambda, S)$ は弱一様である．

証明　(a) 逆に，$p \Vdash \varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$ かつ，$q \Vdash \neg\varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$ がある $p, q \in P$ に対し成り立っているとしてみる．e を P の自己同型で，$e(p) \parallel q$ となるものとする．e は P-名称から P-名称への全単射で，すべての $x \in V$ に対し，$\check{x}$ は固定し，強制関係を保存するようなものを惹き起こす（Kunen [80: 222] を参照）．よって，$e(p) \Vdash \varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$ となるが，これは，$e(p) \parallel q$ に矛盾する．

$p, q \in \mathrm{Col}(\lambda, S)$ が与えられたとき，全単射 $f\colon \lambda \to \lambda$ で，$\langle \alpha, \xi \rangle \in \mathrm{dom}(p)$ と $\langle \beta, \zeta \rangle \in \mathrm{dom}(q)$ に対し，$f(\xi) \neq \zeta$ となるようなものが存在する．f は，$r \in \mathrm{Col}(\lambda, S)$ に対し，

$$\langle \alpha, f(\xi) \rangle \in \mathrm{dom}(e(r)) \quad \Leftrightarrow \quad \langle \alpha, \xi \rangle \in \mathrm{dom}(r) \ \wedge \ e(r)(\alpha, f(\xi)) = r(\alpha, \xi)$$

で特定される $e(r)$ を対応させる $\mathrm{Col}(\lambda, S)$ の自己同型を惹き起こすが，$\mathrm{dom}(e(p)) \cap \mathrm{dom}(q) = \emptyset$ であるから，$e(p) \parallel q$ となる．　$\dashv$

ソロヴェイは，ルベーグ可測性に関する彼の結果 (§11) の証明のために，$\mathrm{Col}(\omega, \{\alpha\})$ に固有な結果の証明をしている．これの証明には，$\mathrm{Col}(\omega, \{\alpha\})$ の特徴付けとして定式化できる次のような非常に興味深い命題が用いられている：

10.20 命題　P を分離的な p.o. で，$|P| \leq |\alpha|$ かつ，

$$\Vdash_P \exists f (f\colon \omega \to \alpha \text{ は上射 } \wedge \ f \notin \check{V})$$

となっているとする．このとき $\mathrm{Col}(\omega, \{\alpha\})$ の稠密な部分集合の P への単射的な稠密な埋め込みが存在する．

注意　この命題の仮定は，$f\colon \omega \to \alpha$ が上射であるという条件が自明でないものとなるのは α が非可算な場合で，$f \notin \check{V}$ が自明でないものとなるのは α が可算の場合である，という意味で，二分律的なものとなっている．$\alpha = \omega$ の場合には，この結果は任意の自明でない可算な p.o. はコーエンの p.o. $\mathrm{Col}(\omega, \{\omega\})$ に対応する，ということと直結している．この結果と 10.1 により，P による generic 拡大と $\mathrm{Col}(\omega, \{\alpha\})$ によるものとは一致するからである；P の分離的商構造をとりこれに 10.3 が適用できるから，ここでは P が分離的であるという条件は本質的なものでない．

証明　$\nu = |\alpha|$ とおく．まず命題の仮定が任意の $p \in P$ に対し，濃度 ν の p の下の極大な反鎖が存在し，特にこのことから $|P| = \nu$ となることに注意する：$\nu = \omega$ ならこれは

$\Vdash f \notin \check{V}$ から導くことができる．このときには任意の条件は共存不可能な 2 つの拡張を持たなくてはならなくなるからである．$\nu > \omega$ のときには，ν が ω に崩壊されることから，ν-連鎖条件が成り立たないことが帰結されるからよい．

求めている $\mathrm{Col}(\omega, \{\alpha\})$ の稠密な部分集合としては，

$$D_\alpha = \{p \mid \exists n \in \omega(p\colon \{\alpha\} \times n \to \alpha)\}$$

をとればよい．つまり，$\mathrm{Col}(\omega, \{\alpha\})$ の元で，定義域が有限であるだけでなく，ある $n \in \omega$ に対し，$\{\alpha\} \times n$ という形をしているようなものの全体をとる．極大性原理により，項 $\dot{g}$ を，$\Vdash$「$\dot{g}\colon \omega \to \dot{G}$ は上射」（ただし $\dot{G}$ は generic な対象の標準的名称）となるものする．ここで，$p \in D_\alpha$ での $|p|$ に関する帰納により，単射的な，稠密な埋め込み $e\colon D_\alpha \to P$ を次のように定義する：

$e(\emptyset) = 1\!\!1_P$ とする．$e(p)$ が，$p \in D_\alpha$ で，$\mathrm{dom}(p) = \{\alpha\} \times n$ となるものすべてに対しすでに定義されたとき，$\langle a^p_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$ を $e(p)$ の下の極大な反鎖で濃度が ν となっているものの枚挙とする．必要ならさらに細分化することで，各 ξ に対し $a^p_\xi \Vdash \dot{g}(n) = \check{r}$ がある $r \in P$ に対し成り立つとしてよい．ここで，各 $\xi < \alpha$ に対し，$e(p \cup \{\langle\langle \alpha, n\rangle, \xi\rangle\}) = a^p_\xi$ とする．

明らかにこれにより同型写像 $e\colon D_\alpha \to e``D_\alpha$ が得られる．$e``D_\alpha$ が P で稠密であることを示すために，任意の $r \in P$ をとる．P が分離的であることから，$r \Vdash \check{r} \in \dot{G}$ となる．よって，$s \leq r$ と $n \in \omega$ で，$s \Vdash \dot{g}(n) = \check{r}$ となるものがある．上の構成から，$p \in D_\alpha$ で，$|p| = n+1$, $e(p) \parallel s$ となるものがあるが，$e(p)$ もすでに $\dot{g}(n)$ を決定しているから，$e(p) \Vdash \dot{g}(n) = \check{r}$ とならなくてはならない．したがって，$e(p) \Vdash \check{r} \in \dot{G}$ となる．よって，P は分離的だから，10.2 により，$e(p) \leq r$ となる． ⊣

10.21 命題 (Solovay [70])．$\kappa > \omega$ を正則基数として G を $\mathrm{Col}(\omega, \kappa)$-generic とする．このとき $x\colon \omega \to \mathrm{On}$ となる任意の $x \in V[G]$ に対し，$V[x]$ 上 $\mathrm{Col}(\omega, \kappa)$-generic な H で，$V[G] = V[x][H]$ となるものが存在する．

証明 10.17(e) により，$\delta < \kappa$ で $x \in V[G \cap \mathrm{Col}(\omega, \delta)]$ となるものが存在する．

$$\begin{aligned} G_0 &= G \cap \mathrm{Col}(\omega, \delta)\ , \\ G_1 &= G \cap \mathrm{Col}(\omega, \{\delta\})\ , \\ G_2 &= G \cap \mathrm{Col}(\omega, \kappa - (\delta + 1)) \end{aligned}$$

とおく．10.17(b) により，G_0 は $\mathrm{Col}(\omega, \delta)$-generic となり，10.3 と 10.10 により，分離的な p.o. $P \in V[x]$ と $V[x]$ 上 P-generic な H_0 で，$V[x][H_0] = V[G_0]$ となるものがある．$V[x]$ で議論する：

$Q = P \times \mathrm{Col}(\omega, \{\delta\})$ とおく．10.6 により，$V[x][H_0][G_1]$ は $V[x]$ 上の Q による generic 拡大となっている．明らかに $|Q| \leq |\mathrm{Col}(\omega, \delta+1)| = |\delta|$ で，Q の 2 番目の成分により，$\Vdash_Q \exists f(f\colon \omega \to \delta$ は上射 $\wedge\ f \notin \check{V})$ となっている．したがって，10.20 により，$V[x]$ 上 $\mathrm{Col}(\omega, \{\delta\})$-generic な H_1 で，$V[x][H_1] = V[x][H_0][G_1]$ となるものが存在する．同様に 10.20 を $\mathrm{Col}(\omega, \delta+1)$ に適用すると，$V[x]$ 上 $\mathrm{Col}(\omega, \delta+1)$-geneirc な H_2 で，

$V[x][H_2] = V[x][H_1]$ となるものがとれる．

ここで 10.17(b) を何回か繰り返し適用すると，

$$V[G] = V[G_0][G_1][G_2] = V[x][H_0][G_1][G_2] = V[x][H_2][G_2]$$

となるが，$H_2 \cup G_2$ は $V[x]$ 上 $\mathrm{Col}(\omega, \kappa)$-generic である．　$\dashv$

このように順序数の可算列を基礎モデルに "吸収" できることが，次の節で重要な役割を果たすことになる．

§11　ルベーグ可測性

この節では次の結果を考察する：

11.1 定理　(Solovay [65b, 70])．κ を到達不可能基数として，G を $\mathrm{Col}(\omega, \kappa)$-generic とする．このとき，$V[G]$ は次の性質を満たす内部モデルを持つ：

(a) すべての実数の集合はルベーグ可測である．

(b) すべての実数の集合はベールの性質を持つ．

(c) すべての実数の集合は完全集合の性質を持つ．

(d) 従属選択公理 (DC) が成立する．

ソロヴェイはこの結果を 1964 年の春に確立しているが，これは，コーエンが強制法を作り出してからわずか一年後のことであった．実際，コーエンは (a) の可能性について 1963 年 7 月の講演で述べているが，この講演はソロヴェイも聞いている．上の結果は，早い時期に強制法による議論がすでに大変に洗練されたものになっているという点において注目に値するものとなっており，この結果によって，強制法を用いることでこのような実に驚くべき結果が得られる，という事実が強く印象づけられた．

コーエンの結果もそうであったが，11.1 は先世紀末，あるいはそれより以前から未解決であったいくつかの古典的な問題を解決した．ルベーグ可測性とベールの性質については §0 で復習した．§2 でも述べたように，ルベーグは彼の測度論をもって測度問題は解決されたと見なしていたが，ヴィタリは，選択公理の最初の応用の一つとして，実数の全体の集合上の整列順序を用いてルベーグ可測でない実数の集合の構成に成功している．さらに，ヴィタリの構成した集合はベールの性質も持たないものとなることも示せる（もう一つ別の反例については 11.4 の後で議論する）．ところが，11.1 の本質的な点は，(d) により，このモデルでは次のように定義される**従属選択公理**は成り立っている：

(DC)
$$\forall X \forall R(X \neq \emptyset \ \wedge \ R \subseteq X \times X \ \wedge \ \forall x \in X \exists y \in X(\langle x, y\rangle \in R \\ \rightarrow \exists f \in {}^{\omega}X \forall n \in \omega(\langle f(n), f(n+1)\rangle \in R)).$$

ベルナイズ Bernays [42: 86]（短命に終った雑誌に発表された Oswald Teichmüller [39: 568] がこの論文の先駆となるものだった）によって定式化されたこの選択の原理から，整順性の無限下降列の非存在による特徴付けが直ちに導かれるが，実際には，従属選択公理はこの特徴付けと同値になる．さらに，この原理から，次の可算選択公理がただちに導ける：

(AC$_\omega$)　　すべての空でない集合からなる可算な集合は選択関数を持つ．

そしてこの原理からは，ω_1 が正則基数であることが導ける（イェンセンは Jensen [66] で AC$_\omega$ から DC が導けないことを証明している）．DC は測度論を展開するのに十分な強さを持っているので，DC はソロヴェイのモデルで，数理解析が本格的に展開されることを可能にしている．非可測集合を構成するためには，AC の使用が本質的に必要となる，ということが示されたという意味において，11.1 により，ルベーグの提出した問題の肯定的な解が得られたことになる．

ルベーグ可測性とベールの性質は，多くの場合，互いによく似た振る舞いをするが，11.1(a) と (b) も類似の議論によって示されている．他方，次の演習問題により，零集合であることと痩集合であることは，集合が小さいという性質としては，まったく異なった示唆を与えるものとなっていることが分かる．この演習，および本節の全体では，§0 で導入した測度とカテゴリーに関する用語が用いられる．特に "実数" と言ったときには大概の場合は ${}^\omega\omega$ の元のこととする．m_L でルベーグ測度を表し，

$$\langle \mathbf{s}_i \mid i \in \omega \rangle \text{ は固定された } {}^{<\omega}\omega \text{ の枚挙とする．}$$

11.2 演習　(ZF). 実数の零集合 N で ${}^\omega\omega - N$ は痩集合となるものが存在する．

ヒント　まず各 $j < \omega$ に対し $D_j \subseteq {}^\omega\omega$ で，${}^\omega\omega - D_j$ は全疎になり，$m_L(D_j) < \frac{1}{j+1}$ が成り立つようなものを選んでおく．例えば，$s \in {}^{<\omega}\omega$ に対し，$s * n$ を s に n 個のゼロをつなげたものとして，$f_j \in {}^\omega\omega$ で十分に速く増加するものをとり，$D_j = \bigcup_{i\in\omega} O(s_i * f_j(i))$ として，$m_L(D_j) < \frac{1}{j+1}$ となるようにすればよい．このとき，$N = \bigcap_{j<\omega} D_j$ とすれば，これが求めるようなものとなる．　$\dashv$

完全集合の性質は，カントルによる彼の連続体仮説の証明の試みにまでさかのぼることができる．$x \in {}^\omega\omega$ と $A \subseteq {}^\omega\omega$, x に対し，x が A の**極限点**とは，任意の $O(s)$ で $x \in O(s)$ となるものに対し，$(A \cap O(s)) - \{x\} \neq \emptyset$ が成り立つことである．x が A の**孤立点**とは，$x \in A$ で x は A の極限点でないことである．つまり，$A \cap O(s) = \{x\}$ となる $O(s)$ が存在することである．$A \subseteq {}^\omega\omega$ に対し，

$$A \text{ は\textbf{完全集合}} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ は空でなく，孤立点を持たない閉集合である}$$

とする．カントルは $\mathbb{R}$ の位相的性質の研究においてこの概念を定式化している．この概念の連続体仮説との密接な関係は，次のような観察によってみることができる：

11.3 命題　(ZF).

(a) (Cantor [83: 575][84: 471], Bendixson [83]) 任意の非可算な実数の閉集合 C に対し，完全集合 $P \subseteq C$ で $C - P$ は高々可算であるようなものが存在する．

(b) (Cantor [84a]) 任意の実数の完全集合の濃度は $2^{\aleph_0}$ となる．

証明　(a) 任意の $A \subseteq {}^\omega\omega$ に対し，A' を A の極限点の全体からなる集合とする（これはカントルが Cantor [72] で A の**導集合**とよんだものである）．A' は常に閉集合となり，A が閉集合なら $A' \subseteq A$ となることは容易に確かめられる．非可算な実数の閉集合 C から出発

して，$\langle C_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ を $C_0 = C, C_{\alpha+1} = C'_\alpha$，また極限順序数 $\delta > 0$ では $C_\delta = \bigcap_{\alpha<\delta} C_\alpha$ として定義する．このとき $X = \bigcup_{\alpha<\omega_1}(C_\alpha - C_{\alpha+1})$ は高々可算である：$x \in X$ なら，x は C_α の孤立点となるような α が一意に決まるから，$\chi(x)$ を $O(\mathbf{s}_i) \cap C_\alpha = \{x\}$ となる最小の i とする．このとき，$\chi\colon X \to \omega$ が単射となることが容易に示せる．

X は高々可算だから，$\gamma < \omega_1$ で $C_{\gamma+1} = C_\gamma \neq \emptyset$ となるものが存在する．このとき $P = C_\gamma$ は完全集合となり，$C - P = X$ である．

(b) $P \subseteq {}^\omega\omega$ を完全集合とする．このとき，各 $t \in {}^{<\omega}2$ に対する $p_t \in P$ と自然数の真の上昇列 $\langle n_i \mid i \in \omega \rangle$ で，すべての $t, u \in {}^{<\omega}2$ に対し，

(i) $t \subseteq u$ なら，$p_t|n_{|t|} = p_u|n_{|t|}$ かつ，
(ii) $|t| = |u|$ だが $t \neq u$ なら，$p_t|n_{|t|} \neq p_u|n_{|t|}$

となるようなものが，$|t|$ に関する帰納法によって容易に構成できる．各 $x \in {}^\omega 2$ に対し，$p_x = \lim_n \{p_{x|n} \mid n \in \omega\}$ とする．ただし，ここで lim は，(i) による自然な意味での極限とする．P は閉集合だから，$p_x \in P$ となるが，(ii) により $x \neq y$ なら $p_x \neq p_y$ である．⊣

カントルはこのようにして，閉集合に対する連続体仮説：すべての閉集合は可算であるかまたは濃度 $2^{\aleph_0}$ を持つ，の証明を得たのであった．別の言い方をすると，連続体問題は，実数の閉集合で濃度 $\aleph_1$ を持つものを見いだせ，という問題に還元できたわけである．コーエンの仕事によって，現在ではこれが ZFC では不可能であることが分かってしまったわけだが，それはさておき，この集合の位相的複雑さに基づく連続体問題へのアプローチというカントルの始めた研究プログラムは，記述集合論においてさらに厳密に追究されることになる．

任意の $A \subseteq {}^\omega\omega$ に対し，

A は**完全集合の性質**を持つ　⇔　A は可算であるか，または完全集合を部分集合として持つ

とする．ルベーグ可測性やベールの性質と同じように，完全集合の性質は，良いふるまいをする集合であることを示す性質と見なすことができ，最終的にはすべてのボレル集合を含む多くの集合がこの性質を持つことが示された．しかし，ハレでカントルのもとで勉強をしたベルンシュタイン Bernstein は，選択公理の非常に弱い形のものがすでにこの性質による連続体問題へのアプローチを阻止することを示した．1897 年その時にはまだ 17 才だったベルンシュタインは AC を用いて一般にシュリューダー=ベルンシュタインの定理として知らている次の定理を確立している（実際には AC を用いずに証明できる）：$|A| \leq |B|$ で $|B| \leq |A|$ なら，A と B の間の全単射が存在する．この定理により，$\leq$ が ZF で“基数”の間の大小関係とみなせることが分かる．ただし，$\leq$ は単射的な埋め込みの存在を表す．特に $\omega_1 \leq 2^{\aleph_0}$ は，整列可能な実数の非可算な集合が存在することを意味する．ベルンシュタインの完全集合の性質に関する議論は以下のようにとめることができる：

11.4 命題　(ZF)(Bernstein [08]).

(a) 実数の全体の集合が整列可能なら，濃度 $2^{\aleph_0}$ の実数の集合 A で，任意の実数の完全集合 P に対し $P \cap A \neq \emptyset$ かつ $P - A \neq \emptyset$ となるようなものが存在する．

(b) $\omega_1 \leq 2^{\aleph_0}$ なら，実数の集合で完全集合の性質を持たないものが存在する．

証明 (a) シュリューダー=ベルンシュタインの定理を用いて，自然な数えあげの議論により，ちょうど $2^{\aleph_0}$ 個の完全集合が存在することが示せる（$\leq 2^{\aleph_0}$ のみを示すのはもっと簡単だが，実はここではこれで十分である）．${}^{\omega}\omega$ の整列順序の 1 つを固定し，完全集合の全体を，$\langle P_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0} \rangle$ と枚挙する．ここで，$\alpha < 2^{\aleph_0}$ に対し，$a_\alpha \neq b_\alpha$ を次のように定義する：すべての $\beta < \alpha$ に対し，a_β, b_β がすでに定義されたとき，a_α を

$$a \in P_\alpha - (\{a_\beta \mid \beta < \alpha\} \cup \{b_\beta \mid \beta < \alpha\})$$

となるような a で上の整列順序に関し最小なものとする．つぎに，b_α を

$$b \in P_\alpha - (\{a_\beta \mid \beta \leq \alpha\} \cup \{b_\beta \mid \beta < \alpha\})$$

となるような b で最小のものとする．11.3(b) により，これは実行可能である．A として $\{a_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ をとれば，これが求めるようなものとなる．

(b) $2^{\aleph_0} \not\leq \omega_1$ なら，11.3(b) により，整列可能な実数の集合で完全集合の性質を持たないものが存在する．$2^{\aleph_0} \leq \omega_1$ なら，仮定により，シュリューダー=ベルンシュタインの定理から ${}^{\omega}\omega$ と ω_1 の間に全単射が存在する．したがって (a) から求めている帰結を得ることができる． ⊣

ベルンシュタインは，(a) の意味での完全集合の性質の強い否定から非可測集合の存在が導ける，と解釈することができる，ということを Bernstein[08: 330] で注意している．これは簡単に示せる：A が可測な集合だったとすれば，$m_L(A) > 0$ または $m_L({}^{\omega}\omega - A) > 0$ となる．例えば前者が成り立っているとすると，0.9(a) により，閉集合 $C \subseteq A$ で $m_L(C) > 0$ となるものが存在する．したがって，11.3(a) により，完全集合 $P \subseteq C$ が存在するが，これは矛盾である．

さらに A はベールの性質も持ち得ない：そうでないとすると，必要なら補集合をとることで，A は痩集合でないと仮定してよい．0.12(b) により，G_δ 集合 $X \subseteq A$ で $A - X$ は痩集合となるようなものが存在する．A は痩集合でないから X は非可算でなければならない．ところが，任意の非可算なボレル集合は完全集合を含む（12.2(c) による）から，これは矛盾である．

完全集合の性質によって，強制法と内部モデルという互いに補足的な方法に基づく無矛盾等価性の結果の導出，という集合論できわめて重要な現象の最初の例が供されることになった．多くの場合，巨大基数の仮説は，この巨大基数を ω_1 に崩壊する強制，あるいは連続体の濃度をこの基数にまで拡大する強制によって，実数に関する命題に変形される．一方この命題がその巨大基数の仮説を必要としていることがある内部モデルによって明らかにされる．このような精妙な合成により，超限の度合に関する高さの仮定が，巾集合の豊かさに関する幅の仮説と関係づけられるのである．ソロヴェイの 11.1 は，到達不可能基数から出発して，すべての実数の集合は完全集合の性質を持つという命題にいたる強制による

方向を与えている．注目すべきことに，スペッカーは Specker [57] ですでに内部モデルへの移行を行っていた；スペッカーは，いくつものステップを経て，もしすべての実数の集合が完全集合の性質を持っており，ω_1 が正則基数なら，ω_1 は L で到達不可能になる，ということを ZF で示している（Mycielski [64: 213] を参照）．したがって，11.1(c)(d) を得るためにソロヴェイが到達不可能基数を用いたのは必要なことであったことが分かり，この到達不可能基数の ω_1 への崩壊が，スペッカーの観察を補完することになったわけである．

スペッカーの結果の結論は ω_1 **は実数から到達不可能である**，つまり，

$$\forall a \in {}^{\omega}\omega(\omega_1^{L[a]} < \omega_1)$$

というものに強めることができる．この条件はすぐに議論の焦点となる重要な仮説となるのであるが，上の呼びかたは次のような簡単な改良により明らかになる：

11.5 命題　(ZF). ω_1 が正則基数だとして，$\forall a \in {}^{\omega}\omega(\omega_1^{L[a]} < \omega_1)$ とする．このとき

$$\forall a \in {}^{\omega}\omega(\omega_1 \text{ は } L[a] \text{ で到達不可能})$$

となる．

証明　そうでないと仮定して，ある $a \in {}^{\omega}\omega$ に対し ω_1 は $L[a]$ で到達不可能でないとする．L での証明と同様にして $L[a]$ は GCH を満たすことが示せるから，ω_1 は $L[a]$ で非極限順序数でなければならない．例えば $\omega_1 = \rho^{+L[a]}$ とする．ρ は可算だから，$b \in {}^{\omega}\omega$ を ω 上の順序型 ρ の整列順序をコードするものとする．ここで $c \in {}^{\omega}\omega$ が a と b をコードしているものとすると $\omega_1^{L[c]} = \omega_1$ となり，矛盾である．　⊣

最後に，レヴィの $\mathrm{Col}(\omega, \kappa)$ による崩壊で得られたもとの結果を上で述べた結果の図式にとりこむことができる；レヴィは実質的には次の (a) と (c) の無矛盾等価性を得ている：

11.6 定理　(Solovay [65b, 70], Specker [57], Levy [63, 70]). 次の理論は互いに無矛盾等価である．

(a) ZFC + $\exists\kappa$(κ は到達不可能).
(b) ZF + DC +「すべての実数の集合は完全集合の性質を持つ」.
(c) ZF + ω_1 は正則基数 + $\omega_1 \not\leq 2^{\aleph_0}$.
(d) ZF + ω_1 は正則基数 + $\forall a \in {}^{\omega}\omega(\omega_1^{L[a]} < \omega_1)$.

証明　Con(d) → Con(a) は，11.5 から出る．Con(a) → Con(b) は 11.1 が確立されれば，これにより得られる．(b) → (c) と (c) → (d) は容易に示せる．前者は，11.4(b) と DC から ω_1 が正則基数となることから導ける．後者は次のようにして示せる：任意の $a \in {}^{\omega}\omega$ に対し，$\mathcal{P}(\omega) \cap L[a]$ は $L[a]$ で順序型 $\omega_1^{L[a]}$ に整列できる．したがって，$\omega_1^{L[a]} = \omega_1$ だったとすると $\omega_1 \leq 2^{\aleph_0}$ となってしまう．　⊣

11.1 で到達不可能基数がルベーグ可測性やベールの性質に対しても必要となるかどうかは未解決問題として残され，巨大基数を取り除く試みに多くの努力がはらわれた．ところがこれは，集合論をかくもやっかいなものにしている，あの思いもよらない展開の一つ，と言えるものであるが，シェラハは 1979 年に，ベールの性質には到達不可能基数が実際には必

要ないが，意外なことに，ルベーグ可測性にはこれが必要になることを示した（Shelah[84], 第 II 巻を参照）．

この少し長くなってしまった前置きをここで終えることにして，11.1 へのアタックを，まずルベーグ測度に関する結果のために必要となる予備知識の準備で始めることにする．

ランダム実数

§10 で見たように強制法が作られたときにそこで用いられた p.o. は $\mathrm{Col}(\lambda, S)$ という形をしたものであったが，これ以外の p.o. に関する強制法の議論の第一歩をはじめたのはソロヴェイで，彼が調べたのは，よく知られたボレル集合の σ-代数による強制法であった．§0 の用語を使って，

$$\mathcal{B}^* = \{X \in \mathcal{B} \mid X \text{ は零集合ではない }\}$$

に

$$p \le q \quad \Leftrightarrow \quad p \subseteq q$$

によって順序を入れたものを強制法の p.o. として考える．次は明らかである：

11.7 演習

(a) $p, q \in \mathcal{B}^*$ に対し，$p \perp q \quad \Leftrightarrow \quad p \cap q$ は零集合．

(b) $\mathcal{B}^*$ は ω_1-連鎖条件を満たす．

ヒント (b) は 2.1 と同様にして示せる． ⊣

$\mathcal{B}^*$ が分離的でないことは容易にわるが，これの分離的商構造 $\mathcal{B}^*/\approx$ は，同値関係 $p \approx q \Leftrightarrow p \triangle q$ は零集合，により得られる．これを定義として用いると $\approx$ はルベーグ可測な集合の全体の σ-代数 $\mathcal{M}_L$ に対し拡張できるが，商構造 $\mathcal{M}_L/\approx$ は $\mathcal{B}/\approx$ と一致する．これは集合演算を $\approx$ で割ったものに関してブール代数となり，**ルベーグ測度代数**とよばれる．ソロヴェイはこの代数を用いているが，$\mathcal{B}^*$ で議論すると $\approx$ に関する同値類を考える必要がなくなり，これによる議論は 10.3 によりルベーグ測度代数によるものと同値になる．

ソロヴェイによる $\mathcal{B}^*$-generic であることの特徴付けを与えるために，開集合，閉集合，および G_δ 集合のコーディングに関する議論が必要になる：各 $c \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$A_c = \begin{cases} \bigcup\{O(\mathbf{s}_i) \mid c(i+1) = 1\} & c(0) = 0 \text{ のとき，} \\ {}^\omega\omega \ - \ \bigcup\{O(\mathbf{s}_i) \mid c(i+1) = 1\} & c(0) = 1 \text{ のとき，} \\ \bigcap_n(\bigcup\{O(\mathbf{s}_i) \mid c(2^n 3^{i+1}) = 1\}) & c(0) > 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく．c は $c(0) = 0$ のとき**開集合コード**，$c(0) = 1$ のとき**閉集合コード**，$c(0) > 1$ のとき G_δ **コード**とよばれる．すべての開集合，閉集合，G_δ 集合に対し，対応するコード c で $X = A_c$ となるものが存在する．実は，Solovay [70] でのように，すべてのボレル集合に対しコードを与えることができるが，0.9 でのような近似により，ここではこれを用いずにすますことができる．A_c は集合としてはモデルごとに異なる可能性があるが，ブール代数的，あるいは測度論的な本質は，このコードにより絶対的に記述することができる．

11.8 補題　M を推移的な ZF の $\in$-モデルとする．このとき：

(a) 以下はすべて M に対し絶対的である：

$$x \in A_c\ ;\ A_c \neq \emptyset\ ;\ A_c \subseteq A_d\ ;\ A_c \subseteq ({}^{\omega}\omega - A_d)\ ;\ A_c \cap A_d = A_e.$$

（つまり，$x, c \in M$ で c がコードのとき，$x \in A_c^M \Leftrightarrow x \in A_c$ が成り立つ，等々）

(b) $c \in M$ がコードなら，$m_L^M(A_c^M) = m_L(A_c)$ となる．

証明　(a) コードは $O(\mathbf{s}_i)$ たちの間の関係を規定するが，これは，$\mathbf{s}_i$ のみに依存するから，これは明らかである．

(b) まず c は開集合コードであるとしてみる．数列 $\langle i_j \mid j \in \omega \rangle$ で A_c は $O(\mathbf{s}_{i_j}), i \in \omega$ の互いに素な和となるようなものが 0.8.(d) の証明でのようにして c から定義できる．よって，$m_L(A_c)$ は絶対的に決まることが分かる．

c が閉集合コードの場合には，d を開集合コードで，$A_d = {}^{\omega}\omega - A_c$ となるものとしこれに (a) を適用すればよい．

最後に，c を G_δ コードとする．このときには，開集合コードの列 $\langle c_n \mid n \in \omega \rangle$ で，$m < n$ なら $A_{c_m} \supseteq A_{c_n}$ で，$A_c = \bigcap_n A_{c_n}$ となるものが c から定義できる．$m_L(A_c) = \inf(\{m_L(A_{c_n}) \mid n \in \omega\})$ だから，これは絶対的に決定されることが分かる．　$\dashv$

ここで，$\mathcal{B}^*$ による強制に対し，実数の付加に関した特徴付けを与えることができる：

11.9 定理　(Solovay [65b, 70])．G を $\mathcal{B}^*$-generic とする．このとき，$x \in {}^{\omega}\omega$ で，任意の閉集合コード $c \in V$ に対し

$$x \in A_c^{V[G]} \quad \Leftrightarrow \quad A_c^V \in G\,,$$

が成り立ち，$V[x] = V[G]$ となるようなものが一意に存在する．

証明　0.9(a) の C に関する部分から以下が帰結できる：

(i) 任意の $n \in \omega$ に対し，

$$\{C \in \mathcal{B}^* \mid C \text{ は閉集合 } \wedge\ \exists k(C \subseteq \{f \in {}^{\omega}\omega \mid f(n) = k\})\}$$

は $\mathcal{B}^*$ で稠密になる．

(ii) 任意のルベーグ可測な $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ で，$A \in V$ となるものに対し，

$$\{C \in \mathcal{B}^* \mid C \text{ は閉集合 } \wedge\ (C \subseteq A\ \vee\ C \cap A = \emptyset)\}$$

は $\mathcal{B}^*$ で稠密になる．

(ii) を示すには，$p \in \mathcal{B}^*$ を任意にとる．$m_L(p \cap A) > 0$ なら，0.9(b) により，閉集合 $C \in \mathcal{B}^*$ で，$C \subseteq p \cap A$ となるものがある．そうでなければ，$m_L(p - A) > 0$ となるが，このときには閉集合 $C \in \mathcal{B}^*$ で，$C \subseteq p - A$ となるものがある．

$V[G]$ で議論をする．$x \in {}^{\omega}\omega$ で，

$$\{x\} = \bigcap\{A_c^{V[G]} \mid c \in V \text{ は閉集合コード } \wedge\ A_c^V \in G\}$$

で一意に決まるようなものが存在する．これは，この集合が有限共通部分の性質を持つ閉集合の族の共通部分となっていることと (i) によりよい．

今度は，$c \in V$ を任意の閉集合コードとする．$A_c^V \in G$ なら，定義により $x \in A_c^{V[G]}$ である．逆に $x \in A_c^{V[G]}$ としてみる．このとき $A_c^V \in G$ を示すためには，(ii) により，任意の閉集合コード $d \in V$ で $A_d^V \in G$ となるものに対し $A_c^V \cap A_d^V \neq \emptyset$ が示せればよい．ところが，これは $x \in A_c^{V[G]} \cap A_d^{V[G]}$ から導ける．

最後に，G は

$$G = \{p \in B^* \mid \exists c(c \in V \text{ は閉集合コード } \wedge\ x \in A_c^{V[x]} \ \wedge\ A_c^{V[x]} \subseteq p)\}$$

として $V[x]$ で定義できるから，$V[x] = V[G]$ となることが分かる． ⊣

ソロヴェイはこのような x を**ランダム実数**と呼んだ．正確に言うと，推移的な ZFC の $\in$-モデル M と $x \in {}^\omega\omega$ に対し，x が M 上ランダム実数であるとは，

ある M 上 $(\mathcal{B}^*)^M$-generic な G に対し，x が 11.9 でのようなものとなっていること

である．

次の結果は，ランダム実数のコードの便利な特徴付けとなっているが，ソロヴェイ Solovay [70: 33] はこれによりランダム性に関する直観との対応を見たのであった．ほとんどすべての generic な実数はそれらの発見者の名前がつけられることになるのであるが，皮肉なことに，ソロヴェイはこの適切な用語を選択してしまったために，ランダム実数に彼の名前がつけられるチャンスを逃してしまった! 以下で単に “零集合” といっても，これは 11.8(b) の意味で不明瞭にはならない．また 11.8(a) はいちいち断らずに用いることにする．

11.10 定理 (Solovay [65b, 70])．M を推移的な ZFC の $\in$-モデルとする．このとき，$x \in {}^\omega\omega$ が M 上ランダム実数となるのは，$x \notin A_c$ がすべての零集合の G_δ コード $c \in M$ に対し成り立つ，ちょうどそのときである．

証明 まず x が M 上ランダム実数で G が対応する M 上 $(\mathcal{B}^*)^M$-generic な集合とし，$c \in M$ を零集合の G_δ コードとする．このとき，

$$M \models \ulcorner D = \{C \in \mathcal{B}^* \mid C \text{ は閉集合 } \wedge\ C \subseteq {}^\omega\omega - A_c\} \text{ は } \mathcal{B}^* \text{ で稠密}\urcorner$$

となるから，閉集合コード $d \in M$ で，$A_d^M \in G \cap D$ したがって $x \in A_d^{M[G]}$ となるものが存在する．よって $x \in A_d$ となるから $x \notin A_c$ である．

逆に $c \in M$ が零集合の G_δ コードなら常に $x \notin A_c$ となると仮定してみる．11.9 の証明で M 上のランダム実数 x から対応する $G \subseteq (\mathcal{B}^*)^M$ を定義したときのやり方を思い出してみると，$D \in M$ が $(\mathcal{B}^*)^M$ で稠密なら，閉集合コード $c \in M$ と $p \in D$ で $A_c^M \subseteq p$ かつ $x \in A_c$ となるようなものが存在することを示せば十分であることが分かる．

このために，$D \in M$ を稠密として，まず M で議論を進めて:W を $W \subseteq \{C \mid C \text{ は閉集合 } \wedge\ \exists p \in D(C \subseteq p)\}$ となるような極大な反鎖とする．ω_1-c.c. により W は可算だから，閉集合コードを用いて $\langle A_{c_n} \mid n \in \omega\rangle$ がこれの枚挙となっているようにする．ここで $c \in {}^\omega\omega$ を $c(0) > 1$ かつ

$$c(2^n 3^{i+1}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad O(\mathbf{s}_i) \cap A_{c_n} = \emptyset$$

となるようにとる．各 A_{c_n} は閉集合だから，c は $\bigcap_n({}^\omega\omega - A_{c_n})$ の G_δ コードになるが，これは W の極大性から，零集合となる．

M から出て議論する．仮定により $x \notin A_c$ である．したがって，ある $c_n \in M$ に対し $x \in A_{c_n}$ となる．よって証明が完了した． ⊣

ランダム実数はこの特徴付けを通じて次の無矛盾性の結果に現れる．この最初の使用以外にも，ランダム実数の集合論での様々な応用が見いだされている．

ソロヴェイの定理の証明

主要定理 11.1 は，まずレヴィ崩壊に関する補助的な結果を証明してから，ある内部モデルに移行することで遂行される．この一般的な結果は ZFC の文脈の中で多くの実数の集合が良い性質を持つものとなっていることを示すもので，それ自身としても重要なものである．

集合 X が ${}^\omega$On-**定義可能**とは，ある $a \in {}^\omega\mathrm{On}$ と論理式 $\varphi(v_1, v_2)$ で

$$y \in X \quad \Leftrightarrow \quad \varphi[a, y]$$

となるものの存在することである．もちろん，コーディングにより，1つの ${}^\omega$On の元のみをパラメタとして用いるのと，有限個の $\mathrm{On} \cup {}^\omega\mathrm{On}$ の元を用いることは同じになる．よく知られた順序数定義可能性（Kunen [80: V§2] を参照）と同様に，この概念は ZF での反映の原理を用いることで，次のように定式化することができる：X が ${}^\omega$On-定義可能とは，

$$\exists\alpha\exists a\exists\varphi(a \in {}^\omega\mathrm{On} \cap V_\alpha \ \wedge \ \forall y(y \in X \ \leftrightarrow \ y \in V_\alpha \wedge V_\alpha \models \varphi[a, y]))$$

が成り立つことである．

11.11 定理 (Solovay [65b, 70])．κ を到達不可能基数として，G は $\mathrm{Col}(\omega, \kappa)$-generic とする．このとき，$V[G]$ で，すべての ${}^\omega$On-定義可能な実数の集合は，ルベーグ可測で，ベールの性質と完全集合の性質を持つものとなる．

この定理の証明では次の補題がかなめとなるが，これの証明にはレヴィ崩壊 $\mathrm{Col}(\omega, \kappa)$ に関してこれまでに示したいくつかの事実が組み合わされて用いられる：

11.12 補題　各々の論理式 $\varphi(v_1)$ に対し，これに対応する論理式 $\tilde{\varphi}(v_1)$ で，任意の $x \in {}^\omega\mathrm{On} \cap V[G]$ に対し

$$V[G] \models \varphi[x] \quad \Leftrightarrow \quad V[x] \models \tilde{\varphi}[x]$$

となるものが存在する．

証明　$P = \mathrm{Col}(\omega, \kappa)$ とおく．任意の $x \in {}^\omega\mathrm{On} \cap V[G]$ に対し，10.21 により，$V[x]$ 上 P-generic な H で，$V[G] = V[x][H]$ となるものが存在する．P の弱一様性 (10.19) から，$\varphi[x]$ が満たされるかどうかを知るには，次の意味で H を知っている必要がない：

$$V[x][H] \models \varphi[x] \quad \Leftrightarrow \quad V[x] \models \ulcorner \Vdash_P \varphi(\check{x}) \urcorner .$$

したがって，$\tilde{\varphi}$ として一つの自由変数を持つ論理式で，上の x と P に対する強制法の命題に相当するものをとることができる． $\dashv$

11.11 の証明 $V[G]$ で議論する．まず，

$$\text{任意の } a \in {}^\omega\mathrm{On} \text{ に対し } {}^\omega\omega \cap V[a] \text{ は可算になる}$$

ということに注意する．10.12 と 10.17(e) により κ は $V[a]$ でも到達不可能だからである．

$A \subseteq {}^\omega\omega$ を ${}^\omega$On-定義可能とする．したがって，ある $a \in {}^\omega\mathrm{On}$ と $\varphi(v_1, v_2)$ で

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad \varphi[a, x]$$

となるものがある．11.12 を 2 変数に書きなおしたものを用いると，論理式 $\tilde{\varphi}(v_1, v_2)$ で，

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad V[a][x] \models \tilde{\varphi}[a, x]$$

となるものがとれる．

まず A がルベーグ可測であることを確かめる：

$$\{x \in {}^\omega\omega \mid x \text{ は } V[a] \text{ 上ランダム実数でない}\}$$

は 11.10 により

$$\bigcup\{A_c \mid c \in V[a] \text{ は零集合の } G_\delta \text{ コード}\}$$

と等しく，後者は ${}^\omega\omega \cap V[a]$ が可算であるから，零集合の可算和となり，したがって零集合となることに注意する．したがって，ボレル集合 X で $A \triangle X$ が $V[a]$ 上の非ランダム実数からなるようなものがみつかればよい：

$V[a]$ での $\mathcal{B}^*$ による強制で $\dot{r}$ をランダム実数の標準的名称とする．$V[a]$ で，$Y \in V[a]$ を閉集合からなる $\mathcal{B}^*$ での極大な反鎖で，各々の元は $\tilde{\varphi}(\check{a}, \dot{r})$ を決定するようなものとする．x が $V[a]$ 上ランダム実数なら，$\mathcal{B}^*$-generic であることから，

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup\{A_c \mid A_c^{V[a]} \in Y \ \wedge \ A_c^{V[a]} \Vdash \tilde{\varphi}(\check{a}, \dot{r})\}$$

となる．Y は ω_1-c.c. により可算だから，右辺の集合はボレルとなる（実際，F_σ 集合となっている）．したがってこれを求めていた X としてとれる．

ベールの性質については，ルベーグ可測性の証明と同様の議論なので，概要のみを示すことにする（先に述べたように，シェラハ Shelah [84] は，すべての実数の集合がベールの性質を持つことの無矛盾性証明のためには到達不可能基数の存在は必要ないことを示している）．証明のアイデアは，B^* ではなく，

$$\mathcal{B}^\dagger = \{X \in \mathcal{B} \mid X \text{ は痩集合でない}\}$$

に包含関係で順序を入れたもので強制することである．これの分離的商構造は，可算な稠密部分集合を持つ．例えば，$O(s)$ の形をしたものの同値類の全体がそうである．したがって，10.20 により，$\mathcal{B}^\dagger$ による強制は $\mathrm{Col}(\omega, \{\omega\})$ によるもの，つまり，コーエン実数の付加と一致する．0.12(b) により，$F_{\sigma\delta}$ 集合（可算個の F_σ 集合の共通部分として表せる集

合）に対するコードを導入すると，11.9 と 11.10 に対応して，そこでの閉集合を G_δ 集合で，また G_δ を $F_{\sigma\delta}$ で置き換えた形のコーエン実数の特徴付けが得られる．議論の残りの部分は，この変更を加えるのみですべてうまくゆく．

最後に，A が完全集合の性質を持つことを示す．A は非可算であると仮定してよいが，${}^\omega\omega \cap V[a]$ は可算だから，$y \in A - V[a]$ が存在する．10.21 により，$V[a]$ 上 $\mathrm{Col}(\omega, \kappa)$-generic な H で，$V[a][H] = V[G]$ となるものがあり，したがって 10.17(e) により，p.o. $Q \in V[a]$ で，$Q \subseteq \mathrm{Col}(\omega, \kappa)$, $|Q| < \kappa$ かつ $y \in V[a][H \cap Q]$ となるものが存在する．ここでは，以下 $\Vdash$ で $V[a]$ での Q による強制関係を表すことにする．条件 p と名称 $\dot{y}$ で，

$$p \Vdash \dot{y} \in {}^\omega\omega - \check{V}[a] \;\wedge\; \check{V}[a][\dot{y}] \models \tilde{\varphi}(\check{a}, \dot{y})$$

となるものがとれる．また，κ は $V[a]$ で到達不可能だから，$\mathcal{P}^{V[a]}(Q)$ は $V[G]$ で可算となり，Q の $V[a]$ での稠密な部分集合の枚挙 $\langle D_n \mid n \in \omega \rangle$ がとれる．各 $t \in {}^{<\omega}2$ に対し，$p_t \in Q$ と $u_t \in {}^{<\omega}2$ を次のようにとることができる：

$p_\emptyset \leq p$ は $p_\emptyset \in D_0$ となるようにとる．$|t| = n$ となる t に対し，$p_t \leq p$ が決まったとき，u_t, $p_{t^\frown 0}$ および $p_{t^\frown 1}$ を次のようにとる：$p \Vdash \dot{y} \notin \check{V}[a]$ だから，p_t が $\dot{y}(k)$ の値を決定しないような最小の $k \in \omega$ がとれる．u_t を $p_t \Vdash \dot{y}|k = \check{u}_t$ を満たすものとし，$p_{t^\frown 0}, p_{t^\frown 1}$ を 両方とも D_{n+1} の元で $\dot{y}(k)$ を異なる値に決定するようにとる．

各 $x \in {}^\omega 2$ に対し，

$$G_x = \{q \in Q \mid \exists t(p_t \leq q \;\wedge\; t \subseteq x)\}$$

とおく．構成により，各 G_x は $V[a]$ 上 Q-generic となる．次に，

$$C = \{\dot{y}^{G_x} \mid x \in {}^\omega 2\}$$

とする．このときすべての $x \in {}^\omega 2$ に対し $p \in G_x$ だから，$C \subseteq A$ となる．ここで，C は孤立点を含まず，

$$C = \textstyle\bigcap_n \bigcup_t \{O(u_t) \mid |t| = n\}$$

で，ここでの各々の有限和は 0.8(c) により閉集合だから，全体としての共通部分も閉集合となり，したがって，C は完全集合となる．

これによって 11.11 の証明が完了した．　$\dashv$

ソロヴェイは，上の証明から自然に思いつくことのできる，$V[G]$ で**遺伝的 ${}^\omega$On-定義可能**な集合の全体，つまり，集合 x でその推移的閉包 $\mathrm{tc}(\{x\})$ のすべての元が ${}^\omega$On-定義可能となるようなもの全体のつくる内部モデルへの移行によって，主要定理 11.1 を証明している．ここでは，実数の全体の構成的閉包 $L(\mathbb{R})$ へ移行する (§3)．これはこのモデルの標準的な呼び名で，§0 では $\mathbb{R}$ は有理数の全体のデデキント完備化として定義されていたのであったが，いずれにせよ，この場合には相互の定義可能性から，

$$L(\mathbb{R}) = L({}^\omega\omega) = L(\mathcal{P}(\omega))$$

が成り立つ．一般には $L(\mathbb{R})$ はソロヴェイのモデルより小さいものになるが，最初のレヴィ崩壊での基礎モデルとして L が用いられた場合には，これらのモデルは等しくなる

ことが知られている．さらに，$L(\mathbb{R})$ は強い仮説の研究で重要な役割を果たすことになる (§§27, 30). DC の証明はソロヴェイのモデルでの証明より複雑なものになるが，これはそれ自身として重要である．

11.1 の証明　11.11 に基づき，$V[G]$ で議論する．${}^\omega\omega \cap L(\mathbb{R}) = {}^\omega\omega$ だから，コーディングにより，すべての開集合，閉集合，G_δ 集合，したがって F_σ 集合も $L(\mathbb{R})$ の元となり，これらの集合は $L(\mathbb{R})$ でも対応する同じ種類の集合となっている（実際には，すべてのボレル集合が $L(\mathbb{R})$ の元となる）．

ここで $A \subseteq {}^\omega\omega$ で $A \in L(\mathbb{R})$ とする．このとき A は ${}^\omega$On-定義可能となるから，11.11 の証明により，F_σ 集合 X で $A \triangle X$ が零集合となるようなものがある．したがって，(0.9(a) により）各 $n \in \omega$ に対し開集合 $O_n \supseteq A \triangle X$ で，$m_L(O_n) < \frac{1}{n+1}$ となるものが存在する．前の段落と絶対性 (11.8) により，このことは $L(\mathbb{R})$ でも成り立つ．したがって，$(A$ はルベーグ可測$)^{L(\mathbb{R})}$ である．ベールの性質も類似の議論により示せる．

完全集合の性質については，さらに A は $L(\mathbb{R})$ で非可算であると仮定してよい．すべての可算な整列順序は実数でコードでき，したがって $L(\mathbb{R})$ の元となるから，A は（本当に）非可算である．したがって，A は 11.11 により，完全集合となる部分集合 C を含むが，C は $L(\mathbb{R})$ でも完全集合となることが容易に示せる．

次の命題により 11.1 の証明が完了する：

11.13 命題　(ZF + DC). $(\mathrm{DC})^{L(\mathbb{R})}$.

証明　まず，L の整列順序の定義と同様なやりかたで，上射 Φ: On $\times \mathbb{R} \to L(\mathbb{R})$ で，すべての α に対し，$\Phi|(\alpha \times \mathbb{R}) \in L(\mathbb{R})$ となるようなものが，超限帰納法により容易に定義できる．

ここで，$X, R \in L(\mathbb{R})$ で $X \neq \emptyset$, $R \subseteq X \times X$, かつ，

$$\forall x \in X \exists y \in X(\langle x, y\rangle \in R)$$

となっていると仮定する．V で議論して，DC により，$f \in {}^\omega X$ で，$\langle f(n), f(n+1)\rangle \in R$ がすべての $n \in \omega$ に対し成り立つようなものがとれる．δ を $\mathrm{ran}(f) \subseteq \Phi``(\delta \times \mathbb{R})$ となるものとして，DC から帰結される AC_ω により，$\langle a_n \mid n \in \omega\rangle$ を，すべての $n \in \omega$ に対し，$\xi < \delta$ で $\Phi(\xi, a_n) = f(n)$ となるようなものが存在するようにとれる．ここで，$\delta \times \omega$ 上の関係 $\prec$ を

$$\langle \eta, i\rangle \prec \langle \zeta, j\rangle \quad \Leftrightarrow \quad i = j + 1 \ \wedge \ \langle \Phi(\zeta, a_j), \Phi(\eta, a_i)\rangle \in R$$

で定義する．$\Phi|(\delta \times \mathbb{R}) \in L(\mathbb{R})$ で，実数の列 $\langle a_n \mid n \in \omega\rangle$ は一つの実数でコードできるから，やはり $L(\mathbb{R})$ の元となる．したがって，$\prec \in L(\mathbb{R})$ である．ここで $\prec$ は $\mathrm{ran}(f)$ により整順的でないから，絶対性 (0.3) により $L(\mathbb{R})$ でも整順的でない．$E \subseteq \delta \times \omega$ を $E \in L(\mathbb{R})$ で，空でなく，$\prec$ に関する最小元を持たないようなものとする．任意の $\langle \eta, i_0\rangle \in E$ から出発して，列 $\langle \eta_n \mid n \in \omega\rangle$ が，$\eta_0 = \eta$ かつ，すべての $n \in \omega$ に対し，$\langle \Phi(\eta_n, a_{i_0+n}), \Phi(\eta_{n+1}, a_{i_0+n+1})\rangle \in R$ で，η_{n+1} は η_n が与えられたときにこのようなもののうち最小なものとして帰納的にとることができる．定義可能性から，$\langle \Phi(\eta_n, a_{i_0+n}) \mid n \in$

$\omega\rangle \in L(\mathbb{R})$ となり，これによって証明が完了した．　$\dashv$

これで 11.1 の証明ができたので，ソロヴェイのモデルで解決できるもう一つの問題について述べて，この節をしめくくることにする．分割関係の研究の初期に分かったことの一つに実数の全体が整列できるなら，$\omega \longrightarrow (\omega)^{\omega}_{2}$ は成り立たない (7.1) という事実があった．新しい generic な実数を導入して用いることにより，マサイアス (Mathias [68, 77]) はこの分割関係がソロヴェイのモデルで成り立つことを示した．

マサイアス強制法の p.o. は，

$$P = [\omega]^{<\omega} \times [\omega]^{\omega} \quad \text{に}$$

$$\langle s, A\rangle \leq \langle t, B\rangle \quad \Leftrightarrow \quad t \text{ は } s \text{ の始片 } \wedge\ A \cup (s - t)\ \subseteq B$$

で順序を入れたものである．ここでのアイデアは，条件 $\langle s, A\rangle$ は新しい ω の部分集合の始片 s を決定し，これの以降の元を A からのものに制限するということである．このような強制はプリクリにより，可測基数に対して最初に定義されている (§18). $\langle s, A\rangle \parallel \langle t, B\rangle$ なら，$A \cap B$ は無限で，s は t の始片であるか，あるいはその逆が成り立っていることに注意する．したがって，G が P-generic なら，G は ω の部分集合

$$x_G = \bigcup\{s \mid \exists A(\langle s, A\rangle \in G)\}$$

を決定する．逆に，

$$G' = \{\langle s, A\rangle \in P \mid s \text{ は } x_G \text{ の始片で }\ x_G - s \subseteq A\}$$

とすれば $G = G'$ となる：$G \subseteq G'$ を示すのは容易であるが，G' は P-generic となるから，$G = G'$ が一般的な議論から帰結できる：任意の $\langle s, A\rangle \in P$ に対し，

$$\{\langle t, B\rangle \in P \mid \langle t, B\rangle \leq \langle s, A\rangle\ \vee\ \langle t, B\rangle \perp \langle s, A\rangle\}$$

は P で稠密となるから，$\langle s, A\rangle \in G'$ なら，ただちに $\langle s, A\rangle \in G$ となることが分かる．したがって，x_G は G を決定する．

よって $V[x_G] = V[G]$ となる．x_G は**マサイアス実数**と呼ばれる；より正確には，M を ZFC の $\in$-モデルとし，$x \subseteq \omega$ とするとき，x が**マサイアス実数**とは，

$$\text{ある } M \text{ 上 } P^M\text{-generic な } G \text{ により，} x = x_G \text{ となる}$$

こととする（ここでは，ω の部分集合を実数と考えると都合がよい）．P は ω_1-c.c. を持たないが，ω_1 を保存し，他にも便利な性質を持っているため，いくつかの応用が知られている．これの重要な性質はマサイアス自身により得られている：

11.14 命題　(Mathias [77: 86]).

(a) 任意の $\langle s, A\rangle \in P$ と強制法の言語の論理式 φ に対し，$B \in [A]^{\omega}$ で，$\langle s, B\rangle \parallel \varphi$ となるものがある．

(b) x が M 上マサイアス実数なら，任意の $y \in [x]^{\omega}$ も M 上のマサイアス実数になる．　$\dashv$

(a) の要点は，論理式の真偽を決定するには，s を拡張する必要はない，ということである．可測基数での対応する結果に対しては上の命題の必要とするものよりさらに簡単な証明が後で与えられることになる (§18).

分割の複雑さに関する，$\omega \longrightarrow (\omega)^{\omega}_{2}$ の変形について論じるために，

$$Y \subseteq [\omega]^{\omega} \text{ がラムズィーとは } \quad \exists x \in [\omega]^{\omega}([x]^{\omega} \subseteq Y \ \vee \ [x]^{\omega} \cap Y = \emptyset)$$

となることとする．したがって，$\omega \longrightarrow (\omega)^{\omega}_{2}$ はすべての $Y \subseteq [\omega]^{\omega}$ がラムズィーであることと同値である．この性質に関するより詳しいことについては§27 を参照されたい．

11.15 演習 (Mathias [68, 77]). 到達不可能基数 κ が存在するとして，G を $\mathrm{Col}(\omega,\kappa)$-generic とする．このとき，

(a) $V[G]$ で，すべての ${}^{\omega}\mathrm{On}$-定義可能な $[\omega]^{\omega}$ の部分集合はラムズィーとなる．

(b) $L(\mathbb{R})^{V[G]}$ で $\omega \longrightarrow (\omega)^{\omega}_{2}$ が成り立つ．

ヒント (a) の証明には，$Y \subseteq [\omega]^{\omega}$ が，ある $a \in {}^{\omega}\omega$ に対し，

$$x \in Y \quad \Leftrightarrow \quad V[a][x] \models \varphi[a, x]$$

を満たすものとする．11.14(a) により，$\dot{r}$ をマサイアス実数の標準的名称とするとき，$\langle \emptyset, A\rangle \in P^{V[a]}$ で，$\langle \emptyset, A\rangle \parallel \varphi(\check{a}, \dot{r})$ となるようなもが存在する．ここで，$V[a]$ 上のマサイアス実数 x で $x \subseteq A$ となるようなものが存在することに注意して，11.14(b) により，このような x が Y のラムズィー性を示すことを結論すればよい． ⊣

今までに考察した他の性質とは違い，$\omega \longrightarrow (\omega)^{\omega}_{2}$ のために到達不可能基数が必要かどうかはわかっていない：

11.16 未解決問題 Con(ZFC) から $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \mathrm{DC} + \omega \longrightarrow (\omega)^{\omega}_{2})$ が導けるか？

ソロヴェイの実りの多いアイデアは初めには大域的な結果 11.1 を確立するために考えられたものであったが，これは後に記述集合論での古典的な結果の階層に関する拡張をもたらすことになる（§14 を参照）．

§12 記述集合論

記述集合論は連続体の定義可能性の理論であり，定義可能な実数の集合の構造的性質の研究である．構成主義からの関心により始められた，この分野の主要な動機の一つは，正則性が成り立つ範囲を研究することであった．実数の集合の正則性とは，その集合がよい振る舞いをすることを示唆する性質をさし，ルベーグ可測性，ベールの性質，完全集合の性質などがその重要な例である．この分野は 1916 年のスースリンによる解析集合に関するいくつかの結果から出発して次第に発展してゆき，ゲーデルの $V = L$ の下で単純に定義される集合で正則性を持たないようなものが存在する，という限定的な結果に至る．これに続く時期に，クリーニは，後にこの理論の実効的バージョンであることが判明するものを，彼の帰納的関数論に関する基礎論での研究の一般化として展開し，古典的な諸結果

を精密化した．その後1965年にソロヴェイは彼の11.1でのアイデアをふまえて，これらの正則性の，ゲーデルの $V = L$ での限定的な例のレヴェルでの特徴付けを与え，これにより古典的な記述集合論のプログラムを復活させることになった．11.1はすべての実数の集合は正則性を持つということの相対的無矛盾性を確立するものであったが，ソロヴェイのこれ以降の仕事は，巨大基数の仮説から直接に実数の集合の正則性を導くという方向に向かっている．強制法と内部モデルの研究により巨大基数の仮説と実数の定義可能な集合の間の予期されなかった深い関係が明らかになってくるが，これにともなって，ソロヴェイのアプローチの延長線上に，1980年代終わりのめざましい成果が得られることになる．

この節と次の節では，これに続く節のための準備として，記述集合論の歴史的発展とその基礎理論の復習をする．§14と§15では，ソロヴェイの，それからマルティンの巨大基数の仮説の入ってくる仕事について論じる．Moschovakis [80] には記述集合論の一般的な文脈での詳細な解説がある．Rogers [80] は解析集合に関する最近の結果が述べられている概説書で，Kechris [95] は古典的理論を現代の立場から説明している．Hinman [78] は階層を強調する書き方になっており，Mansfield-Weitkamp [85] と Jech [78: IV] は強制法による現代の発展をとりこんだコンパクトな記述となっている．この節では初めに，この分野の歴史的発展の初期のできごとについて，証明は後回しにして，述べる．

記述集合論はフランスの解析学者ボレル，ベール，ルベーグの今世紀初頭頃の仕事にその端を発する．カントルが彼の集合の研究の一部として行なった積分の理論への重要な貢献（Hawkins [75: 3.3] を参照）を継承して，ボレル Borel [98: 46-47] は，ボレル集合の概念を公理的に導入された測度から抽出した．ベールは関数の一般的概念への具体的なアプローチにより，彼の学位論文 Baire [99] で**ベール関数**の族を階層に分離し，これによる解析を与えた．ここにベール関数の族とは，多変数実数連続関数を含み各点収束の極限をとることに関して閉じているような最小の関数の族のことである．ルベーグの学位論文 Lebesgue [02] は彼の可測性の概念の出典として測度論で重要な位置をしめるが，彼のこれとは別の方向での最初の大きな仕事は記述集合論で決定的な意味を持つものとなった．彼の覚え書き Lebesgue [05] で，ルベーグはベール関数を調べているが，ここでこの関数の族は，解析的表現（これの正確な意味は後で述べる）により定義可能な関数の全体と一致することを強調している．彼は，ベール関数とボレル集合について，後者は前者による開集合の逆像と一致するという関連づけを与えている．ルベーグはこれを用いてボレル集合の階層を導入しているが，この階層は，細部の相違を除くと現在で標準的なものとなっているハウスドルフ Hausdorff [14] のものと一致する．

§0では ${}^{\omega}\omega$ が形式的には実数の集合として扱われ，${}^{k}({}^{\omega}\omega)$, $k \in \omega$ への諸概念の拡張は，位相同型により自動的に仮定されたのだったが，ここでは，以下の定義を明示的に ${}^{k}({}^{\omega}\omega)$ に対し記述することが必要となる．k は ω を走る変数と考える．$0 < \alpha < \omega_1$ として，ボレル階層でのクラス $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ および $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ を，$A \subseteq {}^{k}({}^{\omega}\omega)$ がこれらのクラスに属すことを以下で規定することにより定義する：

$$A \in \mathbf{\Sigma}^0_1 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ は } {}^{k}({}^{\omega}\omega) \text{ での開集合,}$$
$$A \in \mathbf{\Pi}^0_1 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ は } {}^{k}({}^{\omega}\omega) \text{ での閉集合}$$

として，$\alpha > 1$ に対しては帰納的に，

$$\begin{aligned} A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha &\quad\Leftrightarrow\quad A \text{ は，} \textstyle\bigcup_{0<\beta<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\beta \text{ の，ある可算部分集合の和集合，} \\ A \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha &\quad\Leftrightarrow\quad A \text{ は } \textstyle\bigcup_{0<\beta<\alpha} \mathbf{\Sigma}^0_\beta \text{ の，ある可算部分集合の共通部分} \end{aligned}$$

とする．各 $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \cap \mathcal{P}({}^k({}^\omega\omega))$ は可算和のもとに閉じており，各 $\mathbf{\Pi}^0_\alpha \cap \mathcal{P}({}^k({}^\omega\omega))$ は可算共通部分をとる演算に関して閉じている．帰納法により，$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ と $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ は双対な集合になっていることが容易に示せる，つまり，$A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \;\Leftrightarrow\; {}^k({}^\omega\omega) - A \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha$ が任意の $A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ に対し成り立つ．さらに，0.8(c)(d) により，$\mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_2$ となるから，帰納法により，$0 < \beta < \alpha$ なら $\mathbf{\Sigma}^0_\beta \cup \mathbf{\Pi}^0_\beta \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \cap \mathbf{\Pi}^0_\alpha$ が成り立つことが示せる．共終性に関する議論により，

$$\textstyle\bigcup_{0<\alpha<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \bigcup_{0<\alpha<\omega_1} \mathbf{\Pi}^0_\alpha$$

に含まれる ${}^k({}^\omega\omega)$ の部分集合は σ-代数となることが分かるから，これらはちょうど ${}^k({}^\omega\omega)$ のボレル部分集合全体と一致する．§0 と §11 では，ハウスドルフの記法である F_σ と G_δ が，${}^\omega\omega$ の部分集合で，それぞれ，$\mathbf{\Sigma}^0_2$ および $\mathbf{\Pi}^0_2$ に属すものに対して用いられていた．今日では標準となっている $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ および $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ という記法は，Addison [58] で導入されたものである．

Lebesgue [05] での主要な結果は，$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \not\subseteq \mathbf{\Pi}^0_\alpha$ がすべての可算な $\alpha > 0$ に対し成り立ち，したがって，これが真の階層となっており，他方ルベーグ可測な集合でボレル集合でないものが存在する，ということであった．実際，この論文は，定義可能な集合の組織的研究と，超越性を得るためにカントルの汎用的枚挙と対角化の論法を用いること，という数理論理学の中心問題とテクニックを先取りしている点で，注目に値する．ルベーグは任意の関数を用いることに対する保留から，ツェルメロの整列順序定理 Zermelo [04] に対して懐疑的であったが，皮肉なことに，彼のこの論文では選択公理が，暗黙のうちに，しかし本質的に用いられている（Moore [82: 2.3] を参照）．

記述集合論はロシアの数学者ルジン Nikolai Luzin の成果によって独立した分野となってゆく．1914 年にモスクワ大学で初めたセミナーで，彼は実変数関数の理論の重要な学派を確立することになる（Phillips [78] を参照；Keldysh [74], Uspenskii [85], Kanovei [85] では記述集合論への寄与についての概説がある）．ルジンは彼がパリで学生だった時期にフランスの解析学者たちの仕事や思想を知るようになったが，その最初から彼のセミナーの重要な論題の一つは “関数の記述理論” であった．面白いことに，若いときのシルピンスキーがこのセミナーの初期の参加者の一人となっている；彼は 1915 年にモスクワで捕虜になっていたが，ルジンと彼の先生のエゴロフ Dmitry Egorov は，次の年にシルピンスキーがポーランドへ送還されるまで，彼のために自由に生活できるようとりなしをしたのであった．このできごとは十数年にわたるルジンとシルピンスキーの共同研究の始まりとなったのみならず，後者がポーランド学派を創立することを鼓舞し (§2), この学派の記述集合論への基本的な関心を準備することになったことは間違いない．

ルジンはボレル集合の濃度の問題（これは技術的には，すべてのボレル集合が完全集合の性質を持つかという問題となる）を，セミナーの初期の参加者で，後に現代トポロジーの先駆者となるアレクサンドルフ Pavel Aleksandrov に説明した．すべてのボレル集合が

ルベーグ可測で，ベールの性質を持つことは，これらの概念がすでに内包している事実であるが，完全集合の性質については，カントル=ベンディクソンの結果 11.3(a) をのぞくとほとんど何も知られていなかった．この性質は William Young [03] で与えられている大要に暗に示されているが，ハウスドルフ Hausdorff [14: 465ff] はこれを整理して用いることで，すべての $\mathbf{\Sigma}^0_4$ 集合は可算かあるいは濃度 $2^{\aleph_0}$ を持つことを示した．この後ハウスドルフは Hausdorff [16] でこの結果を拡張して，同じ結論がすべてのボレル集合で成り立つことを示した．アレクサンドルフは Aleksandrov [16] で**すべてのボレル集合は完全集合の性質を持つ**ことを証明することに成功している．ある集合が完全集合の性質を持つことから，必ずしもその補集合も完全集合の性質を持つことが帰結されないことが分かっているので，ボレル階層に沿っての帰納法による証明はうまくゆかないため，この証明にはボレル集合の新しい把握の仕方が必要であった．この新しい，より直接的なボレル集合の解析の方法が劇的な発展の土壌を作ることになった：

この直後，ルジンのもう一人の学生であったスースリン Mikhail Suslin —— フランス語の綴りで “Souslin” と書かれることも多い —— はルベーグの Lebesgue [05] を読みはじめた．シルピンスキーは覚え書き Sierpiński [50: 28ff] でスースリンがどのようにして決定的な発見にいたったかを回想している．任意の集合 B に対し，B の**射影**を

$$pB = \{x \mid \exists y(\langle x, y\rangle \in B)\}$$

と定義する．特に，$B \subseteq {}^{k+1}({}^{\omega}\omega) = {}^{k}({}^{\omega}\omega) \times {}^{\omega}\omega$ に対し，

$$pB = \{\langle x_1, \ldots, x_k\rangle \mid \exists y(\langle x_1, \ldots, x_k, y\rangle \in B)\}$$

となる．スースリンは，ルベーグがある個所 (Lebesgue [05: 191-192]) で平面（我々の記法では ${}^{2}({}^{\omega}\omega)$）上のボレル集合の射影はふたたびボレル集合になることを主張していることに気付いた．これは，平面の部分集合が可算個与えられたとき，これらの共通部分の射影がこれらの射影の共通部分と等しくなるという正しくない命題にもとづくものであった —— 量化子に関して言うと，これは $\forall\exists$ を $\exists\forall$ に置き換えるという間違った推論に相当する．スースリンはすぐにルベーグの主張に対する反例を見つけているが，これが彼を**解析集合**の研究に向かわせることになる．$A \subseteq {}^{k}({}^{\omega}\omega)$

A が**解析集合**とは，ある ${}^{k+1}({}^{\omega}\omega)$ の閉集合 B に対し $A = pB$ となること

である（古典的な議論で ${}^{\omega}\omega$ のかわりに $\mathbb{R}$ を用いるときには，ここでの “閉集合” は “G_δ”，つまり，可算個の $\mathbb{R}$ の開集合の共通部分で置き換える必要がある）．スースリンは Suslin [17] で解析集合のことを最初は A-集合 (les ensembles (A)) と呼び，ある確定的に与えられた演算 —— 演算 (A) —— から得られるものとして定義して，その後これを射影によって特徴付けしている．彼は三つの主要結果を主張している．つまり，**すべてのボレル集合は解析集合である；解析集合でボレル集合ではないようなものが存在する；** および，以下の特徴付けである（これは 13.5 で確立される）：

12.1 定理　(Suslin [17]). $A \subseteq {}^{k}({}^{\omega}\omega)$ として，A がボレル集合となるのは，A と ${}^{k}({}^{\omega}\omega) - A$ がともに解析集合である，ちょうどそのときである．

このようにして，ボレル集合は階層により下方から解析できるだけでなく，簡明な表現によって上方から特徴付けすることも可能になったわけである．後の階層に関する諸結果のパラダイムを用意したという意味において，この定理は記述集合論の理論をスタートさせたと言って過言でないであろう．スースリンは 1919 年のモスクワのチフス流行で感染して 25 才の生涯を終えたため，Suslin [17] は彼の発表した唯一の論文となってしまった（これはコーシー Augustin-Louis Cauchy の重大な間違いを若いアーベル Niels Abel が正し，一様収束の概念を確立したエピソードを連想させる．ここでも間違いは $\forall\exists$ を $\exists\forall$ に置き換える間違った推論からおきたもので，アーベルもまた若くして死んでいる）．

この論文にそえられた注意書きでルジンは解析集合の正則性を主張している —— (a) と (b) は 14.4 で，(c) は 14.8 で確立される：

12.2 定理　(Luzin [17]; (c) はスースリンによるものであると書かれている).

(a) すべての解析集合はルベーグ可測である.

(b) すべての解析集合はベールの性質を持つ.

(c) すべての ${}^{\omega}\omega$ の部分集合で解析集合となっているものは，完全集合の性質を持つ.

((c) がスースリンのものとなっているのは優先権の問題のいざこざのかすかな反映である．アレクサンドルフの覚え書き Aleksandrov [79: 284-286] によると，A-集合を定義したのは彼であって，スースリンはこの名前と対応する演算を “演算 (A)” という用語を提案してアレクサンドルフに敬意をはらおうとしたのであった．この名前の由来は Suslin [17] では触れられていないが，Keldysh [74: 180] や Kuratowski [80: 69] などの回想で証言されている．アレクサンドルフの記憶によれば，すべてのボレル集合が A-集合であることと，すべての A-集合が完全集合の性質を持つことを示したのは彼であった．もっとも彼の Aleksandrov [16] でこれらのことが明示的に示されているわけではない．それから 1916 年にアレクサンドルフは，すべての A-集合はボレル集合であるという命題の証明に全力をかたむけたが，この夏にスースリンはボレル集合でない A-集合を見いだしている．アレクサンドルフによると：“何年も後でルジンは A-集合を解析集合と呼ぶようになり，彼の知っているはずの事実に反して，‘A-集合’ という用語は解析集合 (analytic set) の略称である，と言うようになった．しかしこのときには，かつては親密だった私のルジンとの個人的関係はさめきったものになっていた．” 実際ルジンは Luzin [25, 27] では ‘analytic’ という用語の起源をルベーグの Lebesgue [05] に求める無理な努力さえしており，この論文でのボレル集合でない可測集合の例は，実際にはボレル集合でない解析集合の最初の例にもなっていることを指摘している．Luzin [30: 186ff] では演算 (A) についてまったく触れられていないことがかえって目をひく.)

解析集合の研究がモスクワのルジンのグループとワルシャワのシルピンスキーのグループでさらに研究さてゆくにつれ，Suslin [17] と Luzin [17] の結果はさらに大幅に精密化されていった．射影の演算の導入は，ボレル集合の全体の族を拡張することになったわけだが，ルジン Luzin [25a] とシルピンスキー Sierpiński [25] は**射影的集合**を，ボレル集合に射影と補集合の演算を繰り返しほどこすことで得られる集合として定式化した．これは ${}^{\omega}\omega$ に対する現代の記法で表すと次のようになる：

$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ に対し，

$$A \in \mathbf{\Sigma}^1_0 \quad \Leftrightarrow \quad A \in \mathbf{\Sigma}^0_1,\ \text{つまり}\ A\ \text{は開集合}$$

として $n \in \omega$ に対し，帰納的に，

$$A \in \mathbf{\Pi}^1_n \quad \Leftrightarrow \quad {}^k({}^\omega\omega) - A \in \mathbf{\Sigma}^1_n\ ,\ \text{かつ}$$
$$A \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \text{ある}\ {}^{k+1}({}^\omega\omega)\ \text{の}\ \mathbf{\Pi}^1_n\ \text{部分集合}\ B\ \text{に対し，}\ A = pB\ \text{となる}$$

とする．したがって $A \in \mathbf{\Sigma}^1_1 \ \Leftrightarrow A$ は解析集合である．また，

$$\mathbf{\Delta}^1_n = \mathbf{\Sigma}^1_n \ \cap\ \mathbf{\Pi}^1_n$$

とする．これらの用語は，形容詞あるいは形容動詞としても用いて，“$\mathbf{\Sigma}^1_n$ 集合” とか “A は $\mathbf{\Pi}^1_n$” というような言い方もすることにする．$\mathbf{\Sigma}^1_n$ と $\mathbf{\Pi}^1_n$ は双対な集合族となっている，つまり，$A \in \mathbf{\Sigma}^1_n \ \Leftrightarrow {}^k({}^\omega\omega) - A \in \mathbf{\Pi}^1_n$ が $A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ に対し成り立つ．さらに，$\mathbf{\Sigma}^1_n \cup \mathbf{\Pi}^1_n \subseteq \mathbf{\Delta}^1_{n+1}$ となる．これは $\mathbf{\Pi}^1_0 \subseteq \mathbf{\Pi}^1_1$ から帰納法により容易に示せるが，後者は次のようにしてみることができる：

$A \in \mathbf{\Pi}^1_0$ つまり A は閉集合と仮定する．このとき，(0.8(c)(d) により）開集合 G_n がとれて，$A = \bigcap_{n\in\omega} G_n$ とできる．$G = \bigcup_{n\in\omega} G_n \times O(\langle n\rangle) \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ とおくと G は開集合となり，任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$\begin{aligned} x \in A &\leftrightarrow \forall n(x \in G_n) \\ &\leftrightarrow \forall y(\langle x, y\rangle \in G) \end{aligned}$$

となるから，$A \in \mathbf{\Pi}^1_1$ である．

スースリンの結果 12.1 は $\mathbf{\Delta}^1_1$ がボレル集合の全体と一致するということである．Luzin [25c] と Sierpiński [25] では，ボレル階層がそうだったように，射影的階層も真の階層となることが示されており (12.8)，この階層の基本的な理論は間もなく確立されている．例えば，$\mathbf{\Sigma}^1_n \cap \mathcal{P}({}^k({}^\omega\omega))$ と $\mathbf{\Pi}^1_n \cap \mathcal{P}({}^k({}^\omega\omega))$ **はそれぞれ可算和と可算の共通部分をとる演算に関して閉じている**（一方，$\mathcal{P}({}^k({}^\omega\omega))$ の射影的な部分集合の全体はこのような演算に関し閉じておらず，これに関して閉じたものを得るためには，射影的階層の構成を超限回続けて極限で可算和をすべて加えるという操作をする必要がある）．

他方，射影的集合の研究は，そのごく初期に本質的な困難につきあたっている．ひとつには，$\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合のときとは違い，$\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の濃度の問題（これは技術的には，このような集合がすべて完全集合の性質を持つかという問題となる）が未解決のままであった．ルジンは Luzin [17: 94] ですでにこの困難に気付いており，Luzin [25a] ではこれが重要な未解決問題として強調されている．彼は，確信に満ちた，そして不思議議に予言的な個所で，問題の解決を試みるうち，これは射影的集合に関しては，この集合族が濃度 $2^{\aleph_0}$ を持ち “実効的な集合” からなっているにもかかわらず，これのすべての要素が濃度 $2^{\aleph_0}$ を持つかどうか，ベールの性質を持つかどうか，さらにルベーグ可測であるかどうかさえも，“決して解決されることがないであろう” という “まったく意外な” 結論に達した，と宣言している．Luzin [25b] は $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合のルベーグ可測性の確立という具体的な問題点について言及して

いる．$\mathbf{\Pi}^1_1$ と $\mathbf{\Sigma}^1_2$ における，これらの問題はシルピンスキーも Sierpiński [25: 242] で指摘しているが，彼は，そこで，**$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合は $\aleph_1$ 個のボレル集合の和として表せる** (13.7) ことを示すことに成功している．

スースリンの結果に続く最初の進展は，この結果を整理することによって得られている．特に，ルジンは，古典的な教科書 Luzin [30] で系統的な記述を与えている．彼は，そこで，フランスの先駆者たちの構成主義的な視点について述べているが，これは彼自身の仕事に先行する仕事を明らかにするというような，言わば謙虚な態度によるものであっただけではなく，実際に，無制限な選択公理の使用に対する懐疑と定義可能性に関する彼等の考え方を強く支持したからであった．ルベーグは彼の Lebesgue [05] を "非可測集合を具体的に与えることはできるであろうか？" という問で閉めくくっている．ルジンはこの問を彼自身の仕事の出発点にすえて，Luzin [30: 323] では，"... 著者は，すべての射影的集合が可測であるか否かという問題は解決不可能な [解決できない] ものであると考える．著者の見るところでは，射影的集合を定義する方法とルベーグ測度のそれとは比較不可能であり，したがって論理的な関連を持たないからである．" と書いている．

射影的集合が正則性に関して手におえないものであることが分かってきたとしても，他の研究方向では注目すべき進展が見られる．Luzin [30a] では**単層化**の研究が提案されている．$A, B \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ に対し

A が B により単層化されるとは，

$$B \subseteq A \ \wedge \ \forall x(\exists y(\langle x,y\rangle \in A) \leftrightarrow \exists! y(\langle x,y\rangle \in B))$$

となることとする（通常のごとく $\exists!$ は形式的に記述可能な "ちょうど 1 つ存在する" のこととする）．B は添数付けされた集合族上の選択関数であるので，任意の ${}^2({}^\omega\omega)$ の部分集合が単層化できるという主張は，選択公理の一つの変形と見なせる．この定義可能な選択というアプローチにより，ルジンは $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合の同様な集合での単層化の可能性に関するいくつかの結果を公表している．このうちの一つはノヴィコフ Petr Novikov [31] により，閉集合で $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合では単層化できないようなものが存在する，というシャープな形で確認されている．最終的には Vladimir Yankov [41] で，$\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合は，可算個の $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合の差集合の和集合の形のものの可算個の共通部分により単層化できることが示されている．面白いことに，フォン・ノイマン von Neumann [49: 448ff] も，これよりは多少弱い $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合に関する単層化の結果を，演算子環の広範囲な研究の中で確立している．多分 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の研究が直面する難しさのためであろうか，ルジンは Luzin [30a: 351] で $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合で，どの "識別可能" な集合でも単層化できないものがあると主張して，なにやらよく分からない例をあげている．にもかかわらず，シルピンスキーは Sierpiński [30: 139] で $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合は $\mathbf{\Pi}^1_2$ 集合あるいは一歩ゆずって何らかの射影的集合で単層化できるかを問うているが，ノヴィコフの Luzin-Novikov [35] にある一つの結果から，すべての $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合は $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合で単層化が可能であることが導かれる．この結果をふまえて，日本人の数学者，近藤基吉は **$\mathbf{\Pi}^1_1$ 単層化定理**を得ている（13.17 を参照）：

12.3 定理　(Kondô [37, 39])．すべての ${}^2({}^\omega\omega)$ の $\mathbf{\Pi}^1_1$ 部分集合は $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合により単層化

可能である.

これは記述集合論の初期の研究のハイライトである．近藤も注意しているように，射影をとることにより，すべての $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合は $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合で単層化できる，という命題も彼の結果から帰結できる．しかし，すべての $\mathbf{\Pi}^1_2$ 集合が射影的集合によって単層化できるかという問題は未解決のまま残された.

記述集合論での正則性に関しての研究が完全に行き詰まってしまった理由はゲーデルの構成的階層に関する仕事によって説明されることになる．彼の L に関する最初の仕事 Gödel[38] で，ゲーデルは，$V = L$ なら，**実数の $\mathbf{\Delta}^1_2$ 集合でルベーグ可測でないものが存在し，$\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合で完全集合の性質を持たないものが存在する**という結果を予告している（証明は，13.10 と 13.12 を参照）．したがって，記述集合論の初期の研究は ZFC でその理由を記述できる障害につきあたっていたわけであった．ゲーデルがこれらの結果を重要なものと考えていたことは，これらが AC や GCH に関する彼の結果と対等の見出しで扱われていることからもうかがわれる．しかし，ゲーデルは証明を発表しなかったため，Novikov [51] に最初の証明が現れるまで十年以上の年月がたっている．この間に Gödel [51: 67]（Gödel [90: 33] も参照）では，それら $V = L$ での可測でない $\mathbf{\Delta}^1_2$ 集合の存在がただちに導けるようなもっと基本的な結果の略証が与えられている：$V = L$ なら **$\mathbf{\Sigma}^1_2$ の実数の全体の集合の整列順序が存在する**（クライゼル Kreisel [80: 197] によれば，“... ゲーデルの覚え書きによると，ω の部分集合の全体の ... 整列順序の定義が非常に単純なものであることから，非可測な実数の PCA [つまり $\mathbf{\Sigma}^1_2$] 集合が得られることに気付いたのは，彼ではなく，ポーランド学派の記述集合論の伝統にどっぷりとつかっていたウラム S. Ulam であった...”）．モストフスキーも大戦中に失われしまった原稿の中で同じ結果を確立しているが，この結果は Novikov [51] では明確に述べられていない．証明の細部はアディソン Addison [59] でやっと与えられることになるが，彼はこれを発展させて，L での射影集合の単層化問題および他の関連した問題を解決した．アディソンはクリーニ Kleene の弟子だったが，クリーニは数理論理学からの関心から，現在では，**実効的記述集合論**と呼ばれることになるものの開発に努力をそそいでいた.

クリーニは 1930 年代に帰納的関数の理論の基礎的な仕事を確立した後，彼の実効性に関する研究範囲をさらに拡張して，ω 上の関係の定義可能性の一般理論を展開した．Kleene [43] では彼は**算術的関係**を考察しているが，これは帰納的関係に数に関する量化子を適用することで得られるような関係である．標準的表現を導入することにより，彼はこれらの関係を量化子に関する複雑さの階層に分類して，これが真の階層になっていることを示した．Kleene [55, 55a, 55b] では彼は**解析的関係**，つまり算術的関係に関数に関する量化子を適用することで得られるような関係を研究している．ここでも彼は標準表現と階層に関する結果を得ており，さらに，後にススリンのボレル集合の特徴付け 12.1 の実効的なバージョンであることが分かることになる大変エレガントな定理を確立している.

クリーニがここで作りつつあったのは，後に古典的な記述集合論の実効的な内容であることが分かることになるものだったのだが，ルベーグ，ルジン，シルピンスキーが彼の仕事の直接の先駆者となっていることにクリーニ自身は気付かないでいた．彼の研究の動機は，

いずれにしてもこれとはまったく異なるものであった：彼が算術的関係を用いて行なおうとしたのは，不完全性定理の拡張で，解析的関係は彼の帰納的順序数の表記の研究を通じて生れたものであった．さらに，クリーニの仕事は，彼の帰納定理によって可能となった細かい議論を特色とし，この定理はしばしば実効的な超限帰納の方法において思いもよらない巧妙なやり方で応用されている．他方彼は，すでに Kleene [43: 50] で，古典的な記述集合論との可能なアナロジーをほのめかしている．このようなアナロジーを追究することで，モストフスキーは独立に Mostowski [47] で算術的関係に関するいくつかの結果を得ている．しかしこのアナロジーは完全なものでないことがこれに続く研究で明らかになってきている．ここで正しい相互関係を確立したのはアディソンであった：解析的関係は射影的集合に対応するもので，算術的関係はボレル階層での有限レヴェルの集合 $\bigcup_{0<n<\omega} \mathbf{\Sigma}_n^0$ が対応する．

$$\frac{\text{解析的}}{\text{射影的}} = \frac{\text{算術的}}{\text{有限レヴェルのボレル}}$$

という感じである．クリーニの仕事で ω 上の関係から ${}^\omega\omega$ 上の関係への概念の移行が行なわれたことにより，この対応関係は厳密なものとなっていることが明らかになった：Addison [58: 126] で指摘されているように，${}^\omega\omega$ での開閉集合の全体はある実数で帰納的な集合の全体と一致する (12.6(a))．もしクリーニが彼の仕事を初めからこのような観点からとらえることができていたとしたら，“解析集合” という用語を最初のうち “解析的集合” の意味で用いることはなかっただろう．後者の用語は古典的な意味での解析集合と区別がつくが，それでもいささかまぎらわしい．

実効的記述集合論の発展は，この分野に帰納的関数論の技法をそそぎこみ，定義可能性の考察をはっきりと前面に押しだすことになり，古典的な文脈で何がおこっているかをはっきりさせることに大きな寄与をはたした．古典的な問題に対し新しいアプローチの仕方が供されただけでなく，結果や問題はこれによりもっと綿密な道具立てのもとで記述することが可能になった．射影的集合と論理的な定義可能性の間に基本的な関連があることはすでに Kuratowski-Tarski [31] や Kuratowski [31] で指摘されていたが，現代的アプローチでは，実数のパラメタを注意深く扱うということが大きな違いとなっている．そこで実効的な文脈を以下で定義可能性の言葉で確立する．

記述集合論は ZF + DC のもとに展開することができる．ここに DC は 11.1 での従属選択公理である．この公理は後で強い仮説（第 6 章）の扱いで重要なものとなる．そこでは整順的であることの無限下降列の非存在による特徴付けが必要になるからである．DC から可算選択公理 AC_ω が導けることを思い出して，これをさらに実数の集合に制限した

$(\mathrm{AC}_\omega({}^\omega\omega))$ 任意の空でない実数の集合からなる可算集合は選択関数を持つ

という原理を考える．この原理を整列順序をコードする実数の集合の可算個の集まりに適用することにより ω_1 が正則基数であることが示せる．これは後で重要になるが：

この節と次の節での主な展開は $\mathrm{ZF} + \mathrm{AC}_\omega({}^\omega\omega)$ でおこなわれる．

いくつかの結果や注意では AC のもっと本格的な使用がなされるが，これは単に議論の組

み立ての必要から述べているだけのものであり，そのような個所では AC を使用していることを明示することにする．

定義可能性の文脈で

2 階の算術は 2 種の領域を持つ次のような構造

$$\mathcal{A}^2 = \langle \omega, {}^\omega\omega, ap, +, \times, exp, <, 0, 1 \rangle$$

で，ここに ω と ${}^\omega\omega$ は 2 つの互いに素な領域で，これらの領域は関数の適用という二項演算 ap: ${}^\omega\omega \times \omega \to \omega$ で

$$ap(x, m) = x(m)$$

により結びつけられているものとし，$+, \times, exp, <, 0, 1$ は通常の ω 上の算術演算で，exp は巾関数とする（伝統的には exp は基本演算としてはとられないが，これを含めることで記述の単純化をはかることができ，記述集合論に関しては，こうすることにより大きな違いは生じない）．対応する言語は，これらの演算を表す記号に加えて，2 種類の変数の集まりを持つものとする，つまり ω 上を走り $v_0^0, v_1^0, v_2^0, \ldots$ で表されるものと，${}^\omega\omega$ 上を走り $v_0^1, v_1^1, v_2^1, \ldots$ で表されるものである．これらはそれぞれ**数の量化子**と**関数の量化子**で束縛されるものとし，これをそれぞれ $\exists^0, \forall^0$ と $\exists^1, \forall^1$ で表す．**数の項**は帰納的に $0, 1, v_0^0, v_1^0, v_2^0, \ldots$ の $+, \times, exp$ の適用による閉包をとることで得られる表現，および $ap(v_i^1, \cdot)$ の形をしたものとする．このような項 τ の任意のものに対し，$(\exists^0 v_i^0 < \tau)\varphi$ で，$\exists^0 v_i^0 (v_i^0 < \tau \wedge \varphi)$ を表し，$(\forall^0 v_i^0 < \tau)\varphi$ で $\forall^0 v_i^0 (v_i^0 < \tau \to \varphi)$ を表すことにする．これらを**有界量化子**とぶ．$\mathcal{A}^2$ は，${}^\omega\omega$ が $\mathcal{P}(\omega)$ の役割を果たす完全な 2 階の構造となっている．

一般には，この構造での定義可能性の問題は任意の $r, k \in \omega$ での関係 $A \subseteq {}^r\omega \times {}^k({}^\omega\omega)$ に対し考えるこができる．$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ の場合が古典的な記述集合論で問題としているものであるが，一般の場合は実効的理論のためには不可欠である．${}^r\omega \times {}^k({}^\omega\omega)$ の元を $(r+k)$-組と見なして，

$$A(m_1, \ldots, m_r, x_1, \ldots, x_k) \quad \Leftrightarrow \quad \langle m_1, \ldots, m_r, x_1, \ldots, x_k \rangle \in A$$

の両方の書き方をすることにする．ここでは，一方では A を関係として扱い，他方では集合として扱っている．これの変形で，$r > 0$ のとき $m \in \omega$ と $\mathbf{w} \in {}^{r-1}\omega \times {}^k({}^\omega\omega)$ に対して

$$A(m, \mathbf{w})$$

というような書き方をしたときには，これは期待されるような解釈をされるものとする．このような A が $\mathcal{A}^2$ で**論理式** $\varphi(v_1^0, \ldots, v_r^0, v_1^1, \ldots, v_k^1)$ **により定義可能**とは，任意の $m_1, \ldots, m_r \in \omega$ と $x_1, \ldots, x_k \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$A(m_1, \ldots, m_r, x_1, \ldots, x_k) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}^2 \models \varphi[m_1, \ldots, m_r, x_1, \ldots, x_k]$$

となることである．ここでは論理式ではなく，それによって定義される関係に注目することになるので，以降，$\mathcal{A}^2$ の形式言語と意味論とは厳密に分けずに $\forall^0 m \exists^1 x A(m, x)$ とか

$\neg A(\mathbf{w})$ というような変な書きかたも許すことにする．

関係を量化子に関する複雑さで分類することにして，$r, k \in \omega$ と $A \subseteq {}^r\omega \times {}^k({}^\omega\omega)$ に対し，

$$A \in \Delta^0_0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ は } \mathcal{A}^2 \text{ で，すべての量化子が有界であるような論理式で定義される}$$

とおく．Δ^0_0 という用語は形容詞的あるいは形容動詞的にも使う．

列の Δ^0_0 コーディングはしばしば用いられる．記法を固定するために，p_i で $(i+1)$ 番目の素数を表すことにして，$m_0, \ldots, m_r, m, i \in \omega$ に対し，

$$\begin{aligned} \langle\!\langle m_0, \ldots, m_r \rangle\!\rangle &= p_0^{m_0+1} \cdot p_1^{m_1+1} \cdots p_r^{m_r+1}, \\ (m)_i &= \min(\{e \mid p_i^{e+2} \text{ は } m \text{ を割りきらない}\}) \end{aligned}$$

とする．これらの関数は Δ^0_0 である（ここで exp が $\mathcal{A}^2$ にとり入れられていたことがきいてくる）．さらに，$(m)_i$ はつねに定義され，$i \leq r$ に対し，$(\langle\!\langle m_0, \ldots, m_r \rangle\!\rangle)_i = m_i$ となる．§0 では ${}^{<\omega}\omega$ の枚挙 $\langle \mathbf{s}_i \mid i \in \omega \rangle$ を固定したが，以降では，

$$\mathbf{s}_i = \begin{cases} \langle m_0, \ldots, m_r \rangle & i = \langle\!\langle m_0, \ldots, m_r \rangle\!\rangle \text{ とできる場合} \\ \emptyset & \text{そうでない場合} \end{cases}$$

とすることにより，i に $\mathbf{s}_i$ のコードを対応させる写像は Δ^0_0 であるとする．

$x \in {}^\omega\omega$ と $m \in \omega$ に対し，

$$\overline{x}(m) = \langle\!\langle x(0), \ldots, x(m-1) \rangle\!\rangle \in \omega$$

とおき，$i \in \omega$ に対し，$(x)_i \in {}^\omega\omega$ を

$$(x)_i(m) = x(\langle\!\langle i, m \rangle\!\rangle)$$

で定義する．$\overline{x}$ という記法は $\mathbf{w} \in {}^r\omega \times {}^k({}^\omega\omega)$ に対し，$m \in \omega$ なら $\overline{\mathbf{w}}(m) \in {}^{r+k}\omega$ を $\mathbf{w}$ に現れるすべての $x \in {}^\omega\omega$ の形のものを $\overline{x}(m)$ で置き換えることによって得られるものとすることで，このような元に対しても拡張される．

さらに続けて，

$$A \text{ は算術的} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ は } \mathcal{A}^2 \text{ で関数の量化子を持たない論理式により定義可能}$$

とする．次の同値とこれの（両辺の否定をとることで得られる）双対命題を使うと，有界な量化子は右側に寄せることができ，同類の量化子はひとつにまとめられることが分かる：

$$\begin{aligned} (\forall^0 p < q)\exists^0 m R(p, q, m, \mathbf{w}) &\leftrightarrow \exists^0 m (\forall^0 p < q) R(p, q, (m)_p, \mathbf{w}) \\ \exists^0 m \exists^0 p R(m, p, \mathbf{w}) &\leftrightarrow \exists^0 m R((m)_0, (m)_1, \mathbf{w}) \,. \end{aligned}$$

このことから，算術的関係は $n \in \omega$ に対し，Σ^0_n と Π^0_n （太字でない！）を以下のように定義することで，階層に分類することができ，これを**算術的階層**と呼ぶ：

$$A \in \Sigma^0_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathbf{w}(A(\mathbf{w}) \leftrightarrow \exists^0 m_1 \forall^0 m_2 \ldots Q m_n R(m_1, \ldots, m_n, \mathbf{w}))\text{ , また,}$$
$$A \in \Pi^0_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathbf{w}(A(\mathbf{w}) \leftrightarrow \forall^0 m_1 \exists^0 m_2 \ldots Q m_n R(m_1, \ldots, m_n, \mathbf{w}))$$

が，ある Δ^0_0 な $R \subseteq {}^{r+n}\omega \times {}^k({}^\omega\omega)$ で成り立つこと，とする．ここに Q は最初の式では n が奇数なら $\exists^0$ で，n が偶数なら $\forall^0$ で二番目の式ではこの逆である（$\Sigma^0_0 = \Pi^0_0 = \Delta^0_0$ となるのは煩雑であるが，これはあまり問題でない）．Σ^0_n と Π^0_n は双対な集合族となっている．つまり，$A \in \Sigma^0_n \ \Leftrightarrow\ {}^r\omega \times {}^k({}^\omega\omega) - A \in \Pi^0_n$ となる；$\Sigma^0_n \cup \Pi^0_n \subseteq \Sigma^0_{n+1} \cap \Pi^0_{n+1}$ である；またこれらは用語として形容詞的あるいは形容動詞的にも用いる．

$$A \text{ は帰納的} \quad \Leftrightarrow \quad A \in \Sigma^0_1 \cap \Pi^0_1$$

とする．これは，$A \subseteq {}^r\omega$ に対しては，1930 年代に定義された帰納的集合のもとの概念と一致する（ただしこれは我々の定式化からすぐに分かることではない）．クリーニは 1950 年代に帰納的集合の理論を $A \subseteq {}^r\omega \times {}^k({}^\omega\omega)$ も含めるものに拡張した．帰納的関係で Δ^0_0 でないものは存在する，つまり，$\Sigma^0_1 \cap \Pi^0_1$ は Δ^0_0 の真の拡張となっている．

最後に

$$A \text{ は解析的} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ は } \mathcal{A}^2 \text{ で定義可能}$$

とする．次の同値式とその双対を使うと，数の量化子は右に寄せることができ，同類の関数の量化子は一つにまとめることができることが分かる：

$$(*) \qquad \begin{aligned} \forall^0 m \exists^1 x R(m, \mathbf{w}, x) &\leftrightarrow \exists^1 x \forall^0 m R(m, \mathbf{w}, (x)_m) \\ \exists^0 m \exists^1 x R(m, \mathbf{w}, x) &\leftrightarrow \exists^1 x R((x)_0(0), \mathbf{w}, (x)_1) \\ \exists^1 x \exists^1 y R(\mathbf{w}, x, y) &\leftrightarrow \exists^1 x R(\mathbf{w}, (x)_0, (x)_1)\,. \end{aligned}$$

（このうち最初のものを示すのには $\mathrm{AC}_\omega({}^\omega\omega)$ が必要となる；$(*)$ は関係の分類をするために必要であることが以下でわかってくる，特に以下に述べる 12.7 や他の重要な結果でこれが必要となる）．このことから，$n \in \omega$ に対し（細字の！）Σ^1_n と Π^1_n を以下のように定義することで，解析的関係の階層への分類が可能となる．これを解析的階層と呼ぶ：まず，帰納的な定義に先立って，

$$\Sigma^1_0 = \Sigma^0_1, \quad \Pi^1_0 = \Pi^0_1$$

とする．次に $n > 0$ に対し，

$$A \in \Sigma^1_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathbf{w}(A(\mathbf{w}) \leftrightarrow \exists^1 x_1 \forall^1 x_2 \ldots Q x_n R(\mathbf{w}, x_1, \ldots, x_n))\text{ , また,}$$
$$A \in \Pi^1_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathbf{w}(A(\mathbf{w}) \leftrightarrow \forall^1 x_1 \exists^1 x_2 \ldots Q x_n R(\mathbf{w}, x_1, \ldots, x_n))$$

が，ある算術的な $R \subseteq {}^r\omega \times {}^{k+n}({}^\omega\omega)$ に対し成り立つこととする．ここに，Q は一番目の式では n が偶数なら $\exists^1$, n が奇数なら $\forall^1$ で，二番目の式ではこの逆である．また，

$$\Delta^1_n = \Sigma^1_n \cap \Pi^1_n$$

とする．前と同じように，Σ^1_n と Π^1_n は双対な集合族となり，$\Sigma^1_n \cup \Pi^1_n \subseteq \Delta^1_{n+1}$ で，これらの用語は形容詞的あるいは形容動詞的にも用いる．ここでの用語は§0 での論理式の分類

と対応がつくが，ここでは関係を主眼としており，$\mathcal{P}(\omega)$ ではなく ${}^{\omega}\omega$ を用いていることが違っている．

上の量化子に関する同値性 (*) は**解析的階層での分類は，そこでの関係での関数の量化子とその交互の交換のみに依存する**ことを示している．この事実は度々断りなしに用いる．上のものはすでに階層の自然な記述となっていると言えるが，簡単な改良をほどこすことにより，さらに簡明な標準型を得ることができ，これが我々の Σ^1_0 と Π^1_0 の定義の正当性を立証するものとなっている：

12.4 演習 $n > 0$ を偶数とするとき，Δ^0_0 である $\hat{R} \subseteq {}^{r+k+n+1}\omega$ で，上での算術的な $R(\mathbf{w}, x_1, \ldots, x_n)$ を

$$\exists^0 m \hat{R}(m, \overline{\mathbf{w}}(m), \overline{x}_1(m), \ldots, \overline{x}_n(m))$$

で置き換えることのできるようなものが存在する．奇数 n に対しても，同様の命題が $\exists^0 m$ を $\forall^0 m$ で置き換えることで成り立つ．

ヒント n を奇数とする：したがって右端の量化子 Q は $\forall^1$ である；他の場合は否定をとることで，この場合から得られる．まず R の冠頭形による算術的な表現での数の量化子 $\forall^0 p$ を p を $x(0)$ で置き換えることによって関数の量化子 $\forall^1 x$ に変える．(*) での同値命題を用いて，このようにして新しく得られた量化子を左に寄せて，同様の量化子を一つにまとめる．これにより，R に現れたすべての $\forall^0$ は Q に吸収されたことになる．ここで残ったのは，R_0 を Δ^0_0 として $\exists^0 p R_0(p, \mathbf{w}, x_1, \ldots, x_n)$ という形をしたものとなっている．R_0 は $\mathcal{A}^2$ で有界な量化子のみを用いて定義できているから，各 p に対し，$R_0(p, \mathbf{w}, x_1, \ldots, x_n)$ の真偽は，十分に大きな $q \in \omega$ に対し，$\overline{\mathbf{w}}(q), \overline{x}_1(q), \ldots, \overline{x}_n(q)$ によって決まる．したがって，

$$\exists^0 p R_0(p, \mathbf{w}, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists^0 p \exists^0 q R_1(p, \overline{\mathbf{w}}(q), \overline{x}_1(q), \ldots, \overline{x}_n(q))$$

が，ある Δ^0_0 である R_1 によって成り立つ．ここで量化子をさらにまとめることで議論が完了する． ⊣

これで実効的（“細字”）の階層が定義できたわけであるが，これの（“太字” の）ボレル階層および射影的階層との対応関係は実数のパラメタへの**相対化**による簡単な拡張をすることにより得られる．$a \in {}^{\omega}\omega$ に対し，**a を付加した 2 階の算術**とは，拡張された構造

$$\mathcal{A}^2(a) = \langle \omega, {}^{\omega}\omega, ap, +, \times, exp, <, 0, 1, a \rangle$$

のこととする．ここに a は ω 上の二項関係と見なす．前のところで $\mathcal{A}^2$ を $\mathcal{A}^2(a)$ で置き換えることにより，対応する相対化された概念：

a で Δ^0_0
a で帰納的
a で算術的
$\Sigma^0_n(a)$, $\Pi^0_n(a)$
a で解析的
$\Sigma^1_n(a)$, $\Pi^1_n(a)$, $\Delta^1_n(a)$.

が得られる．次の容易に得られる命題は，以降いちいち断わらずに用いることにする：

12.5 演習　$a \in {}^\omega\omega$ に対し，$R \subseteq {}^r\omega \times {}^k({}^\omega\omega)$ が $\Sigma^0_1(a)$ となるのは，ある Σ^0_1 な $S \subseteq {}^r\omega \times {}^{k+1}({}^\omega\omega)$ で $\forall \mathbf{w}(R(\mathbf{w}) \leftrightarrow S(\mathbf{w}, a))$ となるものがある，ちょうどそのときである．したがって，同様の命題は Σ^0_n, Π^0_n, Σ^1_n, Π^1_n に対しても成り立つ．　$\dashv$

これによって相対化された階層を $\mathcal{A}^2$ で定義することもできることが分かるが，$\Delta^1_n(a) = \Sigma^1_n(a) \cap \Pi^1_n(a)$ となるのに対し，12.5 はそこでの Σ^0_1 を Δ^1_n で置き換えたときには成り立たないので注意が必要である．

次の命題が古典的な階層との対応関係を与える：

12.6 命題　$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ で $n > 0$ とする．このとき，

(a) $A \in \mathbf{\Sigma}^0_n$ となるのは，ある $a \in {}^\omega\omega$ に対し $A \in \Sigma^0_n(a)$ となる，ちょうどそのときである．また $\mathbf{\Pi}^0_n$ についても同様である．

(b) $A \in \mathbf{\Sigma}^1_n$ となるのは，ある $a \in {}^\omega\omega$ に対し，$A \in \Sigma^1_n(a)$ となる，ちょうどそのときである．また $\mathbf{\Pi}^1_n$ についても同様である．

証明　(a) $n = 1$ のときには，まず，$A \in \mathbf{\Sigma}^0_1$ とするとき，i を $\mathbf{s}_i \in {}^{<\omega}\omega$ に対応させる写像の Δ^0_0 コードを使って，A を構成している基本開集合の組を k 個の開集合の列にコーディングすると，これに対応する $a \in {}^\omega\omega$ により，任意の $\mathbf{w} \in {}^k({}^\omega\omega)$ に対し，

$$A(\mathbf{w}) \leftrightarrow \exists^0 m(\mathbf{w} \in O(\mathbf{s}_{a(mk)}) \times O(\mathbf{s}_{a(mk+1)}) \times \ldots \times O(\mathbf{s}_{a(mk+k-1)}))$$

となるようにできる．したがって，$A \in \Sigma^0_1(a)$ であることが分かる．逆に，ある $a \in {}^\omega\omega$ に対し，$A \in \Sigma^0_1(a)$ なら，a で帰納的な R により，任意の $\mathbf{w} \in {}^k({}^\omega\omega)$ に対し，

$$A(\mathbf{w}) \leftrightarrow \exists^0 m R(m, \mathbf{w})$$

とできる．各 m に対し，$R(m, \mathbf{w})$ の真偽はある q に対する $\overline{\mathbf{w}}(q)$ で決定される．したがって各 $R_m = \{\mathbf{w} \mid R(m, \mathbf{w})\}$ は開集合となり，$A = \bigcup_m R_m$ もそうである．

$\mathbf{\Pi}^0_n$ の場合は $\mathbf{\Sigma}^0_n$ の場合から直ちに帰結でき，$\mathbf{\Sigma}^0_{n+1}$ の場合は $\mathbf{\Pi}^0_n$ の場合から，最初の場合での証明と同様の議論により導くことができる．

(b) は，定義と 12.4 および (a) の $n = 1$ の場合から直ちに導ける．　$\dashv$

したがって，$\Sigma^0_1(a) \cap \Pi^0_1(a)$ が a で帰納的な関係の全体の族であることを使うと，前に述べた，${}^\omega\omega$ の開閉集合の全体はちょうどある実数で帰納的な集合の全体と一致する，というアディソンの言明を得ることができるわけである．ここで使ってきた $\mathbf{\Sigma}$, Σ 等々の記法は Addison [58] で上の対応関係を明示するために提唱されたものである．以降，我々は多くの場合，結果を $\Sigma^1_n(a)$ に関する実効的な形で記述するが，もちろんこのようなものから，対応する $\mathbf{\Sigma}^1_n$ に関した古典的な命題が導ける．

ボレル階層の超限レヴェル，つまり，$\alpha \geq \omega$ に対する $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ に対しても実効的なものを対応づけることができる（Hinman [78: IV§4] を参照）．${}^r\omega$ の部分集合となる関係に対しては，順序数の自然数による記法での定式化がクリーニの**超算術的階層**であった．実際，この研究が契機となってクリーニは解析的階層を定式化したのであった．古典的な文

脈では有限レヴェルのボレル階層 $\bigcup_{0<n<\omega}\mathbf{\Sigma}^0_n$ を超限レヴェルにまで拡張するとボレル集合が得られ，これはスースリンによる基本的な結果 12.1 により $\mathbf{\Delta}^1_1$ 集合の全体と一致する．実効的な文脈では，算術的集合の階層 $\bigcup_{n\in\omega}\Sigma^0_n$ を拡張すると**超算術的集合**が得られるが，これはクリーニによる 12.1 に対応する定理により，Δ^1_1 集合の全体と一致する（超算術的集合の理論に関しては，より詳しくは Sacks [90: A§II] を参照されたい）．

これで記述集合論を展開するための枠組の準備ができたので，まず古典的な結果の発展を追ってゆく．古典的な ${}^k({}^\omega\omega)$ の部分集合としての関係に主眼がおかれているが，${}^r\omega\times{}^k({}^\omega\omega)$ での関係についても記述が煩雑になるだけで，まったく同様にして得られる．

記述集合論での最初の重要なアイデアはカントルの汎用的枚挙と対角線論法の階層の超越性の証明での使用であった．ボレルは Borel [05: note III] でこのアイデアを述べており，ルベーグ Lebesgue [05] はこれを定義可能性の考察で用いて，彼の階層に関する結果を得ている．ここでは，これの集合の形によるものの応用により，射影的階層が真の階層となっていることを示す．任意の集合の族 Γ に対し，

$$\begin{aligned}&U \text{ は } \Gamma \text{ に関し汎用} \quad\Leftrightarrow\quad \text{(i) } U\subseteq {}^2({}^\omega\omega) \text{ で } U\in\Gamma\text{, かつ}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \text{(ii) 任意の } A\subseteq{}^\omega\omega \text{ に対し,}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A\in\Gamma \ \Leftrightarrow\ A=\{x\mid\langle a,x\rangle\in U\}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{が, ある } a\in{}^\omega\omega \text{ に対し成り立つ}\end{aligned}$$

とする．任意の $0<k\in\omega$ に対し ${}^k({}^\omega\omega)$ と ${}^\omega\omega$ は位相同型に同一視できるが，これにより，Γ に含まれる ${}^{k+1}({}^\omega\omega)$ の部分集合に対する汎用性が Γ に含まれる ${}^k({}^\omega\omega)$ の部分集合の場合と同様に定義できる．次の命題ではこれが用いられている．

12.7 命題 (Luzin [25c]; Sierpiński [25])．すべての $n>0$ に対し，$\mathbf{\Sigma}^1_n$ に対し汎用な Σ^1_n 集合が存在する（したがって $\mathbf{\Pi}^1_n$ に対し汎用な Π^1_n 集合も存在する）．

証明 まず $0<k\in\omega$ に対し，Σ^0_1 集合 $W_k\subseteq{}^{k+1}({}^\omega\omega)$ で ${}^k({}^\omega\omega)$ の $\mathbf{\Sigma}^0_1$ 部分集合に対し汎用なもの，つまり任意の $A\subseteq{}^k({}^\omega\omega)$ に対し，

$$A\in\mathbf{\Sigma}^0_1 \quad\Leftrightarrow\quad A=\{\mathbf{w}\mid W_k(a,\mathbf{w})\}\text{ が, ある } a\in{}^\omega\omega \text{ で成り立つ}$$

ようなものが存在することに注意する．これは 12.6 の証明でのように

$$W_k(a,\mathbf{w}) \quad\Leftrightarrow\quad \exists^0 m(\mathbf{w}\in O(\mathbf{s}_{a(mk)})\times O(\mathbf{s}_{a(mk+1)})\times\ldots\times O(\mathbf{s}_{a(mk+k-1)}))$$

とおけばよい．12.4 を思い出して，U_n を，n が偶数のときには

$$U_n(a,x) \quad\Leftrightarrow\quad \exists^1x_1\forall^1x_2\ldots\forall^1x_nW_{n+1}(a,x,x_1,\ldots,x_n)$$

で定義し，奇数のときには，$\forall^1x_n$ を $\exists^1x_n$ で置き換え W_{n+1} をこれの補集合で置き換えたものとすれば，U_n が $\mathbf{\Sigma}^1_n$ の対し汎用になることは容易に確かめられる．$\mathbf{\Pi}^1_n$ に関する括弧の中の命題は U_n の補集合により得られる． ⊣

12.8 系 各 $n>0$ に対し，$\Sigma^1_n\not\subseteq\mathbf{\Delta}^1_n$, $\Pi^1_n\not\subseteq\mathbf{\Delta}^1_n$, かつ $\Delta^1_{n+1}\not\subseteq\mathbf{\Sigma}^1_n\cup\mathbf{\Pi}^1_n$ である．

証明　ここでカントルの対角線論法を用いる．U_n を上の証明でのようにとり，$x \in {}^\omega\omega$ に対し，$D_n(x) \leftrightarrow U_n(x,x)$ とおく．このとき $D_n \in \Sigma^1_n$ だが，$D_n \notin \mathbf{\Pi}^1_n$ である：そうでないとすると，$\neg D_n = {}^\omega\omega - D_n \in \mathbf{\Sigma}^1_n$ だから，$a \in {}^\omega\omega$ で，任意の $x \in {}^\omega\omega$, に対し，$\neg D_n(x) \leftrightarrow U_n(a,x)$ となるものがある．ところがこのとき

$$\neg D_n(a) \ \leftrightarrow \ U_n(a,a) \ \leftrightarrow \ D_n(a)$$

という例により，矛盾が起こってしまう．$\Pi^1_n \not\subseteq \mathbf{\Delta}^1_n$ は $\neg D_n$ により得られ，$\Delta^1_{n+1} \not\subseteq \mathbf{\Sigma}^1_n \cup \mathbf{\Pi}^1_n$ は次のような帰納的な和を考察すればよい：

$$E_n = \{(x)^0 \mid x \in D_n\} \cup \{(x)^1 \mid x \notin D_n\}.$$

ここに，$i < 2$ に対し，$(x)^i \in {}^\omega\omega$ は，

$$(x)^i(m) = \begin{cases} i & m = 0 \text{ のとき}, \\ x(m-1) & m > 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で与えられるものとする．$D_n \in \Sigma^1_n$ で $\neg D_n \in \Pi^1_n$ だから，$E_n \in \Delta^1_{n+1}$ である．しかし，D_n と $\neg D_n$ の両方が E_n から再び得られるから，$E_n \notin \mathbf{\Sigma}^1_n \cup \mathbf{\Pi}^1_n$ となる．　$\dashv$

上の対角線論法により $\mathbf{\Delta}^1_n$ 集合で $\mathbf{\Delta}^1_n$ に対し汎用なものが存在しないことが示されていることに注意する．同様の議論を数の量化子に対して行うと，ボレル階層の有限レヴェルは真の階層になっていることが示せる．ルベーグは Lebesgue [05] で同様の議論によりボレル階層のすべてのレヴェルが真の階層となっていることを示している（彼の選択公理に対する懐疑にもかかわらず，$\mathrm{AC}_\omega({}^\omega\omega)$ が，極限順序数のところで共終な列を選ぶ操作のために必要となる）．

記述集合論での次の重要なアイデアは，集合の各要素に順序数を対応させることで，この集合を分析する，ということであった．ルベーグの論文にこのアイデア起源を見ることができるが，これは，Luzin-Sierpiński [18] で最初に応用され，解析集合に関する重要な論文である Luzin-Sierpiński [23] では，このアプローチが基本的なものとして取り扱われている．後での必要から，いくつかの用語を十分に一般的な形で確立ておく．任意の $k \in \omega$ と集合 Y に対し，

$$T \text{ は } {}^k\omega \times Y \text{ 上の木} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned}&\text{(i) } T \subseteq \textstyle\bigcup_{m \in \omega} {}^k({}^m\omega) \times {}^mY \text{, かつ} \\ &\text{(ii) } \langle t_0, \ldots, t_k \rangle \in T \text{ なら,} \\ &\qquad \text{任意の } m \le |t_0| \text{ に対し } \langle t_0|m, \ldots, t_k|m \rangle \in T\end{aligned}$$

とする（$k = 0$ のときには T が Y **上の木**とは，$T \subseteq {}^{<\omega}Y$ で Y は始片をとることに関して閉じていることとする；同様の取りきめは $Y = \emptyset$ の場合にも適用する）．したがって，T は**同じ長さ**の有限列の $(k+1)$-組からなり，始片であるという自然な順序により，§7 での意味での木となっている．$[T]$ で T の無限な枝の全体の集合を表す．したがって，

$$\langle x_0, \ldots, x_{k-1}, f \rangle \in [T] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned}&\langle x_0, \ldots, x_{k-1}, f \rangle \in {}^k({}^\omega\omega) \times {}^\omega Y \text{ かつ} \\ &\forall^0 m(\langle x_0|m, \ldots, x_{k-1}|m, f|m \rangle \in T)\end{aligned}$$

である．また，$l \leq k$ として，$\mathbf{w} = \langle x_0, \ldots, x_{l-1} \rangle \in {}^{l}({}^{\omega}\omega)$ に対し，$T_{\mathbf{w}}$ は

$$\langle t_0, \ldots, t_{k-l} \rangle \in T_{\mathbf{w}} \quad \Leftrightarrow \quad \exists^0 m(\langle x_0|m, \ldots, x_{l-1}|m, t_0, \ldots, t_{k-l} \rangle \in T)$$

で定義される ${}^{k-l}\omega \times Y$ 上の木とする．$T_{\langle x \rangle}$ を簡単に T_x と書くことにする．

次に，$\subseteq^*$ を n-組の座標ごとの包含関係で定義する．つまり，

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \subseteq^* \langle y_1, \ldots, y_n \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \text{すべての } 1 \leq i \leq n \text{ に対し } x_i \subseteq y_i \text{ となる}$$

こととする．$\subset^*$, $\supseteq^*$, $\supset^*$ は，これから自然に導かれる意味に定義する．また，$\frown^*$ を n-組の座標ごとの連結とする．つまり，

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle {\frown^*} \langle y_1, \ldots, y_n \rangle = \langle x_1 {\frown} y_1, \ldots, x_n {\frown} y_n \rangle$$

である．T の定義で $k = 0$ または $Y = \emptyset$ となっているときには，$\supset^*$ はもとの $\supset$ とする，等々．

以上の用語を用いて上のような T に関する概念をさらにいくつか導入する：まず，任意の集合 t に対し，

$$T/t = \{s \mid t {\frown^*} s \in T\}$$

とする．次に，

T が**整順的**とは $[T] = \emptyset$ となること，

つまり，座標ごとの包含関係の逆 $\supset^*$ が T 上の整順的な関係となっていることとする（この文脈で重要になるのは，無限下降列が存在しないことである．これの整順性の普通の定義との同値性の証明には，一般には DC が必要になるが，ここで主に問題となる Y は整列可能で，したがって T も整列可能となるため，DC は必要とならない）．このような T に対しては，**ランク関数** ρ_T: $T \to \mathrm{On}$ が普通のやり方で（0.3 を参照）次のように定義できる：

$$\rho_T(t) = \sup(\{\rho_T(s) + 1 \mid s \supset^* t\}),$$

ここで，$\rho_T(t) = \sup(\emptyset) = 0 \;\Leftrightarrow\; t$ は $\supset^*$ に関し極大，となることに注意する．このとき，T の**高さ**は

$$\|T\| = \mathrm{ran}(\rho_T)$$

で定義される．$\|T\|$ は順序数であることに注意する．$\|T\| = \rho_T(\langle \emptyset, \ldots, \emptyset \rangle)$ となっており，一般には $\rho_T(t) = \|T/t\|$ である．ρ_T は**順序を保存する写像** ρ: $\langle T, \supset^* \rangle \to \langle \mathrm{On}, < \rangle$，つまり，$s, t \in T$ で $s \supset^* t$ なら $\rho(s) < \rho(t)$ となるようなものの基本的な例となっている．ふたつの木 T_1, T_2 の間の**順序を保存する写像** ρ: $T_1 \to T_2$ の概念も同様に，$s, t \in T_1$ で $s \supset^* t$ なら，つねに $\rho(s) \supset^* \rho(t)$ となることとして定義される．次のものは簡単だが非常に重要なものとなっている．以降，(a) が用いられるのは Y が整列可能であるときに限る．

12.9 演習

(a) ${}^k\omega \times Y$ 上の木 T に対し，T が整順的となるのは，順序を保存する写像 ρ: $T \to \mathrm{On}$ の存在する，ちょうどそのときである．このような ρ が存在するときには，$\rho_T(t) \le \rho(t)$ がすべての $t \in T$ に対し成り立ち，ρ_T: $T \to \max(\{\omega_1, |Y|^+\})$ となる．

(b) 木 T, S に対し，順序を保存する写像 f: $S \to T$ の存在するのは，T が整順的でないか，あるいは，$\|S\| \le \|T\|$ となる，ちょうどそのときである．

ヒント　(a) については，0.3 を思い出せばよい．

(b) については，f: $S \to T$ が順序を保存し，T が整順的なら，$\rho_T \circ f$: $S \to \mathrm{On}$ も順序を保存するから，(a) により，

$$\|S\| = \rho_S(\emptyset) \le \rho_T(f(\emptyset)) \le \|T\|$$

となる．

逆については，T が整順的でないなら，T の無限な枝を一つ固定すると，S は S の各レヴェルの点をすべてこの枝の対応するレヴェルの単一の点に移すことにより順序を保存して T に写像できる．T が整順的で $\|S\| \le \|T\|$ なら，$\|T\|$ に関する帰納法により，次のように議論する：各 $\langle i \rangle \in S$ に対し $\|S/\langle i \rangle\| < \|T\|$ だから，$t_i \in T$ で $t_i \ne \emptyset$ かつ $\|S/\langle i \rangle\| \le \|T/t_i\|$ となるものがある．f_i: $S/\langle i \rangle \to T/t_i$ を順序を保存する写像として，f: $S \to T$ を

$$f(s) = \begin{cases} \emptyset & s = \emptyset \text{ のとき，かつ} \\ t_i{}^\frown f_i(\hat{s}) & s = \langle i \rangle{}^\frown \hat{s} \text{ のとき} \end{cases}$$

として定義すればよい．　⊣

木により閉集合の簡明な解析が可能となる：

12.10 命題　$C \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ に対し C が閉集合となるのは，${}^k\omega$ 上の木 T で $C = [T]$ となるものが存在する，ちょうどそのときである．

証明　記述を簡単にするために $k = 1$ とする．与えられた C に対し，

$$T = \{x|m \mid x \in C \ \wedge \ m \in \omega\}$$

とおく．したがって $C \subseteq [T]$ である．もし C が閉集合なら，任意の $y \notin C$ に対し，$m \in \omega$ で，$O(y|m) \cap C = \emptyset$ となるものがあるから，$y \notin [T]$ である．したがって $C = [T]$ が得られる．

逆に，T が ω 上の木で，$x \notin [T]$ なら，ある $m \in \omega$ で，$x|m \notin T$ が成り立つ．したがって $O(x|m) \cap [T] = \emptyset$ である．よって ${}^\omega\omega - [T]$ は開集合となる．　⊣

次の節では，まず $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の木による表現を与えて，これから導ける古典的な結果を見てゆくことにする．

§13 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合と $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合

本節では，前の節で準備した基礎の上に立って $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合と $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合の古典的な解析について述べる．前の節ですでに注意したように，ここでの展開はすべて $\mathrm{ZF} + \mathrm{AC}_\omega({}^\omega\omega)$ で実行することができる．

前の節の最後でふれた整順的な木を用いて $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の基本的な表現を与えることができる．これは，古典的な結果に，後から実効的な内容が付け加えられたものである：

13.1 定理 (Luzin-Sierpiński [23], Kleene [55]). $a \in {}^\omega\omega$ で $A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ とする．このとき，A が $\Pi^1_1(a)$ となるのは，${}^k\omega \times \omega$ 上の木 T で，任意の $\mathbf{w} \in {}^k({}^\omega\omega)$ に対し，

$$A(\mathbf{w}) \leftrightarrow T_{\mathbf{w}} \text{ は整順的}$$

となり，関係 $\{\langle i, \mathbf{w}\rangle \mid \mathbf{s}_i \in T_{\mathbf{w}}\}$ が a 上で帰納的となるようなものが存在する，ちょうどそのときである．

証明 この定理は 12.10 の系として得ることもできるが，ここでは新たに証明する．上のような表現が与えられたときには，$A(\mathbf{w})$ は次により明らかに $\Pi^1_1(a)$ となる：

$$A(\mathbf{w}) \leftrightarrow \forall^1 y \exists^0 i \exists^0 p(\mathbf{s}_i = y|p \ \wedge \ \mathbf{s}_i \notin T_{\mathbf{w}})\,.$$

逆の証明には，記述を簡単にするために $k = 1$ と仮定する．12.4 により，a で帰納的な $R \subseteq {}^3\omega$ で，任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$A(x) \leftrightarrow \forall^1 y \exists^0 m R(m, \overline{x}(m), \overline{y}(m))$$

となるものが存在する．T を “保証されていない” 列の全体からなる $\omega \times \omega$ 上の木とする：

$$T = \{\langle s,t\rangle \mid \forall^0 p < |s| + 1(\neg R(p, \langle\!\langle s(0), \ldots, s(p-1)\rangle\!\rangle, \langle\!\langle t(0), \ldots, t(p-1)\rangle\!\rangle))\}\,.$$

このとき，$A(x)$ は T_x が整順的となることと一致し，$\{\langle i, x\rangle \mid \mathbf{s}_i \in T_x\}$ は a で帰納的な関係となる． ⊣

このことにより，任意の $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合 A とこれに対応する木 T で，各 $\mathbf{w} \in A$ に対し，順序数 $\|T_{\mathbf{w}}\|$ を対応させることができる．実際には，Luzin-Sierpiński [23] では整列順序に焦点があてられ，Kleene [55] では実数の順序数の記法による定式化が用いられている．これは，両方とも実質的には木を線型に整列することで得られている．ここで使われている順序は，今日では**クリーニ=ブラウアー順序**とよばれているが，実は初期の論文にすでに現れているものである．$s, t \in {}^{<\omega}\mathrm{On}$ に対し，

$$s <_{\mathrm{KB}} t \quad \Leftrightarrow \quad s \supset t \text{ となるか，または，}$$
$$s(i) \neq t(i) \text{ となる最小の } i \text{ に対し } s(i) < t(i) \text{ が成り立つ}$$

とする．$<_{\mathrm{KB}}$ は ${}^{<\omega}\mathrm{On}$ での線型順序となっている．定義で，$s \subset t$ ではなく $s \supset t$ となっていることに注意する．この順序を銘記するには，$s <_{\mathrm{KB}} t$ となるのは $s^\frown\langle\infty, \infty, \infty, \ldots\rangle$ が辞書式順序で $t^\frown\langle\infty, \infty, \infty, \ldots\rangle$ より小さい，ちょうどそのときである，ということに注意すればよい．ここで ∞ は形式的にどの順序数より大きいものとする．

13.2 演習 (Luzin-Sierpiński [23]). T が γ 上の木のとき，T が整順的となるのは，T が $<_{\mathrm{KB}}$ に関して整列集合となる，ちょうどそのときである．したがって，13.1 で，“整順的”は，“$<_{\mathrm{KB}}$”により整列的となることで置き換えてよい．

ヒント $\langle t_i \mid i \in \omega \rangle$ を T での $<_{\mathrm{KB}}$ に関する無限下降列とする．$i > 0$ に対し t_i は空な列ではあり得ないが，$\langle t_i(0) \mid 0 < i < \omega \rangle$ は順序数の非増加列だから，ある $k_0 \in \omega$ から先，すべての $i \geq k_0$ に対し $t_i(0)$ は一定の値 $y(0)$ をとる．$t_i, i > k_0$ は長さが 1 ではあり得ないから，同様にして，ある $k_1 \in \omega, k_0 < k_1$ から先，すべての $i \geq k_1$ に対し $t_i(1)$ は一定の値 $y(1)$ をとる．同様に続けると，T が整順的でないことを示すような $y \in {}^{\omega}\omega$ が得られる． ⊣

ここでは，より直接的な記述となっている整順的関係によって述べることにする．これは，現在では整順的関係が整列性と同様に集合論の基本概念となっている，ということもあるが，むしろ，後で述べることになる一般化が，整順的なモデルとの密接な関係において得られることになるからである．

13.1 の表現から基本的な多層構造が導かれる：

13.3 命題 (Luzin-Sierpiński [18, 23]). すべての $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合は（したがってすべての $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合も）$\aleph_1$ 個のボレル集合の和集合として，あるいはまた，$\aleph_1$ 個のボレル集合の共通部分として表すことができる．

証明 $A \subseteq {}^k({}^{\omega}\omega)$ を $\mathbf{\Pi}^1_1$ として，T を 13.1 でのような ${}^k\omega \times \omega$ 上の木とする．特に，任意の $\mathbf{w} \in {}^k({}^{\omega}\omega)$ に対し，

$$A(\mathbf{w}) \ \leftrightarrow \ T_{\mathbf{w}} \ \text{は整順的}$$

である．$s \in {}^{<\omega}\omega$ と $\alpha < \omega_1$ に対し，

$$B^s_\alpha = \{\mathbf{w} \in {}^k({}^{\omega}\omega) \mid T_{\mathbf{w}}/s \ \text{は整順的で} \ \|T_{\mathbf{w}}/s\| \leq \alpha\}$$

とおく．このとき α に関する帰納法でこれらがボレル集合となることが示せる：まず

$$B^s_0 = \bigcap\nolimits_{i\in\omega}\{\mathbf{w} \in {}^k({}^{\omega}\omega) \mid s^\frown\langle i \rangle \notin T_{\mathbf{w}}\}$$

で，$s^\frown\langle i \rangle \notin T_{\mathbf{w}}$ は始片 $\overline{\mathbf{w}}(|s|+1)$ のみに依存するから，B^s_0 はボレル集合であることが分かる；実際にはさらに $\mathbf{\Pi}^0_2$ となっている．$\alpha > 0$ に対しては，ω 上の木 U が整順的で $\|U\| \leq \alpha$ となるのは，任意の $i \in \omega$ に対し，$U/\langle i \rangle$ が整順的で $\beta < \alpha$ で $\|U/\langle i \rangle\| \leq \beta$ となるものがあるときであることに注意する．したがって，

$$B^s_\alpha = \bigcap\nolimits_{i\in\omega}\bigcup\nolimits_{\beta<\alpha} B^{s^\frown\langle i \rangle}_\beta$$

となり，これは帰納法の仮定からボレル集合となることが分かる．このことから A は次のような $\aleph_1$ 個のボレル集合の和集合となることが分かる：

$$A = \bigcup\nolimits_{\alpha<\omega_1} B^{\emptyset}_\alpha \,.$$

A が $\aleph_1$ 個のボレル集合の共通部分としても表せることを示すために，$\alpha < \omega_1$ に対し，

$$C_\alpha = \{\mathbf{w} \in {}^k({}^\omega\omega) \mid (T_\mathbf{w} \text{ は整順的で } \|T_\mathbf{w}\| \le \alpha) \vee \exists s \in {}^{<\omega}\omega(T_\mathbf{w}/s \text{ は整順的で } \|T_\mathbf{w}/s\| = \alpha)\}$$

とおく．B^s_α がボレル集合であることから C_α もボレル集合であることがすぐに示せる．ここで，

$$A = \bigcap_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$$

となることを示す．$\mathbf{w} \in A$ なら，$T_\mathbf{w}$ は整順的となるから，任意の $\alpha < \omega_1$ に対し，$\|T_\mathbf{w}\| \le \alpha$ であるか，あるいは，$s \in {}^{<\omega}\omega$ で $\|T_\mathbf{w}/s\| = \alpha$ となるものがある，つまり，$\mathbf{w} \in C_\alpha$ が成り立つ．他方，$\mathbf{w} \notin A$ なら，$T_\mathbf{w}$ は整順的でない．また，任意の $s \in {}^{<\omega}\omega$ に対し，$T_\mathbf{w}/s$ が整順的で $\|T_\mathbf{w}/s\| = \beta$ となるような $\beta < \omega_1$ は高々一つしか存在しない．ところが ${}^{<\omega}\omega$ は可算だから，ある $\alpha < \omega_1$ で $\mathbf{w} \notin C_\alpha$ となるものが存在することが分かる． ⊣

ボレル集合 $B^\emptyset_\alpha$ は，解析集合に対する一般的な有界性の原理にも用いられる：

13.4 命題 (Luzin-Sierpiński [18, 23])．$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ を $\mathbf{\Pi}^1_1$ として，T を 13.1 の意味でこれに対応する ${}^k\omega \times \omega$ 上の木とする．また，$B \subseteq A$ を $\mathbf{\Sigma}^1_1$ とする．このとき，$\alpha < \omega_1$ で，

$$B \subseteq \{\mathbf{w} \in {}^k({}^\omega\omega) \mid T_\mathbf{w} \text{ は整順的で } \|T_\mathbf{w}\| \le \alpha\}$$

となるものが存在する．

証明 簡単のために $k = 1$ の場合を考察する．12.4 により，$\omega \times \omega$ 上の木 U で，$B = p[U]$ となるものが存在する．つまり，任意の $w \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$w \in B \leftrightarrow \exists^1 y(\langle w, y\rangle \in [U])$$

となる．$n \in \omega$ と $s, t, u \in {}^n\omega$ に対し，

$$B_{s,t,u} = \{w \in B \mid \langle s, t\rangle \in T \wedge s \subseteq w \wedge \exists^1 y(\langle w, y\rangle \in [U] \wedge u \subseteq y)\}$$

とする．

今，仮に $\sup(\{\|T_w\| \mid w \in B\}) = \omega_1$ だったとすると，帰納的に，すべての $n \in \omega$ に対し，$s_n, t_n, u_n \in {}^n\omega$ で，$s_n \subseteq s_{n+1}$，$t_n \subseteq t_{n+1}$，$u_n \subseteq u_{n+1}$ かつ

$$(*) \qquad \sup(\{\|T_w/t_n\| \mid w \in B_{s_n,t_n,u_n}\}) = \omega_1$$

となるようなものを定義することができる．これを見るには，$s_0 = t_0 = u_0 = \emptyset$ とおく．したがって，$B_{s_0,t_0,u_0} = B$ となるから，仮定により $n = 0$ のときに $(*)$ が成り立っている．$(*)$ が成り立つような s_n, t_n, u_n が与えられたときに，s_n, t_n, u_n を一つ先に拡張する仕方は高々可算個しかなく，$\|T_w/t_n\| = \sup(\{\|T_w/t_n{}^\frown\langle i\rangle\| + 1 \mid i \in \omega\})$ だから，続けて $s_{n+1} \supseteq s_n$，$u_{n+1} \supseteq u_n$，$t_{n+1} \supseteq t_n$ を定義して，$(*)$ で n を $n+1$ に置き換えたものが成り立つようにできる．

$w = \bigcup_n s_n$，$x = \bigcup_n t_n$，$y = \bigcup_n u_n$ とおく．このとき，$\langle w, y\rangle \in [U]$ となることは容易

に分かるから，$w \in B$ である．しかし，$x \in [T_w]$ により T_w は整順的でないから，これは矛盾である． $\dashv$

この証明はオリジナルの論文でのものである．奇妙なことに，最近の教科書では，これより間接的な次の証明が与えられている：

13.4 の別証. そうでないとして，各 $\alpha < \omega_1$ に対し，$\mathbf{w} \in B$ で $\|T_{\mathbf{w}}\| > \alpha$ となるものがあると仮定してみる．このことから，すべての実数の $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合は $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合でもあることを示すが，これは階層に関する結果 12.8 に矛盾する．そこで，$C \subseteq {}^\omega\omega$ を $\mathbf{\Pi}^1_1$ として，U を 13.1 の意味での，対応する $\omega \times \omega$ 上の木とする．したがって，任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$C(x) \;\leftrightarrow\; U_x \text{ は整順的}$$

となる．12.9(b) と B に対する仮定から，

$$C(x) \;\leftrightarrow\; \exists \mathbf{w}(B(\mathbf{w}) \;\wedge\; \exists f(f\colon U_x \to T_{\mathbf{w}} \text{ は順序を保存する写像}))$$

となるが，$\exists f \ldots$ は

$$\exists^1 y \forall^0 i \forall^0 j(\mathbf{s}_i \in U_x \;\wedge\; \mathbf{s}_j \in U_x \;\wedge\; \mathbf{s}_i \supset \mathbf{s}_j \to \\ \mathbf{s}_{y(i)} \in T_{\mathbf{w}} \;\wedge\; \mathbf{s}_{y(j)} \in T_{\mathbf{w}} \;\wedge\; \mathbf{s}_{y(i)} \supset \mathbf{s}_{y(j)})$$

として $\mathbf{\Sigma}^1_1$ の形で与えることができるから，C は $\mathbf{\Sigma}^1_1$ である． $\dashv$

13.4 から直接帰結されることの一つは，次の意味の**解析集合のボレル分離可能性** (Luzin [27: 50ff]) である：$X, Y \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ を共通部分を持たない $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合とするとき，ボレル集合 $Z \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ で，$X \subseteq Z$ かつ $Y \cap Z = \emptyset$ となるものが存在する．このことから記述集合論の出発点となった基本的な結果を示すことができる：

13.5 演習 (Suslin [17]). 実数の集合がボレル集合となるのは，これが $\mathbf{\Delta}^1_1$ となる，ちょうどそのときである．

ヒント 順方向の証明には，${}^k({}^\omega\omega)$ の $\mathbf{\Delta}^1_1$ 部分集合が σ-代数をなすことを示せばよい；可算和に関して閉じていることは，12.4 の前の量化子に関する同値性 $(*)$ により示せる． $\dashv$

本質的には，これは Luzin-Sierpiński [18] に書かれている，最初に公表されたスースリンの結果の証明と同一のものである．Luzin-Sierpiński [23] では，スースリンのものとは異なる解析集合の記述が与えられているが，これは実数を関係のコードと見なすことによるものである．我々の文脈では，任意の $x \in {}^\omega\omega$ により，

$$\langle m, n \rangle \in E_x \quad \Leftrightarrow \quad x(\langle\!\langle m, n \rangle\!\rangle) = 0$$

とすることで，ω 上の二項関係 E_x をコードすることができる．E_x が整順的なら，これは，

$$\rho_x(n) = \sup(\{\rho_x(m) + 1 \mid \langle m, n \rangle \in E_x\})$$

で ω 上に帰納的に定義されるランク関数 ρ_x を持つ．特に，$\rho_x(n) = \sup(\emptyset) = 0$ となる

のは n が E_x に関し極小であるか，あるいは n がこの関数定義域に含まれないときである（後者を含めるのは，$\mathrm{dom}(\rho_x)=\omega$ とできて都合がよいためである）．

$$\|x\| = \sup(\{\rho_x(n) \mid n \in \omega\})$$

とする．ここで，

$$\mathrm{WF} = \{x \in {}^\omega\omega \mid E_x \text{ は整順的 }\}$$

とし，$\alpha < \omega_1$ に対し，

$$\mathrm{WF}_\alpha = \{x \in \mathrm{WF} \mid \|x\| \le \alpha\}$$

とする．任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し

$$x \in \mathrm{WF} \;\leftrightarrow\; \forall^1 y \exists^0 m (x(\langle\!\langle y(m+1), y(m)\rangle\!\rangle) \neq 0)$$

となるから，WF は Π^1_1 であることが分かる．上の式はすでに 13.1 の意味での標準型となっており，対応する $\omega\times\omega$ 上の "保証されなていない" 列の全体からなる木は，

$$T^{\mathrm{WF}} = \{\langle s,t\rangle \in \textstyle\bigcup_m ({}^m\omega \times {}^m\omega) \mid$$
$$\forall^0 i < |s|-1(\langle\!\langle t(i+1), t(i)\rangle\!\rangle < |s| \to s(\langle\!\langle t(i+1), t(i)\rangle\!\rangle) = 0)\}$$

となる．$x \in \mathrm{WF}$ に対し，$\|x\| = \|T^{\mathrm{WF}}_x\|$ だから，

$$\mathrm{WF}_\alpha = \{x \in {}^\omega\omega \mid T^{\mathrm{WF}}_x \text{ は整順的で } \|T^{\mathrm{WF}}_x\| \le \alpha\}$$

となる．次は，13.3 と 13.4 での議論により容易に導ける帰結である：

13.6 演習 (Luzin-Sierpiński [23]).

(a) すべての $\alpha < \omega_1$ に対し，WF_α はボレル集合である．

(b) $B \subseteq \mathrm{WF}$ が $\mathbf{\Sigma}^1_1$ なら，$\alpha < \omega_1$ で，$B \subseteq \mathrm{WF}_\alpha$ となるものが存在する．

(c) $\mathrm{WF} \in \Pi^1_1 - \mathbf{\Sigma}^1_1$ である． ⊣

Spector [55] では，（細文字の）Σ^1_1 集合に対する整列順序による (b) の実効的なバージョンで，ω_1 を

$$\omega_1^{\mathrm{CK}} = \sup\{\|x\| \mid x \in \mathrm{WF} \;\wedge x \text{ （のコードする）グラフは帰納的 }\}$$

で置き換えた形のものが示されている．この Σ^1_1 での有界性の定理は超算術的階層の理論のかなめとなる（Sacks [90: A§II] を参照）．

(c) は $\mathbf{\Pi}^1_1 - \mathbf{\Sigma}^1_1$ の元の自然な例を与えるものとなっている．13.4 の最初の証明を用いると，$\mathbf{\Pi}^1_1 - \mathbf{\Sigma}^1_1 \neq \emptyset$ へのこのアプローチは，12.8 での対角化論法に依存しないものとなっていることに注意する．13.1 により，任意の $\Pi^1_1(a)$ 集合 $A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ に対し，（そのグラフが） a で帰納的な関数 $f\colon {}^k({}^\omega\omega) \to {}^\omega\omega$ で $A = f^{-1}(\mathrm{WF})$ となるものが存在する．したがって，WF はこの意味での $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の還元可能性に関し，"完全" なものとなっている．WF や (a) の対応するものはすでに Lebesgue [05] に現れているが，先に述べた重大な考え違いから，ルベーグは (c) を得ることはできず，このことがスースリンによる解析集合

の発見をうながしたのであった．

マズルキエヴィッチ Mazurkiewicz [36] は，$\mathbf{\Pi}^1_1 - \mathbf{\Sigma}^1_1$ の元の例で，より数学的なものを与えている．$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続関数は有理数での値によって決定されるので，そのような関数は開集合のコードを導入したときと同じように ${}^\omega\omega$ の元で組織的にコーディングできる（11.8 の前を参照）．マズルキエヴィッチは

$$\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は微分可能}\} \in \mathbf{\Pi}^1_1 - \mathbf{\Sigma}^1_1$$

を証明している．この方向の最近の結果に関しては Becker [92] を参照されたい．

射影的階層の 2 番目のレヴェルに関する最初の重要な結果は，次のような 13.3 の一部分の一般化であった：

13.7 命題　(Sierpiński [25]). $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合はすべて $\aleph_1$ 個のボレル集合の和集合となる．

2 つの証明を与える；最初のものはオリジナルの証明で，AC を用いており，2 番目のもの（13.14 の後を参照）は，これを用いないものとなっている．

13.7 の最初の証明　$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ を $\mathbf{\Sigma}^1_2$ として，$B \subseteq {}^{k+1}({}^\omega\omega)$ を $\mathbf{\Pi}^1_1$ で，任意の $\mathbf{w} \in {}^k({}^\omega\omega)$ に対し

$$A(\mathbf{w}) \leftrightarrow \exists^1 y B(\mathbf{w}, y)$$

となるものとする．13.3 により，ボレル集合を C_α 選んで，$B = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$ とできる．したがって，

$$\begin{aligned} A(\mathbf{w}) &\leftrightarrow \exists^1 y \exists \alpha < \omega_1 C_\alpha(\mathbf{w}, y) \\ &\leftrightarrow \exists \alpha < \omega_1 \exists^1 y\, C_\alpha(\mathbf{w}, y) \end{aligned}$$

である．各 $\alpha < \omega_1$ に対し，$D_\alpha = \{\mathbf{w} \in {}^k({}^\omega\omega) \mid \exists^1 y C_\alpha(\mathbf{w}, y)\}$ は $\mathbf{\Sigma}^1_1$ となるから，ふたたび 13.3 により，ボレル集合 E^α_ξ を選んで $D_\alpha = \bigcup_{\xi<\omega_1} E^\alpha_\xi$ とできる（各 $\alpha < \omega_1$ に対し集合族 $\{E^\alpha_\xi \mid \xi < \omega_1\}$ を選ぶところで AC が必要となる）．したがって，

$$A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \bigcup_{\xi<\omega_1} E^\alpha_\xi$$

である．　$\dashv$

ボレル集合のすべてが完全集合の性質を持っていることから（12.2(c) を参照），**すべての $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合は濃度が高々 $\aleph_1$ であるか，または完全集合を部分集合として含み，したがって濃度 $2^{\aleph_0}$ となる**ことが導かれることを，シルピンスキーは注意している（この結果を現代的な観点からさらに改良したものを 14.9 で述べる）．

$\mathbf{\Pi}^1_1$ と $\mathbf{\Sigma}^1_2$ に関する古典的な結果はすべて（もちろん，当初は実効的な内容を除いた形のものであったが）上で述べたアイデアにより得られていて，当時非常に難しいものとみなされていた近藤の $\mathbf{\Pi}^1_1$ 単層化定理（13.17 を参照）が，$\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の古典的手法による研究方向での頂点となった．13.7 は射影的集合の分析をボレル集合の和の形に還元するという研究の指針となった．ここで少し脱線して，この方向の仕事のコーエン以降の時代での進展を見てみることにする：

任意の濃度 $\aleph_1$ 実数の集合は，その各元のみからなる集合の和集合として，$\aleph_1$ 個のボレル集合の和集合となっているから，ZFC + CH では，13.7 の逆：

任意の $\aleph_1$ 個のボレル集合の和集合は $\mathbf{\Sigma}^1_2$ となる

は成り立たない．それにもかかわらず，ルジン Luzin [35] はこの命題が成立することの可能性を考察している．実際，この命題は ZFC + MA + $\neg$CH + $\exists a \in {}^\omega\omega(\omega_1^{L[a]} = \omega_1)$ から導かれる (Martin-Solovay [70: §3])．この結果により，すべての $\mathbf{\Pi}^1_2$ 集合は $\aleph_1$ 個のボレル集合の和集合となる，という命題が ZFC で証明できないことも分かる．ソロヴェイは，$2^{\aleph_0}$ が大きく，かつ，$2^{\aleph_0}$ より少ない数のボレル集合の和集合とは表せないような $\mathbf{\Pi}^1_2$ 集合が存在する，という命題の無矛盾性を示している．

任意の実数の集合に関しては，レヴィとソロヴェイは Levy-Solovay [72] で，はじめて，ZFC + $\neg$CH から実数の集合で $\aleph_1$ 個のボレル集合の和集合とならないものの存在が導かれることを証明し，さらに，これには AC の本質的な使用が不可欠であることを示している：彼等はソロヴェイのルベーグ可測性の議論（11.11 を参照）により，Con(ZFC + $\exists\kappa$(κ は到達不可能基数)) から，Con(ZFC + $\neg$CH +「すべての ${}^\omega$On-定義可能な実数の集合は $\aleph_1$ 個のボレル集合の和集合となる」) が導かれることを示し，さらに内部モデルに移行することにより，Con(DC + $\omega_1 \not\leq 2^{\aleph_0}$ +「すべての実数の集合は $\aleph_1$ 個のボレル集合の和集合と表せる」) を示している．ZF + AD（決定性の公理）という，これとはまた別系統の設定においては，13.7 の逆が成り立つ．のみならず，射影的階層全体に対して，この命題の非常にエレガントな拡張が得られる（30.20 を参照）．

L での正則性

次に L でのゲーデルの限定的な結果について述べる．現代的な理論で目につくことの一つは，実数を可算モデルのコードと見なして扱う方法である．任意の $x \in {}^\omega\omega$ は前にも述べたように，$E_x = \{\langle m, n\rangle \mid x((m, n)) = 0\}$ で二項関係をコードするから，これにより，集合論の言語 $\mathcal{L}_\in$ の構造

$$M_x = \langle \omega, E_x \rangle$$

がコードされることになる．M_x が整順的で外延的なら，崩壊の補題 0.4 により，これに対し推移的崩壊 $\mathrm{tr}(M_x)$ と同型写像

$$\pi_x \colon M_x \to \mathrm{tr}(M_x)$$

が一意に決まる．論理式 φ と $s \in {}^{<\omega}\omega$ に対し，

$$M_x \models \varphi[s]$$

と書くときには，φ は高々 $v_0, \ldots, v_{|s|-1}$ を自由変数として持つものと仮定し，変数 v_i に $s(i)$ を割り当てたとき φ が M_x で成り立つ，という意味とする．ここでは暫定的に論理式 φ のゲーデル数 $\ulcorner\varphi\urcorner \in \omega$ をある固定された帰納的な $\mathcal{L}_\in$ の算術化によるものとし，任意の論理式の集まり Φ に対し $\ulcorner\Phi\urcorner \colon \omega \to 2$ を，$\ulcorner\Phi\urcorner(m) = 1 \iff$ ある $\varphi \in \Phi$ に対し $m = \ulcorner\varphi\urcorner$ となる，として定義する．

13.8 命題

(a) 任意の $n \in \omega$ に対し，

$$\{\langle m, i, x\rangle \in {}^2\omega \times {}^\omega\omega \mid m = \ulcorner\varphi\urcorner \ \wedge\ \varphi \text{ は } \Sigma_n \ \wedge\ M_x \models \varphi[\mathbf{s}_i]\}$$

は算術的となる．実際，これは $n > 0$ のときには Σ^0_n となる．

(b) 任意の $\mathcal{L}_\in$ の文の集まり Φ に対し，$\{x \in {}^\omega\omega \mid M_x \text{ は } \Phi \text{ のモデルとなる }\}$ は $\Delta^1_1(\ulcorner\Phi\urcorner)$ である．

(c) $a \in {}^\omega\omega$ で，M_a が整順的で外延的なら，

$$\{\langle m, x\rangle \in \omega \times {}^\omega\omega \mid \pi_a(m) = x\}$$

は a で算術的となる．

証明 (a) と (b) は充足関係の算術化から得られる．最初のものは，§0 で与えた $\models^n_M$ の定義をたどりながら帰納的に議論することで得られる．二番目のものは，充足関係の Δ^{ZF}_1 定義可能性を集合構造に焼き直すことで得られる（Devlin [84: 41] または Drake [74: 92] を参照）．

(c) については，(a) と ω の各元の集合論での定義を用いると，

$$\{\langle i, p\rangle \ \in {}^2\omega \mid \pi_a(i) = p\}$$

が a で算術的であることがただちにに分かる．したがって，ϕ を論理式 $\langle v_0, v_1\rangle \in v_2$ とすると，すべての $m \in \omega$ と $x \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$\pi_a(m) = x \ \leftrightarrow \forall^0 p \forall^0 q(x(p) = q \ \leftrightarrow\ \exists^0 i \exists^0 j(\pi_a(i) = p \wedge \pi_a(j) = q \wedge M_a \models \phi[i, j, m]))$$

となり，問題としている関係が a で算術的であることが分かる． ⊣

(c) での関係が $\Pi^0_2(a)$ となることも容易に確かめられる．

3.3(a) により，文 σ_0 で，任意の推移的な σ_0 の集合モデル N に対し，ある極限順序数 $\delta > \omega$ で $N = L_\delta$ となるようなものが存在し，論理式 $\varphi_0(v_1, v_2)$ で，L の整列順序を定義し，任意の極限順序数 $\delta > \omega$ と $x, y \in L_\delta$ に対し，$x <_L y \ \Leftrightarrow\ L_\delta \models \varphi_0[x, y]$ となるようなものがとれる．L で CH が成り立つことの証明から，整列順序

$${}^2({}^\omega\omega) \cap <_L = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in {}^\omega\omega \cap L \ \wedge\ x <_L y\}$$

は順序型 ω^L_1 を持つことが分かる．

13.9 定理 (Gödel [51: 67]). ${}^\omega\omega \cap L$ と ${}^2({}^\omega\omega) \cap <_L$ は共に Σ^1_2 である．

証明 この整列順序を直接書き下すと，任意の $x, y \in {}^\omega\omega \cap L$ に対し，

$$\begin{aligned} x \ <_L y \ \leftrightarrow \exists^1 z \exists^0 p \exists^0 q(&M_z \text{ は整順的かつ外延的} \\ &\wedge \pi_z(p) = x \ \wedge\ \pi_z(q) = y \ \wedge\ M_z \ \models \sigma_0 \wedge \varphi_0[p, q]) \end{aligned}$$

となるが，13.8 により，これは Σ^1_2 である． ⊣

13.10 系 ${}^\omega\omega \subseteq L$ なら，${}^2({}^\omega\omega) \cap <_L$ はルベーグ可測でなく，ベールの性質を持たない Δ^1_2 集合となっている．

証明 ${}^\omega\omega \subseteq L$ により，${}^2({}^\omega\omega) \cap <_L$ は実数の全体の上の整列順序となっている．したがって，これは Δ^1_2 であることが分かる：任意の $x, y \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$x <_L y \ \leftrightarrow \ x \neq y \ \wedge \ \neg(y <_L x)$$

となるからである．${}^2({}^\omega\omega) \cap <_L$ がルベーグ可測だったとして矛盾を導く．すべての $y \in {}^\omega\omega \cap L$ に対し，$\{x \in {}^\omega\omega \cap L \mid x <_L y\}$ は可算だから零集合である．したがって，フビニの定理 0.10 により，${}^2({}^\omega\omega) \cap <_L$ も零集合となる．ところが，同じ議論により，補集合 $\{\langle x, y\rangle \in {}^2({}^\omega\omega) \cap L \mid y <_L x \vee x = y\}$ も零集合となることが分かるから，これは矛盾である．同じ議論でクラトフスキー=ウラムの定理 0.13 を用いると，${}^2({}^\omega\omega) \cap <_L$ はベールの性質も持たないことが分かる． ⊣

ゲーデルは Gödel [38] でルベーグ測度に関する結果を予告している；ベールの性質に関する結果が初めて明確に記述されたのは Mycielski [64: 216] においてであるようである．この結果の次の精密化は，${}^2({}^\omega\omega) \cap <_L$ は Σ^1_2-**善良**な整列順序であるという言い方を確立するものであるが，これにより L における記述集合論での結果がさらに得られることになる．

13.11 演習 (Addison [59]).

$$\mathrm{IS}_L(x, y) \ \leftrightarrow \ \{(x)_i \mid i \in \omega\} = \{z \in {}^\omega\omega \mid z <_L y\}$$

で定義される関係 $\mathrm{IS}_L \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ は Σ^1_2 である．

ヒント 13.9 と同様の議論で示せる． ⊣

完全集合の性質に関するゲーデルの限定的な結果はもう少しやっかいなものになる．ゲーデルはこの証明をついに発表しなかったが，他の論文に現れた証明はどれも $\mathbf{\Pi}^1_1$ 単層化に依存するものとなっている．ゲーデルは，レヴィに次のような鋭い論法を教えているが，これは，より一般的な応用の可能なものである (20.21); ソロヴェイも本質的に同じ議論を発見している（Silver [71b: 440] を参照）．これは 13.8 の前で復習した σ_0 と φ_0 の 3.3(a) で述べた性質のみから証明することができる．

13.12 定理 $\omega_1^L = \omega_1$ とする．このとき，実数の Π^1_1 集合で，完全集合の性質を持たないものが存在する．

証明 証明のアイデアは，ω_1^L より小さな順序数を一意的にコーディングする Π^1_1 集合を得ることである．このような順序数 α に対し，$x_0 \in {}^\omega\omega \cap L$ で，M_{x_0} が順序型 α を持つようなものが存在する．そのような x_0 のうち $<_L$ で最小となるものを指定することは，Π^1_1 ではできない．しかし，ある $x_1 \in {}^\omega\omega \cap L$ に対し，ある極限順序数 $\delta > \omega$ で $M_{x_1} \cong \langle L_\delta, \in\rangle$ となり，$x_0 \in L_\delta$ が上のような意味で $<_L|(L_\delta \times L_\delta)$ に関し最小となっており，δ はこのようにできるもののうち最小である，という主張は Π^1_1 で表現できる．ここで再び $<_L$ で最

小な x_1 は Π^1_1 でないが，これは，M_{x_2} を用いることで指定することができる，等々．こうやって得られる $\langle x_i \mid i \in \omega\rangle$ を α の一意的に決まるコードとして用いることができる．

$k \in \omega$ と $x \in {}^\omega\omega$ に対し，$M_x|k$ を k によって決まる M_x の始片とする．つまり，

$$D_{x,k} = \{n \mid x(\langle\!\langle n,k\rangle\!\rangle) = 0\}\ ,$$
$$M_x|k = \langle D_{x,k}, E_x|(D_{x,k} \times D_{x,k})\rangle$$

とおく．各 $x \in {}^\omega\omega$ は可算列 $\langle (x)_i \mid i \in \omega\rangle$ をコードしたことを思い出すと，上の記述は次のような ${}^\omega\omega$ 上の関係として定式化できる：

$$\begin{aligned}A(x)\ \leftrightarrow\ & M_{(x)_0}\ \text{は整列されている}\\ & \wedge\ \forall^0 i[M_{(x)_{i+1}}\ \text{は整順的かつ外延的}\\ & \qquad \wedge\ M_{(x)_{i+1}} \models \sigma_0\ \wedge\ (x)_i \in \mathrm{tr}(M_{(x)_{i+1}})\\ & \qquad \wedge\ \forall^0 k(M_{(x)_{i+1}}|k \models \sigma_0 \to (x)_i \notin \mathrm{tr}(M_{(x)_{i+1}}|k))\\ & \qquad \wedge\ \forall^1 y \forall^0 p \forall^0 q[\pi_{(x)_{i+1}}(p) = y\ \wedge\ \pi_{(x)_{i+1}}(q) = (x)_i\\ & \qquad\qquad\qquad \wedge\ M_{(x)_{i+1}} \models \varphi_0[p,q]\ \to\ M_y \not\cong M_{(x)_i}]]\ .\end{aligned}$$

$M_y \not\cong M_{(x)_i}$ であることは Π^1_1 の命題 $\forall^1 f(f$ は同型写像 $M_y \cong M_{(x)_i}$ をコードしない$)$ として述べられるから（13.4 の二番目の証明を参照），13.8(a)(c) を適用して，量化子を分析することで，A は Π^1_1 であることが分かる．

$A(x)$ なら，対応する ω^L_1 未満の順序数の列 $\langle \alpha^x_i \mid i \in \omega\rangle$ があるが，3.3(a) での，σ_0 と φ_0 の性質を用いると，

(a) $M_{(x)_0}$ は順序型 α^x_0 を持ち，各 $i \in \omega$ に対し，$M_{(x)_{i+1}} \cong \langle L_{\alpha^x_{i+1}}, \in\rangle$ となり，α^x_{i+1} は $(x)_i \in L_{\alpha^x_{i+1}}$ となる最小の極限順序数 $> \omega$ である．

(b) 各 $i \in \omega$ に対し，$y <_L (x)_i$ が（$L_{\alpha^x_{i+1}}$ したがって，L で）成り立つなら，$M_y \not\cong M_{(x)_i}$．

さらに，任意の $\alpha < \omega^L_1$ に対し，$x \in {}^\omega\omega$ で $A(x)$ かつ $\alpha^x_0 = \alpha$ となるものが一意に存在することも容易に確かめられる．したがって，A は濃度 $|\omega^L_1|$ の Π^1_1 集合となっている．

A は完全集合の性質を持たない；実際，任意の A の $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 部分集合 B は可算となる：$B' = \{(x)_0 \mid x \in B\}$ は再び $\mathbf{\Sigma}^1_1$ となる．よって，13.6 により，$B' \subseteq \mathrm{WF}$ となっていることから，ある $\beta < \omega_1$ に対し，$B' \subseteq \mathrm{WF}_\beta$ が成り立つ．したがって，コーディングの一意性から，$|B| \leq |\beta|$ となる．

最後に $\omega^L_1 = \omega_1$ の仮定により，A は非可算であるから証明が完了する．　⊣

Guaspari [73], Kechris [75], Sacks [76] では独立に，

$$C_1 = \{x \in {}^\omega\omega \mid x \in L_{\omega^x_1}\}$$

は濃度 $|\omega^L_1|$ で，完全な部分集合を持たないものとなっていることが示されている．ここに ω^x_1 は x で帰納的でない最小の順序数である．さらに，任意の Π^1_1 集合で完全な部分集合を持たないようなものは C_1 の部分集合になることが示されており，ケクリス Kechris [75] は強い仮定のもとに，さらに射影的階層での詳しい分析をおこなっている．

任意の $a \in {}^\omega\omega$ に対し，$L[a]$ には標準的な整列順序 $<_{L[a]}$ で $<_L$ と類似の性質のものがあるので，13.8-13.12 は—，すべて $L[a]$ と $\Pi^1_1(a)$, $\Delta^1_2(a)$, $\Sigma^1_2(a)$ 集合に対する対応する結果に相対化できる．さらに，この相対化は一様であり，例えば $\{\langle x, a\rangle \in {}^2({}^\omega\omega) \mid x \in L[a]\}$ は Σ^1_2 となる．

$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合の分析

$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合の木による基本的な表現は，Shoenfield [61] にその原形が見いだされるが，これは $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合の正則性の研究での重要な技法となった．これは，強い仮説のもとでのすべての射影的集合の同様な表現の研究へと発展することになるので，このことを考慮して一般的な枠組での記述を与えることにする．集合 B の射影は，$pB = \{x \mid \exists y(\langle x, y\rangle \in B)\}$ と定義されていたことを思い出そう．$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ と集合 Y に対し，

$$A \text{ は } Y\text{-スースリン} \quad \Leftrightarrow \quad {}^k\omega \times Y \text{ 上の木 } T \text{ で } A = p[T] \text{ となるものが存在する}$$

とする．これは我々の木に関する用語を用いると，さらに，$\mathbf{w} \in {}^k({}^\omega\omega)$ に対し，

$$\begin{aligned} A(\mathbf{w}) &\leftrightarrow [T_{\mathbf{w}}] \neq \emptyset \\ &\leftrightarrow T_{\mathbf{w}} \text{ は整順的でない} \end{aligned}$$

となる．${}^k({}^\omega\omega) \times {}^\omega Y$ 上の自然な位相に関して，この部分集合 C が閉集合となるのは，${}^k\omega \times Y$ 上の木 T で $C = [T]$ となるものが存在する，ちょうどそのときである（12.10 の証明を参照）．したがって，Y-スースリンであるという性質は解析集合であるということの拡張となっている．ここでは ω を何か別の Y で置き換える必要があるわけだが，このような表現はいくつもの重要な帰結をもたらす（例えば§30 を参照）．このことを事前にふまえて，

$$A \text{ はスースリン} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ はある集合 } Y \text{ によって } Y\text{-スースリンとなる}$$

ということにする．以下の命題は議論の基礎となる．(c) と (d) 以外の証明では AC が本質的に必要となる．

13.13 命題 $A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ とする．このとき：

(a) A は Y-スースリン $\Leftrightarrow$ A は $|Y|$-スースリン．

(b) A は $2^{\aleph_0}$-スースリンである．

(c) A は ω-スースリン $\Leftrightarrow$ A は $\mathbf{\Sigma}^1_1$.

(d) $k > 1$ で A が κ-スースリンなら，pA も κ-スースリンとなる．したがって，$n \in \omega$ に対しすべての $\mathbf{\Pi}^1_n$ 集合が κ-スースリンなら，すべての $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ 集合もそうである．

(e) 各 $\xi < \kappa$ に対し，A_ξ が ${}^k({}^\omega\omega)$ の κ-スースリンな部分集合なら，$\bigcup_{\xi<\kappa} A_\xi$ もそうである．

(f) (Martin) すべての $n > 0$ に対し，A は ω_n-スースリン $\Leftrightarrow$ A は $\aleph_n$ 個のボレル集合の和集合となる．

(g) $B \subseteq {}^l({}^\omega\omega)$ を Y-スースリンとして，f: ${}^k({}^\omega\omega) \to {}^l({}^\omega\omega)$ は連続関数で $A = f^{-1}(B)$

となっているとする．このとき A も Y-スースリンとなる．

証明　(a) Y の濃度のみが問題となることは明らかである．Y から $|Y|$ への全単射から対応する木の間の同型写像が惹き起こされるからである．

(b) $A \neq \emptyset$ として，$A = \{a_\xi \mid \xi < 2^{\aleph_0}\}$ とする．このとき，

$$T = \{\langle a_\xi|m, m \times \{\xi\}\rangle \mid m \in \omega\}$$

とすれば，$A = p[T]$ となる．

(c) は 12.10 と解析集合の定義から導くことができる；13.1 を参照．

(d) ${}^k\omega \times \kappa$ 上の木 T が $A = p[T]$ を満たすとすると．この木を ${}^{k-1}\omega \times (\omega \times \kappa)$ 上の木 T' と捉えなおすと，$pA = p[T']$ となる．ここで $\omega \times \kappa$ から κ への全単射を用いることにより，命題は (a) から導かれる．

(e) 各 $\xi < \kappa$ に対し，${}^k\omega \times \kappa$ 上の木 T^ξ で $A_\xi = p[T^\xi]$ となるものが存在するとする．$z \in {}^\omega\kappa$ に対し，$z^+ \in {}^\omega\kappa$ を $z^+(i) = z(i+1)$ により定義する．${}^k\omega \times \kappa$ 上の木 T を

$$[T] = \{\langle \mathbf{w}, y\rangle \mid \langle \mathbf{w}, y^+\rangle \in T^{y(0)}\}$$

となるようなものとする．このとき，

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \in \textstyle\bigcup_{\xi<\kappa} A_\xi &\leftrightarrow \exists\xi < \kappa \exists y(\langle \mathbf{w}, y\rangle \in [T^\xi]) \\ &\leftrightarrow \exists z(\langle \mathbf{w}, z^+\rangle \in [T^{z(0)}]) \\ &\leftrightarrow \exists z(\langle \mathbf{w}, z\rangle \in [T]) \end{aligned}$$

となる．

(f) 逆方向については，(c) と (e) から，κ 個のボレル集合の和集合は κ-スースリンであることが分かる．順方向の証明は，n に関する帰納法で行う：$n > 0$ で，T は ${}^k\omega \times \omega_n$ 上の木で $A = p[T]$ となっているとする．各 $\gamma < \omega_n$ に対し $T^\gamma = T \cap ({}^k({}^{<\omega}\omega) \times {}^{<\omega}\gamma)$ とする．このとき，$\mathrm{cf}(\omega_n) > \omega$ により，$A = \bigcup_{\gamma<\omega_n} p[T^\gamma]$ となる．ところが，(a) により，各 $p[T^\gamma]$ は ω_{n-1}-スースリンである．$n = 1$ のときには (c) と 13.3 により，$p[T^\gamma]$ は $\aleph_1$ 個のボレル集合の和集合となる．$n > 1$ なら，帰納法の仮定により，$p[T^\gamma]$ は $\aleph_{n-1}$ 個のボレル集合の和集合となっている．したがって，いずれの場合にも A は $\aleph_n$ 個のボレル集合の和集合であることが分かる．

(g) 記述を簡単にするために，$k = l = 1$ と仮定する．f が連続であることから，すべての $t \in {}^{<\omega}\omega$ に対し，$s \in {}^{<\omega}\omega$ で，$O(s) \subseteq f^{-1}(O(t))$ となるものが存在する．これの一種の逆が必要になるわけだが，すべての $s \in {}^{<\omega}\omega$ に対し，

$$W_s = \{t \in {}^{<\omega}\omega \mid O(s) \subseteq f^{-1}(O(t))\}$$

は $\emptyset$ を含んでいるから，空でなく，また，$t, \bar{t} \in W_s$ なら，$t \subseteq \bar{t}$ か $\bar{t} \subseteq t$ かのどちらかであることに注意する．よって，$|t| \leq |s|$ となるようなもののうち最大の $t \in W_s$ がとれるが，これを $\theta(s)$ とおく．

任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$f(x) = \textstyle\bigcup_{m\in\omega} \theta(x|m)$$

が成り立つ．$\supseteq$ は θ の定義からただちに分かる．$\subseteq$ の方向を示すために，$n \in \omega$ とする．f は連続で，$x \in f^{-1}(O(f(x)|n))$ だから，$m \in \omega$ で，$O(x|m) \subseteq f^{-1}(O(f(x)|n))$ となるものがある．このような $m \geq n$ の 1 つをとると，$f(x)|n \subseteq \theta(x|m)$ となる．

ここで，$\omega \times Y$ 上の木 T により $B = p[T]$ となっているとして，S を

$$S = \{\langle s, u\rangle \mid |s| = |u| \ \wedge \ \langle \theta(s), u||\theta(s)|\rangle \in T\}$$

によって定義される $\omega \times Y$ 上の木とする．このとき，すべての $x \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$\begin{aligned} x \in p[S] &\leftrightarrow \ \exists g \in {}^\omega Y(\langle x, g\rangle \in [S]) \\ &\leftrightarrow \ \exists g \in {}^\omega Y \forall^0 m(\langle \theta(x|m), g||\theta(x|m)|\rangle \in T) \\ &\leftrightarrow \ \exists g \in {}^\omega Y(\langle f(x), g\rangle \in [T]) \\ &\leftrightarrow \ f(x) \in p[T] \\ &\leftrightarrow \ x \in A \end{aligned}$$

となる．　$\dashv$

ZF を基礎となる理論として，これの外側の AC の使用は，例えば (a) では Y が整列可能であるという仮定を加え，(c) では 木の族 $\langle T^\xi \mid \xi < \kappa\rangle$ があらかじめ与えられている仮定することで明確化できる．(f) は ZFC での構成原理であり，これは後で応用される (15.13)．(b) は，はったりで，本来の関心は定義可能で一様性の性質を持つ木による，ZF で確立することのできるスースリンの表現可能性にある（これは§15 でより明らかになる）．(c) を出発点として，シェーンフィールドは $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合に対して，このような表現を与えている：

13.14 定理　(Shoenfield [61])．すべての $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合は ω_1-スースリンである．特に，$a \in {}^\omega\omega$ で，$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ が $\Sigma^1_2(a)$ のときには，${}^k\omega \times \omega_1$ 上の木 $U \in L[a]$ で，$A = p[U]$ となるものが存在する．

証明　まず A が $\Pi^1_1(a)$ の場合に定理を証明する．記述を簡単にするために $k = 1$ として，13.1 により，$\omega \times \omega$ 上の木 $T \in L[a]$ で，任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$A(x) \ \leftrightarrow \ T_x \ \text{は整順的}$$

となるものをとる．このことから，12.9(a) により，

$$A(x) \ \leftrightarrow \ \exists g(g\colon T_x \to \omega_1 \ \text{は順序を保存する写像})$$

となる．

このことは，別の木での無限枝を得ることとして，捉えなおすことができる．${}^{<\omega}\omega$ の枚挙 $\langle \mathbf{s}_i \mid i \in \omega\rangle$ で $|\mathbf{s}_i| \leq i$ となるものが固定されていたことを思い出して，$\omega \times \omega_1$ 上の木 $\hat{T}$ を

$$\hat{T} = \{\langle s, u\rangle \mid \forall i, j < |s|(\mathbf{s}_i \supset \mathbf{s}_j \ \wedge \ \langle s||\mathbf{s}_i|, \mathbf{s}_i\rangle \in T \to u(i) < u(j))\}$$

で定義する．$\hat{T}$ は T と ω_1 から定義できるから，$\hat{T} \in L[a]$ となり，任意の $x \in {}^\omega\omega$ に

対し，

$$\begin{aligned} A(x) &\leftrightarrow\ \exists g \in {}^{\omega}\omega_1(\langle x, g\rangle \in [\hat{T}]) \\ &\leftrightarrow\ x \in p[\hat{T}] \end{aligned}$$

となることも容易に分かる．$\Sigma^1_2(a)$ 集合に対する完全な結果は 13.13(d) の証明で $L[a]$ での全単射 $\omega \times \omega_1 \leftrightarrow \omega_1$ を用いることで得られる．　⊣

ここで強調しておくと，上の結果での ω_1 は V での意味のものであり，$\omega_1^{L[a]}$ と等しいとは限らない．AC を用いる文脈では，これの逆である

すべての ω_1-スースリン集合は $\mathbf{\Sigma}^1_2$ である

は,（13.7 の後で述べた）“任意の $\aleph_1$ 個のボレル集合の和集合は $\mathbf{\Sigma}^1_2$ である” という命題の議論と，この命題との関係を与える 13.13(f) により，独立な命題となる．

13.14 での表現を用いると，古典的な命題である 13.7 を AC を用いずに証明できる：

13.7 の二番目の証明　$A \subseteq {}^k({}^{\omega}\omega)$ を $\mathbf{\Sigma}^1_2$ として，U を ${}^k\omega \times \omega_1$ 上の木で，$A = p[U]$ となるものとする．各 $\gamma < \omega_1$ に対し，$U^\gamma = U \cap ({}^k({}^{<\omega}\omega) \times {}^{<\omega}\gamma)$ とする．$\mathrm{cf}(\omega_1) > \omega$ だから，$A = \bigcup_{\gamma<\omega_1} p[U^\gamma]$ となる —— これは 13.13(f) の証明により示せる．また，13.13 の AC に依存しない他の部分を用いて，各 $p[U^\gamma]$ が ω-スースリン，したがって，$\mathbf{\Sigma}^1_1$ となることも示せる．あるいは，13.3 と同じように議論を進めて，γ に関して一様に，すべての $\alpha < \omega_1$ に対し，

$$\begin{aligned} C^\gamma_\alpha = \{\mathbf{w} \in {}^k({}^{\omega}\omega) \mid (&U^\gamma_{\mathbf{w}} \text{ は整順的で } \|U^\gamma_{\mathbf{w}}\| \leq \alpha) \vee \\ &\exists s \in {}^{<\omega}\omega_1(U^\gamma_{\mathbf{w}}/s \text{ は整順的で } \|U^\gamma_{\mathbf{w}}/s\| = \alpha)\} \end{aligned}$$

はボレル集合となる．ここで，この補集合を考えて 13.3 の証明と同様に議論すると，$p[U^\gamma] = \bigcup_{\alpha<\omega_1}({}^k({}^{\omega}\omega) - C^\gamma_\alpha)$ が示せる．したがって，

$$A = \bigcup_{\gamma<\omega_1} \bigcup_{\alpha<\omega_1}({}^k({}^{\omega}\omega) - C^\gamma_\alpha)$$

となる．　⊣

シェーンフィールドは $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合のこのような分析を用いて，絶対性に関する重要な結果を得ている．解析的関係の絶対性を議論するために，まず各々の解析的な A に対し 12.4 で与えられたような標準型を選んでおく．例えば，$A \subseteq {}^{\omega}\omega$ が Σ^1_2 のときには，帰納的な $R \subseteq {}^4\omega$ で，任意の $x \in {}^{\omega}\omega$ に対し，

$$A(x)\ \leftrightarrow\ \exists^1 y \forall^1 z \exists^0 m R(m, \overline{x}(m), \overline{y}(m), \overline{z}(m))$$

となるようなものを選ぶ．M を推移的なクラスで，すべての $r \in \omega$ と帰納的な $S \subseteq {}^r\omega$ に対し，$S \in M$ となるようなものとする．M が ZF の $\in$-モデルであるときには，これが成り立つことは明らかである．ここで，A^M で，A の（標準型の）M への制限を表すことにする．上の Σ^1_2 集合 A では，任意の $x \in {}^{\omega}\omega \cap M$ に対し，

$$A^M(x)\ \leftrightarrow\ (\exists y \in {}^{\omega}\omega \cap M)(\forall z \in {}^{\omega}\omega \cap M)\exists^0 m R(m, \overline{x}(m), \overline{y}(m), \overline{z}(m))$$

である．ここで，

A は M に対し絶対的であるとは，任意の $\mathbf{u} \in M$ に対し，$A(\mathbf{u}) \leftrightarrow A^M(\mathbf{u})$ が成り立つこと

とする．任意の $a \in {}^\omega\omega$ に対し，この概念は a で解析的な関係と $a \in M$ となるような M に自然に拡張できる．シェーンフィールドの **$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 絶対性定理**は次のようなものである．くどくなるが，前と同じく，以下の議論で，ω_1 は V での意味のものである．

13.15 定理 (Shoenfield [61]). ZF の定理 $\hat{\sigma}$ で，任意の $a \in {}^\omega\omega$ と，$\omega_1 \cup \{a\} \subseteq M$ となる $\hat{\sigma}$ の推移的な $\in$-モデルに対し，すべての $\Sigma^1_2(a)$ 関係が（したがって，すべての $\Pi^1_2(a)$ 関係も）M に対し絶対的となるようなものが存在する．

証明 まず M が ZFC の内部モデルであると仮定して証明をおこない，必要となる改良は後で述べる．記述を簡単にするために，$\Sigma^1_2(a)$ 関係 $A \subseteq {}^\omega\omega$ を考察する．

まず，T を ${}^2\omega \times \omega$ 上の木で，任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$A(x) \ \leftrightarrow \ \exists^1 y(T_{\langle x,y \rangle} \text{ は整順的})$$

となるものとする．13.1 により，$T^M = T$ となっているとしてよい．ここで，$x \in M$ で $A^M(x)$ なら，$y \in M$ で，$T_{\langle x,y \rangle}$ が M の意味で整順的となっているようなものがある．したがって 12.9(a) により，$T_{\langle x,y \rangle}$ から On への順序を保存する M での写像が存在する．この写像はもちろん V でも存在しているから，$A(x)$ の成り立っていることが分かる．

逆については，$\Sigma^1_2(a)$ 集合の 13.14 での表現を用いる．$U \in L[a] \subseteq M$ を $\omega \times \omega_1$ 上の木で，すべての $x \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$A(x) \ \leftrightarrow \ U_x \text{ は整順的でない}$$

となるものとする．今，$x \in M$ で，$A(x)$ とすると，U_x が V で整順的でないことから，12.9(a) により，U_x から ω_1 への順序を保存する写像は存在しない．したがって，そのような写像は M でも存在しえない．したがって，U_x は M の意味でも整順的でないから，13.14 により $A^M(x)$ となる．

証明を完了させるために，M は充分に強い ZF の定理のモデルとなっていればよいことにまず注意する．12.9(a) も 13.14 も DC を必要としない．整列可能な木に関する，整順性と無限下降列の非存在の同値性を示すのに DC は必要とならないからである．また，U は M の元でなくても，M で定義可能なクラスであればよいことも容易に確かめられるが，このためには $\omega_1 \subseteq M$ が成り立てば十分である． ⊣

この結果の数学における重要性は，多くの古典的な解析学の命題は $\mathbf{\Sigma}^1_2$ であることから，もしこれらの命題が $V = L$（したがって特に CH）のもとで確立できれば，このことから，これらの命題が実は ZF のみで確立できることが帰結できる，ということである．

$\exists^1 x(x \notin L)$ は Σ^1_3 で，これは $M = L$ として M に対し絶対的であり得ないから，上の結果は射影的階層において最良のものとなっていることが分かる．後に，巨大基数を内包する内部モデルで，より強い絶対性を持つものが考察されることになる（第 II 巻を参照）．

13.16 系　$r \in \omega$ で，$A \subseteq {}^r\omega$ が $\Sigma^1_2(a)$ なら，$A \in L[a]$ となる．

証明　今まで ${}^k({}^\omega\omega)$ の部分集合の木による表現を考察してきたが，同様の議論は記号の書きかえのみで，$A \subseteq {}^r\omega$ に対してもできる．したがって，$A^{L[a]} = A \cap L[a] = A$ となるから，$A \in L[a]$ である．　$\dashv$

13.14 の証明のアイデアは，近藤の $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ 単層化定理 12.3 へのダイレクトなアプローチを得るのにも用いることができる．アディソンはこの定理も実効的な形で述べられることを見いだしている．

13.17 定理　(Kondô [37, 39]; Addison). $a \in {}^\omega\omega$ として，任意の ${}^2({}^\omega\omega)$ の $\Pi^1_1(a)$ 部分集合は $\Pi^1_1(a)$ 集合により単層化できる．

証明　$A \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ を $\Pi^1_1(a)$ とする．$\Pi^1_1(a)$ 集合 $A_0 \subseteq A$ で，任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，$A(x,y)$ となる y が存在するなら，$A_0(x,y)$ となる y が一意に存在する，という性質を持つものが見つかればよい．13.1 により，T を ${}^2\omega \times \omega$ 上の木で

$$A(x,y) \;\leftrightarrow\; T_{x,y} \text{ は整順的}$$

となるようなものとする．ただし，ここでは記述を簡単にするために $T_{\langle x,y\rangle}$ と書か代わりに $T_{x,y}$ と書くことにする．13.14 の議論により，対応する ${}^2\omega \times \omega_1$ 上の木 $\hat{T}$ で，

$$A(x,y) \;\leftrightarrow\; \exists g \in {}^\omega\omega_1(\langle x,y,g\rangle \in [\hat{T}])$$

となるものがとれる．ここで g は $T_{x,y}$ の整順性を保証する $T_{x,y}$ から ω_1 への順序を保つ写像を与える．

任意の $x, y \in {}^\omega\omega$ に対し，g で $\langle x,y,g\rangle \in [\hat{T}]$ となるようなものがあれば，整順的でない木の一般論で辞書式順序で最小（“左はし”）のものが存在する．つまり，g_0 で，他の任意のこのような g に対し，i が $g_0(i) \neq g(i)$ となるような最小のものなら，$g_0(i) < g(i)$ が成り立つ．さらに，$\hat{T}$ では，“善良な左はし”のものが存在する，つまり，$g_{x,y}$ で，任意の他の g に対し，$g_{x,y}(i) \leq g(i)$ がすべての $i \in \omega$ に対し成り立つようなものが存在する：12.9(a) と $\hat{T}$ の定義により，

$$g_{x,y}(i) = \begin{cases} \rho_{T_{x,y}}(\mathbf{s}_i) & \mathbf{s}_i \in T_{x,y} \text{ のとき}, \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とできるからである．

次に，$x \in {}^\omega\omega$ として，$A(x,y)$ となるような y があるとする．つまり，対 $\langle y,g\rangle$ で $\langle x,y,g\rangle \in [\hat{T}]$ となるものが存在する，とする．このときには，辞書式順序で最小のもの（“左はし”）のものがとれる．つまり，対 $\langle y_x, g_x\rangle$ で任意の他のこのような対 $\langle y,g\rangle$ に対し，i が $\langle y_x(i), g_x(i)\rangle \neq \langle y(i), g(i)\rangle$ となるような最小のものであるとき，$y_x(i) < y(i)$ か，あるいは $y_x(i) = y(i)$ かつ $g_x(i) < g(i)$ かのどちらかが成り立つようなものである．単層化は y_x を選ぶことでなされる．これが $\Pi^1_1(a)$ の範囲でできることは，g_x が善良な左はじの g_{x,y_x} となっていることによる．

きちんとした定式化を見てゆくことにする．善良な左はじの枝の定義を頭において，$\omega \times {}^3({}^\omega\omega)$ 上の関係 $R^{\leq}$ と $R^{<}$ を，

$$R^{\leq}(i,x,y,z) \leftrightarrow T_{x,z}/\mathbf{s}_i \text{ は整順的でない } \vee \ \rho_{T_{x,y}}(\mathbf{s}_i) \leq \rho_{T_{x,z}}(\mathbf{s}_i)\,,$$
$$R^{<}(i,x,y,z) \leftrightarrow T_{x,z}/\mathbf{s}_i \text{ は整順的でない } \vee \ \rho_{T_{x,y}}(\mathbf{s}_i) < \rho_{T_{x,z}}(\mathbf{s}_i)\,.$$

として与える．整順的な木 T と $t \in T$ に対し，$\rho_T(t) = \|T/t\|$ であったことを思い出すと，12.9 により，

$$R^{\leq}(i,x,y,z) \leftrightarrow \exists f(f\colon T_{x,y}/\mathbf{s}_i \ \to \ T_{x,z}/\mathbf{s}_i \text{ は順序を保存する})\,,$$
$$R^{<}(i,x,y,z) \leftrightarrow \exists f \exists^0 k(f\colon T_{x,y}/\mathbf{s}_i \ \to \ T_{x,z}/\mathbf{s}_i{}^\frown\langle k\rangle \text{ は順序を保存する})$$

となる．13.1 により，$\{\langle i,x,y\rangle \mid \mathbf{s}_i \in T_{x,y}\}$ は a で帰納的だから，$R^{\leq}$ と $R^{<}$ は $\Sigma^1_1(a)$ となっていることが分かる（13.4 の二番目の証明を参照）．

ここで $A_0 \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ を

$$\begin{aligned} A_0(x,y) \ \leftrightarrow \ & A(x,y) \wedge \\ & \forall^1 z \forall^0 m[\,(\overline{y}(m) = \overline{z}(m) \\ & \qquad \wedge \ \forall^0 i < m(R^{\leq}(i,x,y,z) \ \wedge \ R^{\leq}(i,x,z,y)) \\ & \qquad\quad \to (y(m) < z(m) \ \vee \ (y(m) = z(m) \ \wedge \ \neg R^{<}(m,x,z,y)))] \end{aligned}$$

と定義する．これは本質的には $\Pi^1_1(a) \wedge \forall^1[\Sigma^1_1(a) \to \neg\Sigma^1_1(a)]$ の形をしているので，$\Pi^1_1(a)$ である．これの意味の解釈には，$R^{\leq}(i,x,y,z) \wedge R^{\leq}(i,x,z,y)$ は

$$(T_{x,y}/\mathbf{s}_i \text{ と } T_{x,z}/\mathbf{s}_i \text{ は両方とも整順的でない } \vee \ \rho_{T_{x,y}}(\mathbf{s}_i) = \rho_{T_{x,z}}(\mathbf{s}_i))\,.$$

ということと同値であることに注意する．$\neg R^{<}(m,x,z,y)$ は，

$$(T_{x,y} \text{ は整順的 } \wedge \ \rho_{T_{x,z}}(\mathbf{s}_m) \not< \rho_{T_{x,y}}(\mathbf{s}_m))$$

と同値で，これは，

$$(T_{x,y} \text{ は整順的 } \wedge \ \rho_{T_{x,y}}(\mathbf{s}_m) \leq \rho_{T_{x,z}}(\mathbf{s}_m))\,.$$

と同値である．したがって，任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，善良な左はじの枝により，$A_0(x,y)$ は実際に $\langle x,y,g\rangle \in [\hat{T}]$ となるようなものがあるときには，このようなもののうち左はじの $\langle y,g\rangle$ での y を抽出していることが分かる．したがって証明が完了した． ⊣

この証明の構成要素，特に善良な左はしの枝に複雑でない定義を与えられるという事実は，後に**スケール**の概念として抽象化されることになる（§30 を参照）．上の結果にさらに $\exists^1$ をひとつ加えることは容易である：

13.18 演習 (Kondô [39]). $a \in {}^\omega\omega$ として，任意の ${}^2({}^\omega\omega)$ の $\Sigma^1_1(a)$ 部分集合は $\Sigma^1_2(a)$ 集合によって単層化できる． ⊣

これが単層化に関する直接に得られる結果の限界を示している．アディソンは L における，この問題に関する最終結果を得ている：

13.19 演習　(Addison [59]). ${}^\omega\omega \subseteq L$ なら，任意の $a \in {}^\omega\omega$ と $2 \leq n \in \omega$ に対し，すべての ${}^2({}^\omega\omega)$ の $\Sigma^1_n(a)$ 部分集合は $\Sigma^1_n(a)$ 集合によって単層化できる．

ヒント　$A \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ が $\Pi^1_{n-1}(a)$ なら，13.11 により，

$$A_0(x,y) \;\leftrightarrow\; A(x,y) \;\wedge\; \exists^1 u(\mathrm{IS}_L(u,y) \wedge \forall^0 i \neg A(x,(u)_i))$$

は $\Sigma^1_n(a)$ となり，$\exists y A(x,y) \leftrightarrow \exists! y A_0(x,y)$ となることに注意する．　⊣

一方レヴィは Levy [65a] でコーエン実数を L に一つ加えたときには，これによって得られる拡大では，どんな解析的集合でも単層化できないような Π^1_2 集合の存在することを示している．さらに，L に非可算個のコーエン実数を付加したときには，これによって得られる拡大では，どんな射影的集合によっても単層化できないような Π^1_2 集合（具体的には $\{\langle x,y\rangle \mid y \notin L[x]\}$ ）が存在する．後に強い仮説が，この問題のこれとは反対方向の解決を与えることになる（15.14, 30.9 を参照）．実際，そこでの結果により，古典的な構造的性質の研究という古い酒に新しい生命が吹きこまれることになるのである（§§29, 30 を参照）．

§14　Σ^1_2 集合とシャープ

ソロヴェイは 1965 年に，ゲーデルの限定的な結果の現れる $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ 集合のレヴェルで正則性の成り立つことの特徴付けを与え，これによって，正則性の成り立つ範囲を研究するという古典的な記述集合論のプログラムを復活させた．彼はまた超限的な対象である $0^\#$ の定義可能性について研究して，これに関連して強制法の適用範囲に関するいくつかの仮説を立てたが，これは新しい指針となった．この研究を通じて，巨大基数の，射影的階層の研究での重要性が明らかになってくる．この節では，これらの展開を見てゆくことにする．

ソロヴェイは彼のルベーグ測度に関する結果 11.1 をふまえて，強制法を用いることによって，$\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ 集合がルベーグ可測であることの特徴付けを確立した．この結果といくつかの他の結果により，強制法はほどなく集合論内部での基本的な**構成法**としての地位を確立することになった．

14.1 定理　(Solovay). $a \in {}^\omega\omega$ に対し，以下は同値となる：

(a) すべての実数の $\Sigma^1_2(a)$ 集合はルベーグ可測である．

(b) $\bigcup\{A_c \mid c \in L[a]$ は零集合の G_δ コード $\}$ は零集合となる．

(c) $\{x \mid x$ は $L[a]$ 上ランダム実数でない $\}$ は零集合である．

(d) ある論理式 φ と $p \in L[a]$ に対し，$\{x \in {}^\omega\omega \mid L[a][x] \models \varphi[p,x]\}$ という形をしている集合はすべてルベーグ可測である．

証明　11.10 により，(b) と (c) は同義語的であり，11.11 での議論を V でなく L で行うことにより，これらから (d) が導ける．(d) → (a) は 13.15 による $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ 絶対性から導ける．

残りは，(a) → (b) であるが，これを示すために，B を (b) でのような集合とする．$C \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ が，

$$C(x,c) \leftrightarrow c \text{ は零集合の } G_\delta \text{ コード } \wedge x \in A_c$$

として与えられているとき，これが算術的であることは直ちに確かめられる．

$$x \in B \leftrightarrow \exists^1 c(c \in L[a] \wedge C(x,c))$$

だから，13.9 を相対化したものにより，B は $\Sigma^1_2(a)$ であることが分かる．したがって仮定により，この集合はルベーグ可測である．これがさらに零集合であることを確かめればよい．このために，13.10 の整列順序による議論を次のよう改良したものを用いる：

まず，$D \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ を

$$D(x,c) \leftrightarrow c \in L[a] \wedge C(x,c) \wedge \forall^1 d(d <_{L[a]} c \rightarrow \neg C(x,d))$$

で定義する．次に，$R \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ を

$$R(x,y) \leftrightarrow \exists^1 c \exists^1 d(D(x,c) \wedge D(y,d) \wedge (c <_{L[a]} d \vee c = d))$$

と定義する．したがって，R により，B の元 x を $<_{L[a]}$ で最小の零集合の G_δ コードで $x \in A_c$ となるようなものに対応させることにより得られる B の順序が導入できる．R は**前整列順序**である．つまり，異なる x, y に対し $R(x,y)$ かつ $R(y,x)$ が両方とも成り立つ可能性があることを除いて整列順序となっている．

13.11 を a に関して相対化したものにより，D は $\Sigma^1_2(a)$ となっていることが分かるから，R もそうである．したがって，R は仮定から可測となる．${}^2({}^\omega\omega) \cap <_{L[a]}$ は順序型 $\omega_1^{L[a]} \leq \omega_1$ を持つから，任意の y に対し $R_y = \{x \mid R(x,y)\}$ は零集合の可算和となり，したがって零集合である．よって，フビニの定理 0.10 により，R も零集合となる．ところが，これの補集合 $\{\langle x,y\rangle \in B \times B \mid \neg R(x,y)\}$ は，B が可測であるから，やはり可測となり，上と同様の議論により，零集合であることが示せる．したがって，$B \times B$ は零集合となるから，B も零集合でなければならないことが分かる． ⊣

11.11 の証明でのベールの性質に関する注意により，同様な議論で次の定理が確立できる：

14.2 定理 (Solovay). $a \in {}^\omega\omega$ に対し，以下は同値となる：

(a) すべての実数の $\Sigma^1_2(a)$ 集合はベールの性質を持つ．

(b) $\bigcup\{A_c \mid c \in L[a]$ は痩集合の $F_{\sigma\delta}$ コード $\}$ は痩集合となる．

(c) $\{x \mid x$ は $L[a]$ 上コーエン実数でない $\}$ は痩集合である．

(d) ある論理式 φ と $p \in L[a]$ に対し，$\{x \in {}^\omega\omega \mid L[a][x] \models \varphi[p,x]\}$ という形をしている集合はすべてベールの性質を持つ． ⊣

14.3 系 $\omega_1^{L[a]} < \omega_1$ なら，すべての実数の $\Sigma^1_2(a)$ 集合はルベーグ可測でベールの性質を持つ．特に，可測基数が存在するなら，すべての実数の $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ 集合はルベーグ可測でベールの性質を持つ．

証明 ${}^\omega\omega \cap L[a]$ が可算なら，上の 2 つの定理での (b) が成り立つからよい．9.19 により，

可測基数が存在するなら，任意の $a \in {}^{\omega}\omega$ に対し，ω_1 は $L[a]$ で到達不可能基数となるから，二番目の命題は，このことと最初の命題から導くことができる．　⊣

モショヴァキス Moschovakis [80: 8G] はソロヴェイのアイデアを吟味し直して，この系の強制法を用いない証明を得ている．可測基数に関する主張はまだ改良の余地があるとはいえ，これは古典的な概念の直接的な含意関係となっており，ゲーデルの $V = L$ が定義可能な実数の集合に果たす限定と対峙するものとなっている．このようにしてソロヴェイは，可測基数が，連続体仮説は決定しないにしても，実数の集合に直接的に数学的な影響を与えることを，示したのであった．一方，後にシルバーは，可測基数の存在のみからでは Δ^1_3 集合のルベーグ可測性が帰結できないこと (20.19) を示すことになる．より多くの射影的集合の可測性を確立するというのが，さらに強い仮説を探究するときの重要なテーマの一つとなった．

ZFC に，すべての $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合がルベーグ可測でベールの性質を持つ，という命題を付け加えたものの無矛盾性を示すためには，巨大基数の仮定は必要ない．マルティンとソロヴェイ Martin-Solovay [70: §4] は，これがマルティンの公理 (MA) + ¬CH から導かれ，さらに，そこで述べられているような長さが ω_1 の強制法の反復により，CH との無矛盾性も得られることを示している．他方，シェラハ Shelah [84] は後に，すべての $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合のルベーグ可測性のためには，到達不可能基数の無矛盾性の強さが必要であることを示し，これによってソロヴェイの結果 11.1 を補足することになる（第 II 巻を参照）．

ソロヴェイは，$\mathbf{\Delta}^1_2$ の大きな部分族に対しルベーグ可測性が成立することをほどなく証明している．この部分族を記述するために，関係を定義する論理式をもっと注意深く見ることが必要になる．

$a \in {}^{\omega}\omega$ と $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ に対し，A が**証明可能に** $\Delta^1_2(a)$ であるとは，関数の量化子を持たない $\mathcal{A}^2$ の論理式，$\psi(v^1_1, v^1_2, v^1_3, v^1_4)$, $\varphi(v^1_1, v^1_2, v^1_3, v^1_4)$ があり，任意の $x \in {}^{\omega}\omega$ に対し，$A(x) \Leftrightarrow \mathcal{A}^2 \models \exists^1 v^1_3 \forall^1 v^1_4 \psi[x, a] \Leftrightarrow \mathcal{A}^2 \models \forall^1 v^1_3 \exists^1 v^1_4 \varphi[x, a]$ となり，さらに ZFC で，

$$\mathcal{A}^2 \models \forall^1 v^1_1 \forall^1 v^1_2 (\exists^1 v^1_3 \forall^1 v^1_4 \psi \leftrightarrow \forall^1 v^1_3 \exists^1 v^1_4 \varphi)$$

となることが証明できることをいう（この定義は $A \subseteq {}^{r}\omega \times {}^{k}({}^{\omega}\omega)$ に対しても同様にして拡張することができ，また対応する**証明可能に** Δ^1_2, **証明可能に** $\mathbf{\Delta}^1_2$ という概念も導入できる）．したがって，このような A は，$\Sigma^1_2(a)$ および $\Pi^1_2(a)$ での定式化で，その同値性が ZFC での定理となるようなものが存在する，という強い意味で $\Delta^1_2(a)$ になるわけである．例えば，$V = L$ から，${}^{2}({}^{\omega}\omega) \cap <_L$ は Δ^1_2 となることが帰結できるが，これは証明可能に Δ^1_2 ではない．空(から)の量化子を導入することにより，すべての $\Sigma^1_1(a)$ 関係は証明可能に $\Delta^1_2(a)$ であることが分かる．コルモゴロフ Andrei Kolmogorov [28] は Suslin [17] の演算 (A) を超限的な階層に拡張することで，**R-集合**という概念を導入して，そのような集合のルベーグ可測性を示している．最近になって，John Burgess [82, 83] と Rana Barua [84] は，R-集合の理論を再構成，拡張し，この結果 R-集合は証明可能に $\mathbf{\Delta}^1_2$ であることが示せた．したがって，次の結果は 12.2(a)(b) を凌駕するものとなっている：

14.4 演習　(Solovay —— Fenstad-Normann [74] を参照)．すべての証明可能に $\mathbf{\Delta}^1_2$ な実

数の集合はルベーグ可測でベールの性質を持つ．

ヒント　A を，ある $a \in {}^\omega\omega$ に対し証明可能に $\Delta^1_2(a)$ であるとして，τ を ZFC の定理で，A のある Σ^1_2 による記述と Π^1_2 による記述の同値性を確立するものとする．$\hat{\sigma}$ を 13.15 での ZF の定理とすると，$a \in M$ で，帰納的な関係をすべて含む，推移的な $\hat{\sigma} \wedge \tau$ の任意の $\in$-モデル M に対し，A は絶対的となる（ここでのポイントは，Π^1_2 での記述を対偶的に用いることで，$\omega \times \omega_1$ 上の木による議論を回避できるため，13.15 でのように $\omega_1 \subseteq M$ となっている必要がないことである）．ここで，これ以外で必要となる有限個の ZFC の公理も満たすような可算モデル M で 14.1 と 14.2 の (b) → (a) での $L[a]$ を置き換えることで同様の議論をおこなうことができる．　⊣

最後に最近得られた特徴付けを与える．これはランダム実数とコーエン実数の本質的な重要性を再度実証するものとなっている：この特徴付けは，14.1 と 14.2 を補足し，ゲーデルの 13.10 を内包しており，もっと早期に発見されていても不思議でないものであった．まず準備のために次の演習を与える：

14.5 演習　M を ZFC の内部モデルとする．このとき，

(a) M 上のランダム実数が存在するときには，そのような実数の全体は稠密となる：任意の零集合のでない集合の閉集合コード $c \in M$ に対し，A_c の元となるような M 上のランダム実数が存在する．

(b) M 上のコーエン実数が存在するときには，そのような実数の全体は稠密となる：任意の $s \in {}^{<\omega}\omega$ に対し，$s \subseteq x$ となる M 上のコーエン実数 x が存在する．

ヒント　(b) は (a) よりずっと簡単に示せ，両方ともこれらの強制法の概念が一様である（10.19 を参照）ことから導ける．ところが，ランダム実数の強制に対しては，このことを示すためにルベーグ測度に関する難しい結果が必要になるので，ここでは (a) の直接証明のアウトラインを与えておくことにする：

x を M 上ランダム実数とする．置換 $p\colon \omega \to \omega$ をうまくとり，これによって（$n \in \omega$ に対して $\overline{p}(f)(n) = f(p(n))$ と定義することで）惹き起こされる位相同型 $\overline{p}\colon {}^\omega\omega \to {}^\omega\omega$ が $\overline{p}(x) \in A_c$ を満たすようにする，というのが証明のアイデアである．このようにして惹き起こされた位相同型は測度を保存するから，$\overline{p}(x)$ も M 上ランダム実数となる．まず，

$$A_c = {}^\omega\omega - \bigcup\{O(\mathbf{s}_{i_j}) \mid j \in \omega\}$$

となっていると仮定してよいことに注意する．ここに，$O(\mathbf{s}_{i_j})$, $j \in \omega$ は互いに素となっているとしてよい．p は，互いに異なり ω の元を枚挙するような $a_m, b_m, m \in \omega$ に対する互換 $p(a_m) = b_m$ かつ $p(b_m) = a_m$ によって得られるものとする．このめに組 $\langle a_m, b_m \rangle$ を次のように帰納的に定義する：

すべての $m < n$ に対し a_m と b_m が，

$$m_L(\bigcup\{O(\mathbf{s}_{i_j}) \mid \mathbf{s}_{i_j} \supseteq \{\langle a_0, x(b_0)\rangle, \ldots, \langle a_{n-1}, x(b_{n-1})\rangle\}\}) < \prod_{m<n} 2^{-(x(b_m)+1)}$$

を満たすように帰納的に定義できたとしよう（帰納的構成の初めの $n = 0$ の場合は，この

条件は，A_c が零集合でないという仮定から，不等式の右辺を 1 として自動的に成り立っている）．a_n をどの a_m とも b_m とも異なるような ω の最小の元とする（したがって $a_0 = 0$ である）．このとき $k \in \omega$ で，

$$\begin{aligned} m_L(\bigcup\{O(\mathbf{s}_{i_j}) \mid \mathbf{s}_{i_j} \supseteq \{\langle a_0, x(b_0)\rangle, \ldots, \langle a_{n-1}, x(b_{n-1})\rangle, \langle a_n, k\rangle\}\}) \\ < \ 2^{-(k+1)} \cdot \textstyle\prod_{m<n} 2^{-(x(b_m)+1)} \end{aligned}$$

となるものがあるが，x はランダム実数だから，$b_n \neq a_n$ で，すべての $a_m, b_m, m < n$ とも異なり，$x(b_n) = k$ となるようなものがとれる．したがって，帰納法の仮定を一つ先に進めることができる．このようにして選んだ x が $\overline{p}(x) \in A_c$ を満たすことは容易に確かめられる．　$\dashv$

14.6 定理　(Ihoda-Shelah [89]). $a \in {}^\omega\omega$ とする．このとき，

(a) 実数の $\Delta^1_2(a)$ 集合がすべてルベーグ可測となるのは，$L[a]$ 上のランダム実数が存在する，ちょうどそのときである．

(b) 実数の $\Delta^1_2(a)$ 集合がすべてベールの性質を持つのは，$L[a]$ 上のコーエン実数が存在する，ちょうどそのときである．

証明　いつもと同じに，測度に関する結果のみを示す．順方向は 14.1 の (a) → (b) の証明を用いて，$L[a]$ 上のランダム実数が存在しないとき，この証明での R は，実際にはさらに $\Delta^1_2(a)$ となる（13.10 を参照）ことに注意すればよい．

逆方向の証明は，14.4 と類似の議論によってできる．$L[a]$ 上のランダム実数が存在するとして，$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ を $\Delta^1_2(a)$ とする．したがって，簡単のために $k = 1$ とすると，$\Sigma^1_2(a)$ 関係 $R_0, R_1 \subseteq {}^\omega\omega$ で，任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$A(x) \ \leftrightarrow \ R_0(x) \ \leftrightarrow \ \neg R_1(x)$$

となるものが存在する．いつものように，M が推移的なクラスで帰納的な関係をすべて含んでいるときには，R_i^M で，R_i の（標準型の）M への制限を表すことにする．$P = (\mathcal{B}^*)^{L[a]}$ を $L[a]$ の意味でのランダム実数の強制として，$\dot{r}$ をランダム実数の P-名称とする．このとき，

$$D = \{p \in P \mid p \Vdash R_i^{L[a][\dot{r}]}(\dot{r}) \text{ がちょうど一つの } i < 2 \text{ で成り立つ}\} \in L[a]$$

は P で稠密であることが V での以下の議論により分かる：P の任意の元をとる．稠密性の証明のためには，この元はある閉集合コード $c \in L[a]$ に対し $A_c^{L[a]}$ という形をしているとしてよいから，14.5(a) により，$L[a]$ 上ランダムな $x \in A_c$ が存在する．ちょうど一つの $i < 2$ に対し $R_i(x)$ が成り立つが，$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 絶対性 13.15 から，$R_i^{L[a][x]}(x)$ となる．したがって，$p \leq A_c^{L[a]}$ で $p \in D$ となるものがあることが分かる．

D は P で開稠密だから，$L[a]$ での極大な反鎖 $E \subseteq D$ で，閉集合からなるものが存在する．ω_1-c.c. により，これは可算である．$i < 2$ に対し，

$$
\begin{aligned}
Y_i &= \{c \in {}^{\omega}\omega \mid c \in L[a] \text{ は閉集合コード } \wedge \\
&\qquad\qquad A_c^{L[a]} \in E \ \wedge\ A_c^{L[a]} \Vdash R_i^{L[a][\dot{r}]}(\dot{r})\}, \\
Z_i &= \bigcup\{A_c \mid c \in Y_i\}
\end{aligned}
$$

とおく．このとき，$i<2$ に対し，$Z_i - R_i$ が零集合となることが確かめられれば十分である．これが示せたとして，11.8 でのコードの絶対性を思い出すと，

(i) $Y_0 \cap Y_1 = \emptyset$ により，$Z_0 \cap Z_1$ は零集合となり，
(ii) E の極大性から，$m_L(Z_0) + m_L(Z_1) = 1$

となることから，$Z_0 \triangle R_0$ が零集合であることが分かる．したがって，$R_0 = A$ が可測であることが帰結できる．

$i<2$ に対し $Z_i - R_i$ が零集合であることを示すために，$M \in L[a]$ を可算で推移的な ZFC の十分に大きな部分の $\in$-モデルで $Y_0, Y_1 \in M$ となっているものとする（十分に大きな正則基数 λ に対し，$M \prec L_\lambda[a]$ となるようにとれば十分である．このような M は巾集合の公理を満たさない可能性がある点をのぞけば ZFC のモデルとなっている．以下では，$M \models$ ZFC が成り立っているような扱いをして，そのような状況に対して確立されている用語を自由に用いることにする）．M は可算だから，M 上ランダム実数でないような実数の全体は零集合となる（11.10 を参照）．他方 $x \in {}^{\omega}\omega$ が M 上ランダム実数で $x \in Z_i$ なら，ある $c \in Y_i$ に対し $x \in A_c$ となり，したがって，$x \in A_c^{M[x]}$ である．よって，x の generic 性から，$R_i^{M[x]}(x)$ となり，13.15 での上方向の $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 絶対性（これには $\omega_1 \subseteq M$ という条件はいらない）から，$R_i(x)$ となる．これで示したかったことが言えて，証明が完了した． ⊣

ソロヴェイが指摘しているように，$L[a]$ に $\aleph_1$ 個のランダム実数を付加したときには，$\Sigma^1_2(a)$ 集合 ${}^{\omega}\omega \cap L[a]$ はこの拡張ではルベーグ可測でない（Jech [78: 568ff] を参照）．したがって，すべての $\Delta^1_2(a)$ 集合のルベーグ可測性から，すべての $\Sigma^1_2(a)$ 集合のルベーグ可測性を帰結することはできない．同様の注意はベールの性質に関しても言える．14.4 と 14.6 の証明の違いについてもう一言付け足しておくと，前者の証明で，可算モデルに対し A が絶対的となるのは証明可能性に基づいているが，これに対し，後者では，極大な反鎖を M に取り込むことが必要となっており，このことがすべての $L[a]$ 上ランダム実数となる x に対し $R_0(x) \leftrightarrow \neg R_1(x)$ が成り立つことと結びつけられている．

ソロヴェイはすべての $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合が完全集合の性質を持つことの特徴付けを 11.11 でのような強制法による議論によって与えている．後にマンスフィールド Richard Mansfield のエレガントな結果により，このことの構造的な本質が抽出されることになる．この結果の証明も初めは強制法によるものであったが，ソロヴェイはこれにカントル=ベンディクソンの議論 (11.3(a)) の改良と見なせる証明を与えている：

14.7 定理 (Mansfield [70]). ある無限集合 Y に対し，T を $\omega \times Y$ 上の木として，$A \subseteq {}^{\omega}\omega$ を $A = p[T]$ となるものとする．つまり，任意の $x \in {}^{\omega}\omega$ に対し，

$$A(x) \ \leftrightarrow\ \exists f \in {}^{\omega}Y(\langle x, f\rangle \in [T])$$

である．このとき，$A \subseteq L[T]$ で $|A| \leq |T|$ となるか，あるいは，A は完全な部分集合を持つかの，いずれかが成り立つ．

証明　任意の $\omega \times Y$ 上の木 U に対し U' を，U での拡張で一番目の座標で共存不可能となるものが存在するような U の元の全体とする．つまり，

$$U' = \{\langle s,h\rangle \in U \mid \exists \langle s_0,h_0\rangle, \langle s_1,h_1\rangle \in U(\langle s_0,h_0\rangle \supseteq^* \langle s,h\rangle \\ \wedge \langle s_1,h_1\rangle \supseteq^* \langle s,h\rangle \wedge |s_0| = |s_1| \wedge s_0 \neq s_1)\}$$

とする．ここで $T_0 = T$ かつ $T_{\alpha+1} = T'_\alpha$ として極限順序数 $\delta > 0$ に対しては，$T_\delta = \bigcap_{\alpha<\delta} T_\alpha$ とする．明らかに各 T_α は $L[T]$ の元となる．$\beta < |Y|^+$ で，$T_{\beta+1} = T_\beta$ となるものがあるから，そのような β のうち最小のものに対し，$T^* = T_\beta$ とする．

$T^* = \emptyset$ なら，$A \subseteq L[T]$ で $|A| \leq |T|$ となる：$x \in {}^\omega\omega$ が $A(x)$ を満たすとする．したがって，$f \in {}^\omega Y$ で $\langle x, f\rangle \in [T]$ となるものがある．明らかに，$\alpha < \beta$ で $\langle x,f\rangle \in [T_\alpha] - [T_{\alpha+1}]$ となるものがある．このとき，$m \in \omega$ で，$\langle x|m, f|m\rangle \in T_\alpha - T_{\alpha+1}$ となるものがあるが，$s \supseteq x|m$ かつ $h \supseteq f|m$ となる任意の $\langle s,h\rangle \in T_\alpha$ に対し，$s \subseteq x$ となる．したがって，

$$x = \bigcup\{s \mid \exists h(s \supseteq x|m \wedge h \supseteq f|m \wedge \langle s,h\rangle \in T_\alpha)\}$$

となるから，$x \in L[T]$ である．$A(x)$ を満たす $x \in {}^\omega\omega$ は上の議論でのような $\alpha < \beta$ と $\langle x|m, f|m\rangle \in T_\alpha$ によって決定されるから，$|A| \leq |\beta| \cdot |T| = |T|$ が成り立つ．

$T^* \neq \emptyset$ なら A は完全な部分集合を持つことを示すことによって証明が完了する：T^* の要素の一つから出発して，$T^{*\prime} = T^*$ を用いると，各 $t \in {}^{<\omega}2$ に対して $s_t \in {}^{<\omega}\omega$ を帰納的に次の条件を満たすようにとることができる，

(i) $\exists h(\langle s_t, h\rangle \in T^*)$,
(ii) $t \subset u$ なら，$s_t \subset s_u$, かつ，
(iii) $|t| = |u|$ だが $t \neq u$ なら，ある $i \in \mathrm{dom}(s_t) \cap \mathrm{dom}(s_u)$ に対し，$s_t(i) \neq s_u(i)$ となる．

このとき，$S = \{s \in {}^{<\omega}\omega \mid \exists t \in {}^{<\omega}2(s \subseteq s_t)\}$ は ω 上の木で，$[S] \subseteq A$ となる．また 12.10 でのようにして $[S]$ が完全集合であることが分かる．　⊣

次の二つの系は，$\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合 (13.13(c)) と $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合 (13.14) の木による表現からすぐに導ける：

14.8 系　(Suslin – Luzin [17])．実数の $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合はすべて完全集合の性質を持つ．　⊣

14.9 系　(Solovay [69])．$a \in {}^\omega\omega$ で，A が実数の $\Sigma^1_2(a)$ 集合であるとき，$A \subseteq L[a]$ となるか，あるいは A は完全な部分集合を持つ．　⊣

13.12 の後で定義した C_1 との類推で，$\omega_1^{L[a]} < \omega_1$ なら，可算集合

$$C_2^a = {}^\omega\omega \cap L[a]$$

は，完全な部分集合を持たない任意の $\Sigma^1_2(a)$ 集合がその部分集合となるような $\Sigma^1_2(a)$ 集合であることが，14.9 から導かれる．したがって：

14.10 定理 (Solovay [69]). 任意の $a \in {}^\omega\omega$ に対し，以下は同値である：

(a) すべての実数の $\Sigma^1_2(a)$ 集合は完全集合の性質を持つ.

(b) すべての実数の $\Pi^1_1(a)$ 集合は完全集合の性質を持つ.

(c) $\omega_1^{L[a]} < \omega_1$.

証明 (a) → (b) は明らかである．(b) → (c) は 13.12 を a に関して相対化したものから導ける．また，(c) → (a) は上の注意による. ⊣

この結果は，11.6 を改良するものとなっており，すべての $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合が完全集合の性質を持つことのためには，到達不可能基数の無矛盾性の強さが必要になることを示している．Lyubeckij [70] で注意されているように，14.3 と 14.10 から，すべての $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合が完全集合の性質を持つなら，すべての $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合はルベーグ可測となる，という奇妙な結果を帰結することができる —— これらの古典的な性質の間の関係は $\forall a \in {}^\omega\omega(\omega_1^{L[a]} < \omega_1)$ を介して確立できる．Lyubeckij [71] では $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合に関するソロヴェイの結果のいくつかが再証明されている.

シャープの定義可能性

ソロヴェイの $0^\#$ の研究の主要な動機の一つは，その定義可能性の分析であった．13.16 により，ω の Σ^1_2 部分集合はすべて構成可能である．ガイフマンとローボトムの手法を用いて，ソロヴェイは 1965 年の秋に，可測基数があれば，ω の Δ^1_3 部分集合で構成可能でないものが存在する，ということを示している．この後シルバーによる識別不可能性に関する仕事の文脈で，ソロヴェイとシルバーは独立に，$0^\#$ からこれよりさらに強い性質を帰結できることを見いだしている．ここでは，φ が§9 での言語 $\mathcal{L}^*_\in$ の論理式のとき，$\ulcorner\varphi\urcorner \in \omega$ で，この論理式の帰納的な $\mathcal{L}^*_\in$ の算術化でのゲーデル数を表すことにする．これにより $0^\#$ は ω の部分集合と見なせたことを思い出そう.

14.11 定理 (ZF)(Solovay [67], Silver [71]). 以下のように定義される関係 $R \subseteq {}^\omega\omega$ は Π^1_2 である：

$$R(x) \leftrightarrow 0^\# \text{ が存在する } \wedge\ x \in {}^\omega 2\ \wedge\ \{m \mid x(m) = 1\} = 0^\# .$$

証明 §9 での，$0^\#$ は一意に存在する EM 青写真で条件 (I)–(III) を満たすものである，という定義を分析する；§9 で見たように $0^\#$ の理論は AC を必要としないから，これの一意性は ZF で示せる．任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，$\mathrm{Th}_x = \{\varphi \mid x(\ulcorner\varphi\urcorner) = 1\}$ とする．ここで，$S \subseteq {}^\omega\omega$ を以下のように定義する：$S(x) \Leftrightarrow x \in {}^\omega 2$; すべての $m \in \omega$ に対し，$x(m) = 1$ なら，ある $\mathcal{L}^*_\in$ の文 φ で，$m = \ulcorner\varphi\urcorner$ となる；かつ，Th_x は $\mathcal{L}^*_\in$ の完全な理論で，次のものを含む：

(i) 3.3(a) の文 σ_0,

(ii) c_i, $i \in \omega$ が識別不可能集合であることを主張する文の集まり，および

(iii) 条件 (II) および (III) が満たされることを主張する文の集まり.

このとき S が算術的となることは直ちに示せる；Th_x が無矛盾であることを言うには，そ

れからの $v_0 \neq v_0$ の証明をコードする自然数が存在しないことを言えばよい．$S(x)$ なら，完全性定理から，Th_x は可算モデルを持つことに注意する．このようなモデルが整順的なときに初めてその推移的閉包がとれ 3.3(a) が適用できるようになるので，技術的には，(i) と (ii) だけでは，Th_x が EM 青写真であることは示せない．しかし，これは条件 (I) を含めることで解決できる．

このために，13.8 での用語を思い出すことにする；特に，すべての可算な整列順序は，ある $y \in {}^{\omega}\omega$ に対し E_y と表すことができるのだった．そこで，定理の $R \subseteq {}^{\omega}\omega$ は，次と同値になることが分かる：

$$\begin{aligned} S(x) \ \wedge \ \forall^1 y \forall^1 z \,[(E_y \text{ は整列順序 } \wedge \ M_z \text{ は } \mathrm{Th}_x \text{ をそこでの理論として 9.4 を満たし,} \\ \text{順序型 } E_y \text{ の識別不可能集合を持つものとなっている}) \\ \to M_z \text{ は整順的となる}]\,. \end{aligned}$$

M_z が 9.4 を満たす云々は Σ^1_1 である：M_z が満たすべき一階の論理での公理系以外では E_y から On^{M_z} への順序を保つ写像でその像が M_x の識別不可能集合となるものがあり，M_z の元のすべてはこれらの識別不可能集合の元にスコーレム項を適用することで得られるということを言えばよい．よって，R は，$\forall^1 y \forall^1 z[\Pi^1_1 \ \wedge \ \Sigma^1_1 \to \Pi^1_1]$ という形をしているから，Π^1_2 であることが分かる．　⊣

14.12 系

(a) $0^\#$ は，ZF の推移的な $\in$-モデルで $\omega_1 \subseteq M$ となるようなものに対し，次の意味で絶対的である：

$$M \models \ulcorner \text{EM 青写真で (I)–(III) を満たすものが存在する} \urcorner \quad \Leftrightarrow \quad 0^\# \in M$$

またこれが成り立っているときには，$M \models \ulcorner 0^\#$ は EM 青写真で (I)–(III) を満たすような唯一のものとなっている $\urcorner$ が成立する．

(b) $0^\#$ は構成可能でない ω の Δ^1_3 部分集合である．

(c) $0^\#$ が存在すると仮定する．このとき，すべての $x \in \mathcal{P}(\omega) \cap L$ は，$0^\#$ に一対一に還元可能である．つまり，帰納的な単射 $f\colon \omega \to \omega$ で，$x = f^{-1}(0^\#)$ となるものが存在する．したがって，このような x は Δ^1_3 となる．

証明　(a) これは 13.15 の $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 絶対性から導ける．R を 14.11 のようにとると，$M \models \ulcorner$EM 青写真で (I)-(III) を満たすものが存在する $\urcorner$ なら，$x \in M$ で $(R(x))^M$ となるものがある．したがって $R(x)$ となり，$\{m \mid x(m) = 1\} = 0^\# \in M$ である．

(b) (a) と 9.17 により，$0^\# \notin L$ である．また，任意の $m \in \omega$ に対し，

$$\begin{aligned} m \in 0^\# &\leftrightarrow \exists x (R(x) \ \wedge \ x(m) = 1) \\ &\leftrightarrow \forall x (R(x) \to x(m) = 1) \end{aligned}$$

となる．最初の表現から $0^\#$ が Σ^1_3 であることが分かり，二番目のものから，Π^1_3 であることが分かる．

(c) ある項 t と識別不可能な $\iota_{\xi_1}, \ldots, \iota_{\xi_n}$ に対し，$x = t^L(\iota_{\xi_1}, \ldots, \iota_{\xi_n})$ となっているとする．帰納的な算術化を仮定してあったので，

$$f(m) = \ulcorner m \in t(c_1, \ldots, c_n) \urcorner$$

で定義される関数 $f \in {}^\omega\omega$ は帰納的な単射である．ところが，明らかに $x = f^{-1}(0^\#)$ となる．$0^\#$ は Δ^1_3 だから，(c) の最後の主張はこれから帰結できる． ⊣

9.12 の後で述べた注意により，(c) から，$0^\#$ **が存在するなら，L で成り立つ文の（ゲーデル数の）集合は，$0^\#$ に一対一に還元可能であること**が導ける．これらの $0^\#$ の性質は，任意の $a \subseteq \omega$ に対し,（§9 の最後で定義したような）$a^\#$ の $L[a]$ での性質として相対化することができる．このことから，すべての $a \subseteq \omega$ に対し $a^\#$ が存在する，という仮定のもとで帰納的関数論でのチューリング還元可能性と類似の，相対的構成可能性の豊かな風景がひらけてくる．任意の集合 a, b に対し，

$$a \leq_c b \quad \Leftrightarrow \quad a \in L[b]$$

として，$<_c$ と $\equiv_c$ をこれから帰結される意味のものとする．議論を $\mathcal{P}(\omega)$ に限定して，$\equiv_c$ による同値類のクラスのことを実数の**構成可能性の度数**と呼び，順序 $<_c$ および $\leq_c$ をこれらの度数の間の関係として考える．$\mathcal{P}(\omega) \cap L$ は極小な度数となり，度数の全体は，$<_c$ により上半束となる．$a <_c a^\#$ の超越性により，$\#$ はチューリング度数でのジャンプ演算子と似たものとして捉えることができる．パリス Jeffrey Paris [74] は識別不可能クラスのパターンに関する重要な結果を確立したが，この結果から，$a \leq_c b <_c a^\#$ なら，$a^\# \equiv_c b^\#$ となることが示せる；一方，これに対応する，チューリング度数上のジャンプ演算子に対する命題は成り立たないことが知られている．パリスの結果は，これに続く諸結果の重要な構成要素となった：ハリントン Leo Harrington とケクリスは，Harrington-Kechris [77] でソロヴェイの仮説（以下を参照）の部分解を得ている．また，ファリントン Farrington [82] は構成可能性の度数の上半束に $\#$ をあわせて考えたものの一階の論理での理論が，シンプソン Simpson [77] によってチューリング度数に対して確立されたものと類似の，2 階の算術の真理集合への帰納的な同型写像を持つことを，示している．$\#$ に関しては，チューリング度数との明白な類推から，まだ研究の余地がたくさん残っているように思える．

$0^\#$ の驚くべき性質にうながされて，ソロヴェイは 1960 年代終わりにいくつかの大胆な仮説を立てたが，これは強制法との関連における広範囲な問題を提起することになる．彼の一番目の仮説は，**generic 性の仮説**と呼ばれる次のものである：

$$a \subseteq \mathrm{On} \text{ で } 0^\# \notin L[a] \text{ なら，} a \text{ は } L \text{ 上 generic である．}$$

この仮説は L 上 generic ということの解釈に依存している．$a \in L$ もトリヴィアルな意味で L 上 generic であることにする．M を内部モデルとするとき，集合 $a \subseteq \mathrm{On}$ が M **上で集合-generic** であるとは，p.o. $P \in M$ と M 上 P-generic な G で $M[a] = M[G]$ となるものがあることとする．任意の（集合の）p.o. P は $|P|^+$ より大きいか等しい基数をすべて保存するから，9.17(c) と 14.12(a) により，$0^\#$ は L **上で集合-generic** ではない．強制法の一般性に対する確信から，ソロヴェイが彼の仮説でもともと言いたかったのは，集

合-generic の意味で $0^\#$ の超越性が極小であるということであった．しかしながら，1975 年から 76 年にイェンセンは彼の“一つの実数でユニヴァースをコードする”という感動的なテクニックによって，この記述でのソロヴェイの仮説の否定を示している．イェンセンが得たのは次のような結果であった：

14.13 定理 (Jensen – Beller-Jensen-Welch [82]). GCH を仮定すると，真のクラスとなっている強制法の概念 P で，G が P-generic なら，V と $V[G]$ は同じ基数と共終数を持ち，ある $a \in \mathcal{P}(\omega) \cap V[G]$ に対し，

$$V[G] \models V = L[a]$$

となるようなものが存在する． ⊣

のみならず，P による強制は，弱コンパクト性のような $V = L$ と矛盾しない様々な巨大基数の性質も保存する．1980 年代の中頃，サイ・フリートマンは Sy Friedman [94] でイェンセンの証明を S. Friedman [87, 87a] でのさらに強力な‘強コーディング’のテクニック方向で改良/簡略化している．1989 年にシェラハとスタンレイ (Lee Stanley) は $0^\#$ が存在しないという仮定のもとでの，イェンセンのコーディングに関するもとの結果の，短い証明を発見している（Stanley-Shelah [90, 95, 95a] を参照）．この後に S. フリートマン S. Friedman [∞∞] も同様の結果を得ている．

イェンセンは，14.13 でのような実数 a で $0^\# \notin L[a]$ だが，L 上で集合-generic でないようなものが存在することの ZFC との相対的無矛盾性も証明して，このような a が $0^\#$ から直接に構成できることを示している：

14.14 定理 (Jensen – Beller-Jensen-Welch [82]). $0^\#$ が存在すると仮定する．このとき $a \subseteq \omega$ で，$a <_c 0^\#$ だが，L 上で集合-generic でないようなものが存在する． ⊣

真のクラスの強制法の概念も考慮に入れることで，L 上 generic ということのより自由な解釈を与えることができる；これのいくつかの定式化の可能性については Beller-Jensen-Welch [82: 155] を参照されたい．M を内部モデルとする．$P \subseteq M$ として，$\langle M, P \rangle$ が**従順**とは，すべての $x \in M$ に対し，$P \cap x \in M$ となることとする．これは，P が M の意味での（定義可能な）クラスとなっている，という条件より弱いものとなっていることに注意する．$a \subseteq \mathrm{On}$ が M 上で**従順-generic** であるとはクラスの p.o. P で $\langle M, P \rangle$ が従順となるものがあり，M 上 P-generic な（つまり，通常の generic であることの条件に，G はすべての P の M で定義可能な稠密な部分クラスと共通部分を持つという条件を加えたものが成り立つような）G があって，$a \in M[G]$ となることとする．$0^\#$ は L 上従順-generic ではない．サイ・フリートマンはハイパークラス（つまりクラスのクラス）による強制法の概念を確立して，$0^\#$ が存在するなら，$a \subseteq \omega$ で $a <_c 0^\#$ だが，a は L 上で従順-generic でないようなものが存在することを示している．スタンレイ Mack Stanley[94] は，それを含まないような，任意の内部モデル上で従順-generic とならない実数の存在の無矛盾性を示している（しかし，スタンレイの実数の存在は $0^\#$ の存在とは共存不可能である）．

ソロヴェイの二番目の仮説は，$0^\#$ の定義可能性と，より直接的に関連するものであった．$x \in {}^\omega\omega$, あるいは，$x \subseteq \omega$ をその特徴関数により ${}^\omega 2$ の元と見なしたとき，

$$x \text{ は } \Pi^1_n \text{ 一元集合} \;\Leftrightarrow\; \{x\} \text{ は } {}^\omega\omega \text{ の } \Pi^1_n \text{ 部分集合となる}$$

とする．13.15 の $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ 絶対性により，Π^1_2 一元集合はそれを含むようなすべての内部モデルで，それを定義する論理式によって定義可能となる．14.11 により $0^\#$ は $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ 一元集合となっている．この絶対的な定義可能性は構造的に強い制限を与えるように見えることから，ソロヴェイは，次の Π^1_2 **一元集合の仮説**を立てた：

Π^1_2 一元集合 a で $a \notin L$ だが $a <_c 0^\#$ となるようなものは存在しない．

つまり，$0^\#$ は構成可能でない Π^1_2 一元集合のうち，相対的構成可能性に関して極小になっているという仮説である．これに関連した最初の仕事は，Jensen-Solovay [70], Jensen [70], Jensen-Johnsbråten [74] での，巨大基数の仮説を用いずに Π^1_2 一元集合を ZFC のモデルに付加するような，いくつかの強制法の概念の発見であった．これらは非常にエレガントな構成法であるが，$0^\#$ が存在するときには，Π^1_2 一元集合を作りだすことができないものであった．これらのうちではイェンセンとヨンスブラーテンによる実数が一番絶対的なものとなっている：$\omega^L_1 = \omega_1$ なら，これは Π^1_2 一元集合となる．イェンセンのコーディングの技術をふまえて，何人かの人々はこの仮説にもっと直接に関わる結果を確立した．例えば，ダヴィッド René David [82] は構成可能でない実数 a で，$a <_c 0^\#$ となり，任意の $L[a]$ 上で集合-generic な $b \subseteq \mathrm{On}$ に対し，a は $L[a][b]$ で（このような b のすべてに対して同一の Π^1_2 論理式によって）Π^1_2 一元集合となるようなものが存在することを示している．David [84, 89] では $0^\#$ の様々な性質に似たものを満たすような generic 拡大での実数の構成が与えられている．この後，フリートマンはついにソロヴェイの仮定を正面から否定する結果を得ている：

14.15 定理 (S. Friedman [90]). $0^\#$ が存在するなら，Π^1_2 一元集合 a で $a \notin L$ だが，$a <_c 0^\#$ となるものが存在する． ⊣

イェンセンの結果 14.14 を知ってソロヴェイは彼のもとの仮説の否定の予想をするようになったが，これがフリートマンを S. Friedman [90] での結果へ導いたのだった．

ソロヴェイの立てた三番目の仮説は，Π^1_2 一元集合を含むような構成可能性の度数はすべて $\#$ の繰り返しの適用によって得られるという主張を含むものであった．これはフリートマンの仕事により否定されることになるのだが，それより前にハリントンとケクリス Harrington-Kechris [77] は Paris [74] に基づいて，この仮説をむしろ支持するように見える結果を得ている．彼等がそこで示したのは，$x \subseteq \omega$ が Π^1_2 一元集合なら，$0^\# \leq_c x$ あるいは $x^\# \equiv_c 0^\#$ のどちらから成り立つということであった．彼等は，これを相対化することにより，$0^\#$, $0^{\#\#}$, $0^{\#\#\#}, \ldots$ の構成可能性の度数は Π^1_2 一元集合のシャープの構成可能性の度数の初めの ω 個になっていることを注意している．

一様な識別不可能クラス

ソロヴェイの仮説が契機となって，射影的階層の二番目のレヴェルでの，シャープ，強制

法，定義可能性といった事柄に対するより深い理解が得られるようになった．もう一つの重要な動きは，次の節で述べるように，1960年代の終わり近く，射影的階層の三番目のレヴェルの分析にシャープが用いられるようになることを契機として始まっている．これを述べるための準備として，§9での理論を相対化された形で用いて，シャープの間の相互関係に関するいくつかの結果を確立しておくことにする．

上の Π^1_n 一元集合の議論までのところではシャープの理論のために実数を ω の部分集合と見なすと都合がよかったが，これは，クラス $L[A]$ が $A \subseteq \mathrm{On}$ に対してのみ定義されていたからである．以下では，実数を ${}^{\omega}\omega$ の元と考える必要がでてくる．$a \in {}^{\omega}\omega$ に対し，

$$a^{\#} = \{\langle n, a(n)\rangle \mid n \in \omega\}^{\#}$$

とおく．つまり，a を ω の部分集合としてコードしてこれのシャープを考える．ここで，

$$L[a] = L[\{\langle n, a(n)\rangle \mid n \in \omega\}],$$
$$I_a \text{ は } L[a] \text{ での対応する識別不可能クラス}$$

とする．さらに，$a \subseteq \omega$ あるいは $a \in {}^{\omega}\omega$ のときに，文脈によっては，

$$a^{\#} \subseteq \omega \text{ を特徴関数により } a^{\#} \in {}^{\omega}2 \text{ とも見なす}$$

ことにする．

14.11の相対化の一様性について記しておく：

14.16 演習

$$S(a,x) \ \leftrightarrow\ a^{\#} \text{ が存在する } \ \wedge\ x = a^{\#}$$

で定義される関係 $S \subseteq {}^{2}({}^{\omega}\omega)$ は Π^1_2 である． ⊣

$a \in {}^{\omega}\omega$ に対する，14.12(a)の相対化から，$a^{\#}$ の絶対性が導かれることはすぐに分かる．このことから，§9の $a^{\#}$ の定義での，$\langle L[a], \in, a\rangle$ での，スコーレム閉包等々に関する，識別不可能クラス I_a が $a^{\#}$ を含む任意の内部モデル M に対し絶対的となることが直ちに導かれるが，以下ではこれを事実として仮定する．9.14の相対化により得られる I_a の性質についても仮定する．例えば，I_a はすべての非可算基数を含む閉非有界なクラスで，$\delta \in I_a$ なら，$\langle L_\delta[a], \in, a\rangle \prec \langle L[a], \in, a\rangle$ となる．

$\forall a \in {}^{\omega}\omega(a^{\#}$ が存在する$)$ を仮定するとき，

$$I^* = \bigcap\nolimits_{a \in {}^{\omega}\omega} I_a$$

とおき，これを**一様識別不可能クラス**と呼ぶ．

14.17 演習 (ZF)

(a) $a, b \in {}^{\omega}\omega$, $a \in L[b]$ で $b^{\#}$ が存在するとする．このとき，$a^{\#}$ が存在して，$I_b \subseteq I_a$ となる．

(b) $\forall a \in {}^{\omega}\omega(a^{\#}$ が存在する$)$ とする．このとき，I^* はすべての非可算基数を含む閉非有界な順序数のクラスとなり，任意の $a \in {}^{\omega}\omega$ と $u \in I^*$ に対し $I_a \cap u$ は順序型 u を持つ．

ヒント (a) $a^\#$ の存在をいうためには，任意の $\lambda > \omega$ に対し，ある $\eta < \lambda$ があって（a の定義に現れる識別不可能クラスの元を捨て去ることで），$(I_b \cap \lambda) - \eta$ は $L_\lambda[a] \in L[b]$ での識別不可能集合となることに注意すればよい．

次に，$\gamma \notin I_a$ と仮定して，$\gamma \notin I_b$ を示す：まず，（$\mathcal{L}_\in(\dot{a})$ の）あるスコーレム項 t と I_a の元 $x_1 < \cdots < x_m < y_1 < \cdots < y_n$ で $x_m < \gamma < y_1$ となるものにより，

$$\gamma = t^{\langle L[a], \in, a\rangle}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$$

となるようにとる．§9 の remarkable condition (III) を相対化したものにより，y_i はすべて閉非有界なクラス $I_a \cap I_b$ の元となっているとしてよい．さらに (III) を適用することにより，各 x_i は $L[b]$ で $I_b - \{\gamma\}$ の元のみを用いて定義されているとしてよく，a は $L[b]$ で $I_b - (\gamma + 1)$ の元のみを用いて定義されているとしてよい．したがって，γ は $L[b]$ で $I_b - \{\gamma\}$ の元を用いて定義できるから，$\gamma \notin I_b$ である．

(b) 最後の主張を示すために，$a \in {}^\omega\omega$, $u \in I^*$ で，$\xi < u$ と仮定する．remarkable condition (III) と，すべての $b \in {}^\omega\omega$ に対し，u は I_b の極限となっていることが直ぐに分かることから，ξ は $\langle L[a^\#], \in, a^\#\rangle$ で $I_{a^\#} \cap u$ の元を用いて定義できる．したがって，$a^\#$ の絶対性により，I_a の ξ 番目の要素は $L[a^\#]$ で $I_{a^\#} \cap u$ の元を用いて定義できる．よって，この要素は（§9 の条件 (II) により） u より真に小さなものとなる．これはすべての $\xi < u$ に対し成り立つから，$I_a \cap u$ の順序型は u となっていることが帰結できる． ⊣

$\forall a \in {}^\omega\omega(a^\#$ が存在する$)$ として，

$$I^* = \{u_\xi \mid 0 < \xi \in \mathrm{On}\}$$

とする．ここに，u_ξ, は昇順に添数付けされているものとする．このとき，

$$u_1 = \omega_1 \quad \text{かつ} \quad \forall \xi > 0(u_\xi \leq \omega_\xi)$$

となる．等式は，すべての可算順序数はある実数によりコードされることから，また，不等式は，I^* がすべての非可算基数を含んでいることから分かる．

14.18 命題 (ZF) (Solovay). $\forall a \in {}^\omega\omega(a^\#$ が存在する$)$ として，$\xi > 0$ とする．このとき：

(a) $\mathrm{cf}(u_{\xi+1}) = \mathrm{cf}(u_2) \leq \omega_2$.

(b) すべての $\gamma < u_\xi$ に対し，$a \in {}^\omega\omega$, スコーレム項 t および $0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n < \xi$ で，

$$\gamma = t^{\langle L[a], \in, a\rangle}(u_{\xi_1}, \ldots, u_{\xi_n})$$

となるものが存在する．

証明 n: $\mathrm{On} \times {}^\omega\omega \to \mathrm{On}$ を，

$$n(\alpha, a) = 「\ I_a - (\alpha + 1) \text{ の最小元 }」$$

で定義する．このとき，任意の $\xi > 0$ に対し，

$$(*) \qquad \sup(\{n(u_\xi, a) \mid a \in {}^\omega\omega\}) = u_{\xi+1}$$

が成り立つ．これを示すには，$\leq$ は明らかだから，この最小上界が I^* の元となることをいえばよい．ところが任意の $b \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$\sup(\{n(u_\xi, a) \mid a \in {}^\omega\omega\}) = \sup(\{n(u_\xi, a) \mid a \in {}^\omega\omega \ \wedge \ b \in L[a]\})$$

となる；これは $a \in {}^\omega\omega$ に対し $\overline{a} \in {}^\omega\omega$ で $\{a, b\} \subseteq L[\overline{a}]$ となるものがとれることから，14.17(a) により分かる．I_b は閉じていることから後の方の最小上界は I_b の元となる．

(a) を確立するためには，

$$(**) \qquad n(u_1, a) = n(u_1, b) \text{ なら，任意の } \xi > 0 \text{ に対し，} n(u_\xi, a) = n(u_\xi, b) \text{ となる}$$

ことに注意する．これを示すには，$c \in {}^\omega\omega$ を a と b をコードするものとする．例えば $(c)_0 = a$, $(c)_1 = b$ となるようにとる．このとき，14.17(a) とシャープの絶対性から，論理式 $\psi(v_0)$ で任意の $x \in I_{c^\#}$ に対し，

$$n(x, a) = n(x, b) \quad \Leftrightarrow \quad \langle L[c^\#], \in, c^\# \rangle \models \psi[x]$$

となるものがある．したがって，識別不可能性から (**) が分かる．

(*) により，$\{n(u_1, a) \mid a \in {}^\omega\omega\}$ は u_2 で共終だが，(**) により，$n(u_1, a)$ を $n(u_\xi, a)$ に移す写像はうまく定義できる．したがって (a) が得られる．

(b) の証明は，ξ および γ に関する二重帰納法により行う．したがって，ある $\zeta > 0$ に対し $\xi = \zeta + 1$ となっていて $u_\zeta < \gamma < u_{\zeta+1}$ であるとしてよい．$\gamma \notin I^*$ としてよいから，ある $a \in {}^\omega\omega$ に対し，スコーレム項 t_0 と I_a の元 $x_1 < \cdots < x_m < y_1 < \cdots < y_n$ で $x_m < \gamma < y_1$ となるものをとって，

$$\gamma = t_0^{\langle L[a], \in, a \rangle}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$$

となるようにできる．x_i は I^* の元で置き換えることができる：帰納法の仮定から，各 x_i は，ある $a_i \in {}^\omega\omega$ により，$\langle L[a_i], \in, a_i \rangle$ で $u_{\zeta+1}$ より小さい I^* の元を用いて定義できる．したがって，ある（実際にはすべての）$I^* - u_{\zeta+1}$ の元 δ に対し，$\langle L_\delta[a_i], \in, a_i \rangle \prec \langle L[a_i], \in, a_i \rangle$ で定義できる．そこで，必要なら a を $a, a_1, \ldots, a_n$ をコードするような実数で置き換えて，δ を y_i に加え，14.17(a) と remarkable condition (III) を用いて，y_i を調節することにより，

$$(***) \qquad \gamma = t_1^{\langle L[a], \in, a \rangle}(u_{\xi_1}, \ldots, u_{\xi_r}, y_1, \ldots, y_n)$$

があるスコーレム項 t_1 と $\xi_1 < \cdots < \xi_r \leq \zeta$ に対して成り立っているとしてよい．

次に，初めに述べた考察 (*) により，$\gamma < u_{\zeta+1}$ だから，$b \in {}^\omega\omega$ で $\gamma < n(u_\zeta, b)$ となるものがとれる．前と同様に，14.17(a) と remarkable condition (III) により，必要なら a を a と b をコードする実数で置き換えることで，$b = a$ としてよい．

最後に，シャープの絶対性により (***) は，$L[a^\#]$ でも成り立っている．ここで remarkable condition (III) を $\gamma < n(u_\zeta, a)$ に適用して，I_a はすべての非可算基数を含んでいることを用いると y_i は，u_ζ より大きな，$L[a^\#]$ での意味での最初の n 個の基数で置き換え

られる．ところが，これらの基数は $L[a^\#]$ で u_ζ から定義できるから，あるスコーレム項 t_2 と $\xi_1 < \cdots < \xi_s < \zeta$ により，

$$\gamma = t_2^{\langle L[a^\#], \in, a^\# \rangle}(u_{\xi_1}, \ldots, u_{\xi_s}, u_\zeta)$$

とできて，証明が完了する．　⊣

14.18 が ZF で証明できることを後での必要のために注意しておく．選択公理のもとでは ω_3 はもちろん正則基数となり，$\omega_3 \in I^*$ だから，次が ZFC で帰結できる：

14.19 系　$u_n < \omega_3$ がすべての $n \leq \omega$ で成り立つ．

これらの結果は次の節で応用されることになる．

§15　シャープと $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合

マルティンとソロヴェイは，Martin-Solovay [69] でシャープの存在のもとでの $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合に関するいくつかの結果を確立したが，これが古典的な記述集合論の手法を拡張するために巨大基数の仮説を用いることの始まりであった．マルティンは，さらに $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合の強い形の木による表現を与えているが，これらの初期の研究は，十数年後に起こる，決定性の公理のもとでの射影的集合の研究 (§§29, 30) や，この公理の巨大基数での相対的無矛盾性の研究 (§32) における，飛躍的な発展のための下地となった．このような壮大な背景から見ると，$\mathbf{\Sigma}^1_3$ に関するこれらの結果は，過渡的なもののように思えるが，これらは，後に続く壮麗な建造の基礎となることになるもので，$\mathbf{\Sigma}^1_2$ の基盤の十分近くに位置することから，絶対性の議論において重要なものとなっている．

前の節とは違い，この節は単一の技術的な発展にあてられるが，これの発展は後の一般化を動機付けることになるもので，これにより，射影的集合の分析が巨大基数のもとで明快な文脈で行なわれるようになる様子を具体的に見ることができる．$\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合の木による表現は，その原形が Martin-Solovay [69] に見いだせるが，Mansfield [71] で可測基数を用いたものがはっきりとした形で与えられている．このアプローチは，それ自身重要なものであり，分かりやすい単純な形をしているので，まずこれをとりあげる．この後，この文脈をさらに精密化して，マルティンによる結果でのように，シャープたちの存在から結果を導き出す形に改良する．Kechris [81] がここでの良い参考文献となる．

ここでのアイデアは，$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合の木による表現が $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合の木による表現から得られたときのやり方をまねて，$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合に対する表現に基づく $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合の木による表現を確立することである．13.13 と 13.14 を復習すると，すべての $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合は ω-スースリンで，これから $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合が ω_1-スースリンであることを示すには，すべての $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合が ω_1-スースリンであることが示せればよかった．ここで，$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ が $\mathbf{\Pi}^1_1$ なら，${}^k\omega \times \omega$ 上の木 T があって，任意の $\mathbf{w} \in {}^k({}^\omega\omega)$ に対し，

$$\begin{aligned} A(\mathbf{w}) &\leftrightarrow \mathbf{w} \notin p[T] \\ &\leftrightarrow T_{\mathbf{w}} \text{ は整順的} \\ &\leftrightarrow \exists g(g\colon T_{\mathbf{w}} \to \omega_1 \text{ は順序を保存する写像}) \\ &\leftrightarrow \mathbf{w} \in p[\hat{T}] \end{aligned}$$

となる．ここに $\hat{T}$ は T から 13.14 の証明で定義されるような ${}^k\omega \times \omega_1$ 上の木である．このようにして，$\mathbf{\Sigma}^1_1$ の木による表現は，整順性という Π^{ZF}_1 の性質と，順序を保存する写像を持つという Σ^{ZF}_1 の性質との同値性，および，後者の写像を近似する新しい木を介して，$\mathbf{\Pi}^1_1$ のそれへと変換されたのであった．

$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合の木による表現を，同様に “双対化” して $\mathbf{\Pi}^1_2$ 集合の木による表現を得ることができ，したがって，これから $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合の木による表現が得られる．このために，まず，もう少し特殊な形をした $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合の表現を導入する必要がある：

$B \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ を $\mathbf{\Sigma}^1_2$ とする．簡単のために $k=1$ として，T を，${}^2\omega \times \omega$ 上の木で，任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$B(x) \ \leftrightarrow\ \exists^1 y(T_{\langle x,y\rangle} \text{ は整順的})$$

となるものとする．T はある実数上で帰納的な関係から定義されるものとしてとれる (13.1).

${}^{<\omega}\omega$ の枚挙 $\langle \mathbf{s}_i \mid i \in \omega\rangle$ で，$|\mathbf{s}_i| \le i$ となるようなものが固定されていたが，これを用いて，ω 上の線型順序 $<_{x,y}$ を，

$$\begin{aligned} i <_{x,y} j \ \leftrightarrow\ & \mathbf{s}_i \notin T_{\langle x,y\rangle} \ \wedge\ \mathbf{s}_j \notin T_{\langle x,y\rangle} \ \wedge\ i<j\text{；または} \\ & \mathbf{s}_i \notin T_{\langle x,y\rangle} \ \wedge\ \mathbf{s}_j \in T_{\langle x,y\rangle}\text{；または} \\ & \mathbf{s}_i \in T_{\langle x,y\rangle} \ \wedge\ \mathbf{s}_j \in T_{\langle x,y\rangle} \ \wedge\ \mathbf{s}_i <_{\mathrm{KB}} \mathbf{s}_j \end{aligned}$$

で定義する．ここに，$<_{\mathrm{KB}}$ は 13.2 の前で定義されていたクリーニ=ブラウアー順序である．つまり，$\mathbf{s}_i$ が $T_{\langle x,y\rangle}$ に現れないような i はこの添数付きの順序で先に現れ，これに $\mathbf{s}_i$ が $T_{\langle x,y\rangle}$ に含まれるような i が，$<_{\mathrm{KB}}$ で順序付けられて続くようになっている．$\langle\emptyset,\emptyset,\emptyset\rangle \in T$ で,（$|s_i| \le i$ により）$\mathbf{s}_0 = \emptyset$ だから，$<_{\mathrm{KB}}$ の定義により，0 は $<_{x,y}$ での最大元となる．次の補題は，13.2 から帰結される：

15.1 補題　任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，$B(x) \leftrightarrow \exists^1 y$ ($<_{x,y}$ は整列順序である）となる．　⊣

$s,t \in {}^{<\omega}\omega$ で $|s|=|t|$ となるものについて，ここでは暫定的に，

$$T_{\langle s,t\rangle} = \{w \mid \exists m < |s|(\langle s|m, t|m, w\rangle \in T)\}$$

として，

$$<_{s,t} = \ulcorner |s| = \{i \mid i < |s|\} \text{ の線型順序で，} T_{\langle x,y\rangle} \text{ のかわりに } T_{\langle s,t\rangle} \text{ を用いて } <_{x,y} \text{ と同様にして定義されるもの}\urcorner$$

とする．$|s|>0$ なら，0 はここでも $<_{s,t}$ の最大元となっている．$s,t,\bar{s},\bar{t} \in {}^{<\omega}\omega$ で，$|\bar{s}|=|\bar{t}|$ かつ，ある $m \le |\bar{s}|$ に対し，$s=\bar{s}|m$, $t=\bar{t}|m$ なら，$|\mathbf{s}_i| \le i$ により，$\mathbf{s}_i \in T_{\langle s,t\rangle}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{s}_i \in T_{\langle\bar{s},\bar{t}\rangle}$ がすべての $i<m$ に対し成り立つ．したがって，$<_{s,t} \subseteq <_{\bar{s},\bar{t}}$ となってい

る．同様に $x, y \in {}^\omega\omega$ に対し

$$i <_{x,y} j \quad \Leftrightarrow \quad i <_{x|m,y|m} j$$

が $i, j < m$ となるような任意の $m \in \omega$ に対し成り立つから，

$$(*) \qquad <_{x,y} = \bigcup_{m\in\omega} <_{x|m,y|m}$$

となる．

ここで，後で具体的に特定されることになる正則基数 $\kappa > \omega$ を用いて，${}^2\omega \times \kappa$ 上の木 T^* を

$$T^* = \{\langle s,t,u\rangle \in \bigcup_{m\in\omega}({}^m\omega \times {}^m\omega \times {}^m\kappa) \mid \forall i,j < |s|(u(i) < u(j) \leftrightarrow i <_{s,t} j)\}$$

により定義する．T^* は 13.14 で $\kappa = \omega_1$ として定義された $\hat{T}$ と似たものであるが，ここでは $<_{s,t}$ が線型であることから，"$\leftrightarrow$" とすることができている．次のものは 15.1 と $(*)$ からの帰結である：

15.2 補題 任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，$B(x) \leftrightarrow \exists^1 y \exists g \in {}^\omega\kappa(\langle x,y,g\rangle \in [T^*])$ となる． ⊣

$\mathbf{\Pi}^1_2$ 集合の木による表現を得るために，$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ をこのような集合と仮定する．再び $k=1$ として，A は上のような B の補集合と考えられるから，任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$\begin{aligned} A(x) &\leftrightarrow \forall^1 y \forall g \in {}^\omega\kappa \exists^0 m(\langle x|m, y|m, g|m\rangle \notin T^*) \\ &\leftrightarrow T^*_x \text{ は整順的である} \end{aligned}$$

となる．これを $\mathbf{\Pi}^1_1$ の場合と同様に変形すると，T^*_x は κ に埋め込めるから，12.9(a) により，これは（ZF で）T^*_x から κ^+ への順序を保存する写像の存在と同値になる．このことの有用さは後でもっと明らかになるのであるが，ここでの κ^+ は κ で置き換えることができる：

まず，B の定義で $<_{s,t}$ の極大元は $\emptyset$ となっているから，$\langle s,t,u\rangle \in T^*$ で $|s| > 0$ なら，$u(0) = \max(\mathrm{ran}(u))$ となる．次に，$T^*_x(= \{\langle t,u\rangle \mid \exists^0 m(\langle x|m,t,u\rangle \in T^*)\})$ 上の真の順序 $<_{\mathrm{KB}^2}$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} \langle t,u\rangle <_{\mathrm{KB}^2} \langle \bar{t},\bar{u}\rangle \quad \Leftrightarrow \quad & t = u = \emptyset \ \wedge \ |\bar{t}| = |\bar{u}| > 0\text{；または} \\ & t \supset \bar{t} \ \wedge \ u \supset \bar{u}\text{；または} \\ & \exists m < |t|(t|m = \bar{t}|m \ \wedge \ u|m = \bar{u}|m \ \wedge \\ & (u(m) < \bar{u}(m) \ \vee \ (u(m) = \bar{u}(m) \ \wedge \ t(m) < \bar{t}(m)))). \end{aligned}$$

したがって，$\langle\emptyset,\emptyset\rangle$ が極小元となり，他の $\langle t,u\rangle$ は $<_{\mathrm{KB}}$ の辞書式版により順序付けられる．$\langle t,u\rangle <_{\mathrm{KB}^2} \langle\bar{t},\bar{u}\rangle$ なら，$u = \emptyset$ であるか，あるいは $u(0) \leq \bar{u}(0)$ となる，また上で注意したように $u(0) = \max(\mathrm{ran}(u))$ だから，$\langle\bar{t},\bar{u}\rangle$ より前の元の全体は濃度 $|{}^{<\omega}\omega \times {}^{<\omega}(\bar{u}(0)+1)| < \kappa$ を持つ．他方，$\{\langle\langle 0\rangle,\langle\xi\rangle\rangle \mid \xi < \kappa\}$ は T^*_x の部分集合で，$<_{\mathrm{KB}^2}$ に関し順序型 κ を持つ．したがって，$<_{\mathrm{KB}}$ でと同じ議論により，

$$T_x^* \text{ は整順的} \quad \Leftrightarrow \quad T_x^* \text{ は } <_{\mathrm{KB}^2} \text{ により順序型 } \kappa \text{ に整列される},$$

となることが分かる．$\langle\emptyset,\emptyset\rangle$ は $<_{\mathrm{KB}^2}$ の極小元となって順序型が（$\kappa+1$ でなく）κ になっているが，T_x^* の整順性は（12.9 の前で述べたように）$\supset^*$ に関してのものとなっており，これに関しては，$\langle\emptyset,\emptyset\rangle$ が極大元となる．これを認めると，次が得られる：

15.3 補題 任意の $x\in{}^\omega\omega$ に対し，

$$A(x)\leftrightarrow\exists f(f\colon T_x^*-\{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\}\to\kappa \text{ は順序を保存する写像である})$$

が成り立つ． ⊣

これは木の無限枝を得るということ（13.14 を参照）に関する言いかえとなっている：$s,t\in{}^{<\omega}\omega$ で $|s|=|t|$ となるものに対し，

$$T_{s,t}^*=\{u\mid\langle s,t,u\rangle\in T^*\}$$

とおく．このとき，$s\in{}^{<\omega}\omega$ として，

$\langle h_i\mid i<|s|\rangle$ は s に対し順序的 $\quad\Leftrightarrow\quad$ $i,j<|s|$ に対し，
(a) $h_i\colon T^*_{s||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i}\to\kappa$ かつ
(b) もし $\mathbf{s}_i\supset\mathbf{s}_j\neq\emptyset$ で， $u\in T^*_{s||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i}$ なら， $h_i(u)<h_j(u||\mathbf{s}_j|)$

とする（$h_0\colon\{\emptyset\}\to\kappa$ は $\langle\emptyset,\emptyset\rangle\in T_x^*$ に対応するが，(b) はこれに対しては何の制限も加えない）．ここで，

$$T^+=\{\langle s,\langle h_i\mid i<|s|\rangle\rangle\mid s\in{}^{<\omega}\omega\ \wedge\ \langle h_i\mid i<|s|\rangle \text{ は } s \text{ に対し順序的}\}$$

とする．このとき，次は直ちに分かる．

15.4 補題 任意の $x\in{}^\omega\omega$ に対し，$A(x)\leftrightarrow\exists h\forall^0 m(\langle x|m,h|m\rangle\in T^+)$ となる． ⊣

これは順序数ではなく，順序数を値に持つ関数 h_i で木を構成するようなものに対する一種のスースリンの性質となっている．最後のステップは h_i たちを一貫性のあるやり方でランク付けすることを含む．ここでの決定的なアイデアは h_i を，**それらが整順的な超巾で表現する順序数に対応付ける**，ということである．

まず木 T^* が次の**一様性の性質**を持つことに注意する：$s,t\in{}^{<\omega}\omega$ で $|s|=|t|$ となるものに対し，$<_{s,t}$ は真の線型順序となっているから，任意の $u\in T_{s,t}^*$ に対し，$\mathrm{ran}(u)\in[\kappa]^{|s|}$ である．さらに，すべての $w\in[\kappa]^{|s|}$ に対し，$\mathrm{ran}(u)=w$ となる $u\in T_{s,t}^*$ が，w の要素を T^* の定義を満たすよう順序付けるものとして，一意に決まる．したがって，**この関数の定義域を与える** $\mathrm{ran}:T_{s,t}^*\to[\kappa]^{|s|}$ **は全単射となる．**

ここで κ を可測基数として特定する． T^* の一様性を用いて，$T_{s,t}^*$ 上の超フィルターの族を次のようにして定義する：U を κ 上の正規超フィルターとするとき，$|s|=|t|$ となる $s,t\in{}^{<\omega}\omega$ に対し，$U_{s,t}$ を：

$$X\in U_{s,t}\quad\Leftrightarrow\quad X\subseteq T_{s,t}^*\ \wedge\ \exists H\in U([H]^{|s|}\subseteq\mathrm{ran}``X)$$

として定義する．ローボトムの結果 7.17 により，任意の $n \in \omega$ と $Y \subseteq [\kappa]^n$ に対し，$H \in U$ で，$[H]^n \subseteq Y$ であるか，または $[H]^n \cap Y = \emptyset$ となるかのどちらかであるようなものが存在する．したがって，$U_{s,t}$ は $T^*_{s,t}$ 上の κ-完備な超フィルターとなる（ここでは，記法の便宜から，これまでの取り決めをやぶって単項フィルター $U_{\emptyset,\emptyset} = \{\{\emptyset\}\}$ も許すことにする）．

$$j_{s,t}\colon V \prec M_{s,t} \cong \mathrm{Ult}(V, U_{s,t})$$

とする（したがって，$j_{\emptyset,\emptyset}$ は恒等写像で $M_{\emptyset,\emptyset} = V$ となる）．各 $\langle s, \langle h_i \mid i < |s| \rangle\rangle \in T^+$ に対し，h_i を超巾 $M_{s||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i}$ でそれが代表元となるような順序数 $[h_i]$ で置き換える．順序的であることの条件 (a) により $[h_i] < j_{s||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i}(\kappa)$ となるから，この結果は $\omega \times \gamma_U$ 上の木となる．ここに，

$$\gamma_U = \sup(\{j_{s,t}(\kappa) \mid s,t \in {}^{<\omega}\omega \ \wedge \ |s| = |t|\})$$

とする（実は γ_U は U に関する簡明な表現を持つのだが，この事実はここでは必要でない）．

順序的であることの条件 (b) を順序数によって表現するために，次の**一貫性の性質**に注意する：$s, t, \overline{s}, \overline{t} \in {}^{<\omega}\omega$ で，例えば $|\overline{s}| = |\overline{t}| = n$ となっており，ある $m \leq n$ に対し，$s = \overline{s}|m$, $t = \overline{t}|m$ なら，$H \in U$ に対し，$[H]^m \subseteq \mathrm{ran}\text{“}X \ \Leftrightarrow \ [H]^n \subseteq \{w \in [\kappa]^n \mid [w]^m \subseteq \mathrm{ran}\text{“}X\}$ となるから，

$$X \in U_{s,t} \quad \Leftrightarrow \quad \{u \in T^*_{\overline{s},\overline{t}} \mid u|m \in X\} \in U_{\overline{s},\overline{t}}$$

である．容易に確かめられるように，対応する初等的埋め込み $j_{\langle s,t\rangle,\langle \overline{s},\overline{t}\rangle}\colon M_{s,t} \prec M_{\overline{s},\overline{t}}$ が，

$$j_{\langle s,t\rangle,\langle \overline{s},\overline{t}\rangle}([f]_{U_{s,t}}) = [\langle f(u|m) \mid u \in T^*_{\overline{s},\overline{t}}\rangle]_{U_{\overline{s},\overline{t}}}$$

で定義され，$j_{\langle s,t\rangle,\langle \overline{s},\overline{t}\rangle} \circ j_{s,t} = j_{\overline{s},\overline{t}}$ を満たす．T^+ を，次のような $\omega \times \gamma_U$ 上の木として捉えなおすことにより，条件 (b) に適切な表現を与えることができる：

$$\begin{aligned}\tilde{T} = \{\langle s, \langle \delta_i \mid i < |s|\rangle\rangle \in \textstyle\bigcup_{m\in\omega}({}^m\omega \times {}^m\gamma_U) \mid \\ \forall i, j < |s|(\mathbf{s}_i \supset \mathbf{s}_j \neq \emptyset \ \to \ \delta_i < j_{\langle s||\mathbf{s}_j|,\mathbf{s}_j\rangle,\langle s||\mathbf{s}_i,\mathbf{s}_i\rangle}(\delta_j))\}\,.\end{aligned}$$

$U_{s,t}$ の一貫性の性質は本物のスースリンの性質を与える：

15.5 命題 $A = p[\tilde{T}]$.

証明 15.4 での T^+ の枝に関する A の特徴付けと，$\tilde{T}$ の T^+ からの定義のされ方から，$A \subseteq p[\tilde{T}]$ となることがすぐに導ける．

逆に，$x \in p[\tilde{T}]$ として，例えば，$\langle x, g\rangle \in [\tilde{T}]$ となっているとする．$i \in \omega$ に対し，$h_i\colon T^*_{x||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i} \to \mathrm{On}$ を $g(i) = [h_i]$ が $M_{x||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i}$ で成り立つようにとる．このとき，$\tilde{T}$ の定義から，$\mathbf{s}_i \supset \mathbf{s}_j \neq \emptyset$ に対し，

$$\{u \in T^*_{x||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i} \mid h_i(u) < h_j(u||\mathbf{s}_j|)\} \in U_{x||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i}$$

となり，したがって，$X_{ij} \in U$ で，

$$(\dagger) \qquad \mathrm{ran}(u) \in [X_{ij}]^{|\mathbf{s}_i|} \to h_i(u) < h_j(u||\mathbf{s}_j|)$$

となるものがある．$Y = \bigcap\{X_{ij} \mid i, j \in \omega \ \wedge\ \mathbf{s}_i \supset \mathbf{s}_j \neq \emptyset\} \in U$ とおく．

ここで反対に $\neg A(x)$ だったとしてみる．B に関して 15.1 に立ち戻ると，$y \in {}^{\omega}\omega$ で $<_{x,y}$ が整列順序となるものが存在する．Y は非可算だから，関数 $d\colon \omega \to Y$ で $i, j \in \omega$ に対し，

$$d(i) < d(j) \quad \Leftrightarrow \quad i <_{x,y} j$$

となるものがある．このことから，すべての $m \in \omega$ に対し，$d|m \in T^*_{x|m,y|m}$ となることが分かり，したがって (†) から，$y \supset \mathbf{s}_i \supset \mathbf{s}_j \neq \emptyset$ のときには $h_i(d||\mathbf{s}_i|) < h_j(d||\mathbf{s}_j|)$ が常に成り立つことが分かる．これから順序数の無限下降列が構成できてしまうが，これは矛盾である．　⊣

上での分析は，すぐに，可測性より弱い，ある仮説に適用されることになるのであるが，我々は，ここではむしろこれの強さに着目して，$\tilde{T}$ の定義可能性に起因する興味深く有用な帰結を導く．この結果は $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 絶対性 13.15 を拡張するものとなっており，13.15 の前の解析的な関係の標準型の意味での相対化と，それに対応する絶対性の記述に関する議論に適用することができる．

15.6 定理　(Martin-Solovay [69: 152])．A を上でのような $\mathbf{\Pi}^1_2$ 集合として，$\tilde{T}$ をこれに対応して κ 上の正規超フィルター U から定義された木とし，P は $|P| < \kappa$ となる p.o. とする．このとき，

$$\exists^1 x A(x) \quad \Leftrightarrow \quad \Vdash_P \exists^1 x A(x)$$

となる．したがって，もし可測基数が存在するなら，任意の $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 関係は，濃度がこれより小さいすべての p.o. P による generic 拡大で，V に対し絶対的となる．

証明　レヴィとソロヴェイの結果 10.15 での議論により，

$$\Vdash \dot{U} = \{Y \subseteq \kappa \mid \exists X \in \check{U}(X \subseteq Y)\}$$

は κ 上の κ-完備超フィルターとなっている．さらに，その議論での (∗) にローボトムの 7.17 を取り込むことにより，次が得られる：$n \in \omega$ で，$p \Vdash \dot{\tau}\colon [\kappa]^n \to \check{V}$ となっているなら，$q \leq p$, $Z \in U$ と $f\colon [Z]^n \to V$ で $q \Vdash \dot{\tau}|[\check{Z}] = \check{f}$ となるものが存在する．

ここで，G を P-generic としてみる．このとき，今までに示した性質により，$s, t \in {}^{<\omega}\omega$ で $|s| = |t|$ となるものに対し，$j^G_{s,t}$ を，ちょうど $j_{s,t}$ が V で U から定義されたときと同じように $V[G]$ で $\dot{U}^G$ から定義さたものとすると，$j^G_{s,t}$ と $j_{s,t}$ は順序数の上で一致することは容易に確かめられる．したがって，$\tilde{T}^G$ を，$\tilde{T}$ が V で定義されたときと同じように $V[G]$ で定義されたものとすると，$\tilde{T}^G = \tilde{T}$ となる．

この絶対性を用いると，13.15 と同様に議論を終えることができる：V で $A(x)$ となる $x \in {}^{\omega}\omega$ が存在するとすると，$x \in p[\tilde{T}] \subseteq (p[\tilde{T}])^{V[G]}$ となるから，$A^{V[G]}(x)$ である．逆に，V で $A(x)$ となる $x \in {}^{\omega}\omega$ が存在しないなら，$[\tilde{T}] = \emptyset$ である．つまり，$\tilde{T}$ は整順的で，したがって，順序を保存する写像: $\tilde{T} \to \mathrm{On}$ が存在する．このような写像は $V[G]$ でも存在するから，$[\tilde{T}]^{V[G]} = \emptyset$ となる．つまり，$V[G]$ で $A^{V[G]}(x)$ となる $x \in {}^{\omega}\omega$ は存在しない．　⊣

したがって，可測基数からなる真のクラスが存在すれば，$\mathbf{\Sigma}^1_3$ 関係は，V に対し任意の generic 拡大で絶対的となる．

次に，$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合の別の分析法について述べる．この方法はここでは必要とならないが，15.5 はこの方法によって確立することもできる．このアプローチは強い仮定を用いて射影的階層上で一般化をするときの基礎となるものである（弱一様木に関する 32.6 を参照）．

$x, y \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$\langle\langle M_{x|m,y|m} \mid m \in \omega\rangle, \langle j_{\langle x|m,y|m\rangle,\langle x|n,y|n\rangle} \mid m \leq n\rangle\rangle$$

が順系 (§0) となることは容易に確かめられるから，$\langle M_{x,y}, E_{x,y}\rangle$ をこれの順極限として，$k_{x|m,y|m}\colon \langle M_{x|m,y|m}, \in\rangle \prec \langle M_{x,y}, E_{x,y}\rangle$ を対応する埋め込みとする．したがって，$m \leq n$ なら，

$$k_{x|n,y|n} \circ j_{\langle x|m,y|m\rangle,\langle x|n,y|n\rangle} = k_{x|m,y|m}$$

となっているとする．以下では，B は $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合で上と同じように A の補集合となっているものとする．

15.7 演習

(a) 任意の $x, y \in {}^\omega\omega$ に対し，$\langle M_{x,y}, E_{x,y}\rangle$ が整順的となるのは，

(∗) 各 $m \in \omega$ に対し，$X_m \in U_{x|m,y|m}$ なら，$d \in {}^\omega\kappa$ で，$d|m \in X_m$ がすべての $m \in \omega$ に対し成り立つものが存在する，

ちょうどそのときである．

(b) 任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$B(x) \leftrightarrow \exists^1 y(\langle M_{x,y}, E_{x,y}\rangle \text{ は整順的})$$

となる．

ヒント (a) (∗) が成り立つと仮定して，逆に，$\langle M_{x,y}, E_{x,y}\rangle$ が整順的でないとしてみる．つまり，$\{z_i \mid i \in \omega\} \subseteq M_{x,y}$ で $z_{i+1}\, E_{x,y}\, z_i$ がすてべの $i \in \omega$ に対し成り立つものが存在する．各 i に対し，$m_i \in \omega$ と $h_i\colon T^*_{x|m_i,y|m_i} \to V$ を $k_{x|m_i,y|m_i}([h_i]) = z_i$ で，$m_i \leq m_{i+1}$ となるようにとる．このとき，

$$[h_{i+1}] \;\in\; j_{\langle x|m_i,y|m_i\rangle,\langle x|m_{i+1},y|m_{i+1}\rangle}[h_i]$$

がすべての $i \in \omega$ に対し成り立つ．これは 15.5 でと類似の状況であるので，(∗) を適用して，15.5 と同様な $d \in {}^\omega\kappa$ が得られ，これから矛盾が導ける．

次に (∗) が成り立たないと仮定する．つまり，$X_m \in U_{x|m,y|m}$, $m \in \omega$ で，どの $d \in {}^\omega\kappa$ に対しても，$d|m \in X_m$ がすべての $m \in \omega$ では成り立たないようなものがある．

$$W = \{w \in {}^{<\omega}\kappa \mid \forall m \leq |w|(w|m \in X_m)\}$$

とおく．このとき $\langle W, \supset\rangle$ は κ 上の整順的な木となり，したがってランク関数 ρ_W を持つ

（12.9の前を参照）．$U_{s,t}$ の一貫性の性質から，$W \cap X_m \in U_{x|m,y|m}$ がすべての $m \in \omega$ に対し成り立つ．ここで，$m \in \omega$ に対し，

$$k_{x|m+1,y|m+1}([\rho_W|(W \cap X_{m+1})]) \;\; E_{x,y} \;\; k_{x|m,y|m}([\rho_W|(W \cap X_m)])$$

となることを示せば，$M_{x,y}$ が整順的でないことが言える．

(b) $y \in {}^\omega\omega$ で，$\langle M_{x,y}, E_{x,y}\rangle$ が整順的となるようなものがあれば，$(*)$ により，$d \in {}^\omega\kappa$ で，$\langle x, y, d\rangle \in [T^*]$ となるものがある．したがって $B(x)$ である．逆は，15.5と同じように議論して，$<_{x,y}$ が整列順序になっているような $y \in {}^\omega\omega$ に対し，適当な $Y \in U$ に対して d: $\omega \to Y$ を見つけることで，$(*)$ を確立すればよい． ⊣

シャープを用いての分析

可測基数のもとで威力を発揮する $\mathbf{\Pi}^1_2$ 集合の（したがって $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合の）木による表現が確立できたので，今度は，この解析をさらに精密化して，

$$\forall a \in {}^\omega\omega(a^\# \text{ が存在する})$$

の仮定のみから得られるZFでの結果を確立する．この仮定は§14の終わりで考察したが，そこで確立された結果を以下で応用する．具体的には，マルティンが行なったように，Mansfield [71] でのアプローチを Martin-Solovay [69] でのもとの文脈に組み合せる．

$\mathbf{\Pi}^1_2$ 集合 A の T^+ の記述までに至る理論を用いて，最初に正規超フィルター U を妥当な対応物で置き換えることを行う．このために，まず

$$\kappa = \omega_1$$

とし，ω_1 上の閉非有界フィルター $\mathcal{C}_{\omega_1}$ を適当なクラスに制限したものを考える．$a \in {}^\omega\omega$ に対し，§14でのように，$L[a] = L[\{\langle n, a(n)\rangle \mid n \in \omega\}]$ だったことを思い出して，

$$\tilde{L} = \bigcup\nolimits_{a \in {}^\omega\omega} L[a]$$

とおく．つまり，$\tilde{L}$ はある実数から構成可能な集合の全体のクラスである．$\tilde{L} \subseteq L(\mathbb{R}) = L({}^\omega\omega)$ で，等式 $\tilde{L} = L(\mathbb{R})$ が成り立つのは，ある $a \in {}^\omega\omega$ に対し，$\mathbb{R} \in L[a]$ となる，ちょうどそのときで，これは，$\tilde{L}$ が内部モデルとなる，ちょうどそのときである．$\tilde{L}$ は，実数を扱うのに十分に豊かだが，シャープたちで制約されるほどに限られている，という意味で，ちょうどよいクラスとなっている．

15.8 補題　任意の $n \in \omega$ と $Y \in \mathcal{P}([\omega_1]^n) \cap \tilde{L}$ に対し，ω_1 で閉非有界な $H \in \tilde{L}$ で $[H]^n \subseteq Y$ であるか $[H]^n \cap Y = \emptyset$ であるかのいずれかの成り立つようなものが存在する．

証明　ある $a \in {}^\omega\omega$ に対し，$Y \in \mathcal{P}([\omega_1]^n) \cap L[a]$ であるとする．このとき，あるスコーレム項 t と I_a（$a^\#$ の識別不可能クラス）の元 $x_1 < \cdots < x_m < y_1 < \cdots < y_p$ で，$x_m < \omega_1 \leq y_1$ かつ，

$$Y = t^{\langle L[a], \in, a\rangle}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_p)$$

となるものがある．$H = I_a \cap (\omega_1 - (x_m + 1))$ とすれば，H は ω_1 で閉非有界で，分別不可能性から，$[H]^n \subseteq Y$ か $[H]^n \cap Y = \emptyset$ かのどちらかが成り立つ．$\dashv$

これにより，$\mathcal{C}_{\omega_1} \cap \tilde{L}$ を U の代わりに用いて，$s, t \in {}^{<\omega}\omega$ で $|s| = |t|$ となるものに対し，$U_{s,t}$ と類似の $\overline{U}_{s,t}$ を，

$$X \in \overline{U}_{s,t} \quad \Leftrightarrow \quad X \in \mathcal{P}(T^*_{s,t}) \cap \tilde{L} \ \wedge \ (\exists H \in \mathcal{C}_{\omega_1} \cap \tilde{L})([H]^{|s|} \subseteq \mathrm{ran}``X)$$

により定義することができる（前と同じように $\overline{U}_{\emptyset,\emptyset} = \{\{\emptyset\}\}$ も許す）．A が $\Pi^1_2(b)$ となるようなすべての $b \in {}^\omega\omega$ に対し，$T^* \in L[b] \subseteq \tilde{L}$ となることは容易に確かめられるから，$T^*_{s,t} \in \tilde{L}$ となることに注意する（13.14 を参照，そこでと同じように ω_1 は $\omega_1^{L[b]}$ とは異なる可能性がある）．15.8 により，$\overline{U}_{s,t}$ **は** $\mathcal{P}(T^*_{s,t}) \cap \tilde{L}$ **上の** ω_1**-完備超フィルターとなる**（動機付けとして与えたアナロジーによる我々のアプローチでは，$\mathcal{C}_{\omega_1} \cap \tilde{L}$ から可算個の H をここで選ぶためと，整順性から On への順序を保存する写像を得るために AC がある程度用いられている．このためには DC で十分であるが，結果のまとめ 15.12 でも述べるように，これらの選択原理は証明から除去することができる）．

前と同じように，一貫性の性質がある：$s, t, \bar{s}, \bar{t} \in {}^{<\omega}\omega$ で $|\bar{s}| = |\bar{t}|$, かつ，ある $m \leq |\bar{s}|$ に対し，$s = \bar{s}|m$, $t = \bar{t}|m$ なら，$X \in \mathcal{P}(T^*_{s,t}) \cap \tilde{L}$ に対し，

$$X \in \overline{U}_{s,t} \quad \Leftrightarrow \quad \{u \in T^*_{\bar{s},\bar{t}} \mid u|m \in X\} \in \overline{U}_{\bar{s},\bar{t}}$$

が成り立つ．

$j_{\langle s,t \rangle, \langle \bar{s},\bar{t} \rangle}$ に対応する写像はどうなるであろうか？ 必要となるのはこれらの On への制限，さらに言うと γ_U への制限のみが必要になることに注意する．そこで，まず，$|s| = |t|$ となる $s, t \in {}^{<\omega}\omega$ に対し，$\overline{U}_{s,t}$ による $\langle \mathrm{On}, < \rangle$ の超巾を，関数 : $T^*_{s,t} \to \mathrm{On}$ で $\tilde{L}$ の元となるもののみを用いて考える：

そのような関数 f に対し，

$$(f)_{\overline{U}_{s,t}} = \{g \in \tilde{L} \mid g\colon T^*_{s,t} \to \mathrm{On} \ \wedge \ \{u \in T^*_{s,t} \mid f(u) = g(u)\} \in \overline{U}_{s,t}\}$$

とおく（ある $a_0, a_1 \in {}^\omega\omega$ に対し，$f \in L[a_0], g \in L[a_1]$ なら，a_0 と a_1 をコードするような任意の $a \in {}^\omega\omega$ に対し，$\{f, g\} \subseteq L[a]$ となるから，$\{u \in T^*_{s,t} \mid f(u) = g(u)\} \in L[a] \subseteq \tilde{L}$ であることに注意する）．ここで $(f)^0_{\overline{U}_{s,t}}$ を§5 でのように $(f)_{\overline{U}_{s,t}}$ の元で極小なランクを持つものの全体とすれば，$(f)^0_{\overline{U}_{s,t}}$ は集合となる．ここで超巾の領域を，

$$^{T^*_{s,t}}\mathrm{On}/\overline{U}_{s,t} = \{(f)^0_{\overline{U}_{s,t}} \mid f\colon T^*_{s,t} \to \mathrm{On} \ \wedge \ f \in \tilde{L}\}$$

ときめ，これの上の順序 $<_{\overline{U}_{s,t}}$ を

$$(f)^0_{\overline{U}_{s,t}} <_{\overline{U}_{s,t}} (g)^0_{\overline{U}_{s,t}} \quad \Leftrightarrow \quad \{u \in T^*_{s,t} \mid f(u) < g(u)\} \in \overline{U}_{s,t}$$

により定義する（前と同様に $\{u \in T^*_{s,t} \mid f(u) < g(u)\} \in \tilde{L}$ となることに注意）．$\overline{U}_{s,t}$ は ω_1-完備だから，この超巾は整列集合になり（5.3 を参照），したがって，同型写像

$$\pi_{\overline{U}_{s,t}}\colon \langle^{T^*_{s,t}}\mathrm{On}/\overline{U}_{s,t}, <_{\overline{U}_{s,t}}\rangle \to \langle \mathrm{On}, <\rangle$$

が一意に存在する．§5 でと同じように，

$$[f]_{\overline{U}_{s,t}} = \pi_{\overline{U}_{s,t}}((f)^0_{\overline{U}_{s,t}})$$

とおく．$\overline{j}_{s,t}(\alpha) = [f_\alpha]_{\overline{U}_{s,t}}$ により与えられる，これに対応した超巾の埋め込み $\overline{j}_{s,t}\colon \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ が存在する．ここに f_α は定値関数：$T^*_{s,t} \to \{\alpha\}$ である．

$|s| = |t|$ となる $s, t, \overline{s}, \overline{t} \in {}^{<\omega}\omega$ で，ある $m \le |s|$ に対し，$s = \overline{s}|m$, $t = \overline{t}|m$ となっているとき，$j_{\langle s,t\rangle,\langle \overline{s},\overline{t}\rangle}$ と同様に，

$$\overline{j}_{\langle s,t\rangle,\langle \overline{s},\overline{t}\rangle}\colon \mathrm{On} \to \mathrm{On}$$

を，

$$\overline{j}_{\langle s,t\rangle,\langle \overline{s},\overline{t}\rangle}([f]_{\overline{U}_{s,t}}) = [\langle f(u|m) \mid u \in T^*_{\overline{s},\overline{t}}\rangle]_{\overline{U}_{\overline{s},\overline{t}}}$$

により定義する．これらの超フィルターの一貫性の性質から，このような写像は順序を保存するものとなることが分かる．

木 T^+ から，前のものと類似の $\tilde{T}$ が定義できる．ここでは，$\langle s, \langle h_i \mid i < |s|\rangle\rangle \in T^+$ に対し，h_i は，On の $\overline{U}_{s||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i}$ による超巾でそれが代表元となっているものに対応する順序数 $[h_i]$ で置き換えられる．順序的であることの条件 (a) により，$[h_i] < \overline{j}_{s||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i}(\omega_1)$ となるから，この結果として $\omega \times \overline{\gamma}$ 上の木が得られる．ここに，

$$\overline{\gamma} = \sup(\{\overline{j}_{s,t}(\omega_1) \mid s, t \in {}^{<\omega}\omega \;\wedge\; |s| = |t|\})$$

である．$\overline{\gamma}$ の詳しい分析から重要な帰結が幾つも導かれることになるが，ここでは，順序的であることの条件 (b) から新しい木を作り，これをここでも $\tilde{T}$ と呼ぶことにする：

$$\begin{aligned}\tilde{T} = \{\langle s, \langle \delta_i \mid i < |s|\rangle\rangle \in {\textstyle\bigcup_{m\in\omega}}({}^m\omega \times {}^m\overline{\gamma}) \mid \\ \forall i, j < |s|(\mathbf{s}_i \supset \mathbf{s}_j \ne \emptyset \;\to\; \delta_i < \overline{j}_{\langle s||\mathbf{s}_j|,\mathbf{s}_j\rangle,\langle s||\mathbf{s}_i,\mathbf{s}_i\rangle}(\delta_j))\}.\end{aligned}$$

ことのき，15.5 と類似の命題が成り立つ．

15.9 演習　$A = p[\tilde{T}]$ （$\tilde{T}$ ここでの新しい定義によるものである）．

ヒント　$A \subseteq p[\tilde{T}]$ を示すために，$x \in {}^\omega\omega$ で $A(x)$ としてみる．つまり，T^*_x は整順的である．A が $\Pi^1_2(b)$ となるような $b \in {}^\omega\omega$ に対し，$T^* \in L[b]$ となるから，$c \in {}^\omega\omega$ が b と x をコードしているなら，$T^*_x \in L[c]$ となる．$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 絶対性 13.15 でと同じように議論すると，T^*_x は $L[c]$ でも整順的であることが分かるから，15.3 を $L[c]$ で応用すると，順序を保存する写像 $f\colon T^*_x - \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\} \to \omega_1$ がとれる．このような写像は，集合 $\{h_i \mid i \in \omega\} \subseteq L[c] \subseteq \tilde{L}$ で，（T^+ の定義の意味で）すべての $m \in \omega$ に対し，$\langle x|m, \langle h_0, \ldots, h_{m-1}\rangle\rangle$ が順序的になるようなものとして捉えられる．したがって，$g\colon \omega \to \overline{\gamma}$ を $g(i) = [h_i]$ （$[h_i]$ は $\overline{U}_{x||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i}$ の意味での同値類）として定義すると，$\langle x, g\rangle \in [\tilde{T}]$ となり，このことから $x \in p[\tilde{T}]$ が分かる．

逆は 15.5 の証明とまったく同じにできる. ⊣

$\boldsymbol{\Pi}^1_2$ 集合に対するスースリン表現があるときには, $\boldsymbol{\Sigma}^1_3$ に対しても対応する表現があり, それらの絶対性や正規性について考察することができる. $x \in {}^\omega\omega$ に対し,

$$C(x) \leftrightarrow \exists^1 y D(x,y)$$

となるとしてみよう. ここに, $D \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ は, ある $a \in \omega$ に対し, $\Pi^1_2(a)$ であるとし, ある κ に対し, ${}^2\omega \times \kappa$ 上の木 T^D で, $D = p[T^D]$ となるものがあるとする. このとき,

$$C(x) \leftrightarrow T^D_x \text{ は整順的でない}$$

となる. 13.15 の前での, 解析的関係の標準型に関しての相対化と, これに対応する絶対性の定式化を思い出そう.

15.10 演習 (Mansfield [71]). M を $\{a, T^D\} \subseteq M$ となる内部モデルとする. このとき,
(a) C は M に対し絶対的である.
(b) ${}^\omega\omega \cap M$ が可算なら, C はルベーグ可測で, ベールの性質と完全集合の性質を持つ.

ヒント (a) 任意の $x \in {}^\omega\omega \cap M$ に対し,

$$\begin{aligned}
C(x) &\leftrightarrow T^D_x \text{ は整順的でない} \\
&\leftrightarrow (T^D_x \text{ は整順的でない})^M \\
&\leftrightarrow (\exists y \in {}^\omega\omega \cap M)(T^D_{\langle x,y\rangle} \text{ は整順的でない})^M \\
&\leftrightarrow (\exists y \in {}^\omega\omega \cap M)(T^D_{\langle x,y\rangle} \text{ は整順的でない}) \\
&\leftrightarrow (\exists y \in {}^\omega\omega \cap M)D(x,y) \\
&\leftrightarrow (\exists y \in {}^\omega\omega \cap M)D^M(x,y) \qquad (\boldsymbol{\Sigma}^1_2 \text{ 絶対性による}) \\
&\leftrightarrow C^M(x)
\end{aligned}$$

となる.
(b) 最初の 2 つの性質については, (a) により, ある論理式 φ に対し,

$$C = \{x \in {}^\omega\omega \mid M[x] \models \varphi[x]\}$$

となることに注意して, ソロヴェイの 14.1 と 14.2 での論法を用いればよい. 3 番目のものについては, 14.7 を適用する. ⊣

$\omega \times \overline{\gamma}$ 上の木 $\tilde{T}$ の重要性はこのような性質のみにあるのではなく, シャープによって文脈の中で最良のスースリンの性質が累積的階層の下の方で確立できることでもある. これは, §14 の終わりで論じたような一様な識別不可能クラス $\{u_\xi \mid 0 < \xi \in \mathrm{On}\}$ による $\overline{\gamma}$ の計算の結果として得られる. §14 で確立された結果から, 識別不可能クラスと $\tilde{T}$ の記述で出てきた超巾の埋め込みの間の, 次のような関係が確立できる:

15.11 補題 $s, t \in {}^{<\omega}\omega$ で $|s| = |t|$ とする. このとき,

$$\overline{j}_{s,t}(\omega_1) = u_{|s|+1}$$

となる.

証明　$\overline{j}_{s,t}(\omega_1)$ は,

$$\{[h]_{\overline{U}_{s,t}} \mid h\colon T^*_{s,t} \to \omega_1 \ \wedge \ h \in \tilde{L}\}$$

だから，一様識別不可能クラスの元 $u_{|s|+1}$ がこの順序数の集合と一致することを示せばよい.

$h\colon T^*_{s,t} \to \omega_1$ で $h \in \tilde{L}$ とする．このとき，ある $a \in {}^\omega\omega$ に対し，$h \in L[a]$ となり，さらに（$\omega_1 = u_1 < u_2$ だから），$L[a]$ での GCH の証明から，h は $L[a]$ の標準的な整列順序 (3.3(b)) で，ある $\gamma < u_2$ に対し，γ 番目の元となっている．14.18(b) をこの γ に適用して，必要なら a に他のものもコードする（あるいは 14.8(b) の証明でのように直接議論する）と，あるスコーレム項 t_1 に対し，

$$h = t_1^{\langle L[a], \in, a\rangle}(\omega_1)$$

となることが帰結できる.

$\overline{j}_{\emptyset,\emptyset}(\omega_1) = \omega_1 = u_1$ だから，以降，$|s| > 0$ と仮定してよい．T^* の定義から，一意に決まる置換 $\pi\colon |s| \to |s|$ で任意の $\xi_0 < \cdots < \xi_{|s|-1} < \omega_1$ に対し，$\langle \xi_{\pi(0)}, \ldots, \xi_{\pi(|s|-1)}\rangle \in T^*_{s,t}$ となるものがある．t_1 を少し調整すると，新しいスコーレム項 t で，任意の $\xi_0 < \cdots < \xi_{|s|-1} < \omega_1$ に対し，

$$h(\langle \xi_{\pi(0)}, \ldots, \xi_{\pi(|s|-1)}\rangle) = t^{\langle L[a], \in, a\rangle}(\xi_0, \ldots, \xi_{|s|-1}, \omega_1) < \omega_1$$

となるようにできる．このようにすると h は自然に拡張できる．特に,

$$\eta(h, a, t) = t^{\langle L[a], \in, a\rangle}(u_1, \ldots, u_{|s|}, u_{|s|+1}) < u_{|s|+1}$$

を考える（14.18(b) の証明での議論により，あるスコーレム項 $\overline{t}$ により，$\eta(h,a,t) = \overline{t}^{\langle L[a^\#], \in, a^\#\rangle}(u_1, \ldots, u_{|s|})$ となる．つまり $u_{|s|+1}$ への依存は a を $a^\#$ に置き換えることで除去することができる．しかしながら，この証明の最後の上射による議論により，ここではこの付加的な変形は必要とならない）.

まず，$\overline{h} \in [h]_{\overline{U}_{s,t}}$ で $\eta(\overline{h}, \overline{a}, \overline{t})$ が，$\overline{h}$ に対する，ある $\overline{a}$ と $\overline{t}$ から導かれているなら，$\eta(h,a,t) = \eta(\overline{h}, \overline{a}, \overline{t})$ となることを見る：$\overline{U}_{s,t}$ の定義から，ω_1 で閉非有界な C で，C の元となっている $\xi_0 < \cdots < \xi_{|s|-1}$ に対し，$h(\langle \xi_{\pi(0)}, \ldots, \xi_{\pi(|s|-1)}\rangle) = \overline{h}(\langle \xi_{\pi(0)}, \ldots, \xi_{\pi(|s|-1)}\rangle)$ となるものがある．$I_a \cap I_{\overline{a}} \cap \omega_1$ も ω_1 で閉非有界だから，このような $\xi_0 < \cdots < \xi_{|s|-1}$ で，すべて $I_a \cap I_{\overline{a}}$ の元となるようなものがある．したがって,

$$\begin{aligned} t^{\langle L[a], \in, a\rangle}(\xi_0, \ldots, \xi_{|s|-1}, \omega_1) &= h(\langle \xi_{\pi(0)}, \ldots, \xi_{\pi(|s|-1)}\rangle) \\ &= \overline{h}(\langle \xi_{\pi(0)}, \ldots, \xi_{\pi(|s|-1)}\rangle) \\ &= \overline{t}^{\langle L[\overline{a}], \in, \overline{a}\rangle}(\xi_0, \ldots, \xi_{|s|-1}, \omega_1) \end{aligned}$$

となる．よって，$c \in {}^\omega\omega$ が a と $\overline{a}$ をコードするなら，定義可能性と分別不可能性を $L[c]$ で適用して,

$$\begin{aligned}\eta(h,a,t) &= t^{\langle L[a],\in,a\rangle}(u_1,\ldots,u_{|s|},u_{|s|+1})\\ &= \overline{t}^{\langle L[\overline{a}],\in,\overline{a}\rangle}(u_1,\ldots,u_{|s|},u_{|s|+1})\\ &= \eta(\overline{h},\overline{a},\overline{t})\end{aligned}$$

がいえる．

したがって，

$$e\colon \{[h]_{\overline{U}_{s,t}} \mid h\colon T^*_{s,t} \to \omega_1 \ \wedge\ h \in \tilde{L}\} \ \to\ u_{|s|+1}$$

が，h に対する，ある a と t により，$e([h]_{\overline{U}_{s,t}}) = \eta(h,a,t)$ とすることで，うまく定義できる．同様の議論により e が順序を保存するものとなっていることも分かる．最後に，14.18.(b) により，任意の $\gamma < u_{|s|+1}$ は，ある $a \in {}^\omega\omega$ により $t^{\langle L[a],\in,a\rangle}(u_1,\ldots,u_{|s|})$ と表せるから，e は上射であることが分かる．したがって，e は全単射で（よって恒等写像である）．したがって証明が完了した． ⊣

写像 e が恒等写像であることから，$\tilde{T}$ は，超フィルター $\overline{U}_{s,t}$ に言及せず，u_n たちを含むスコーレム項たちの整列性により定式化することもできることが分かる．したがって，ここまでの解析は，超巾の整順性を保証するための選択原理 (DC) によらずに ZF で実行することができる．他方，超フィルターによる定式化は，もっと大きな文脈に埋め込むことで，$\tilde{T}$ に動機付けを与える．

15.11 から，

$$\begin{aligned}\overline{\gamma} &= \sup(\{\overline{j}_{s,t}(\omega_1) \mid s,t \in {}^{<\omega}\omega \ \wedge\ |s| = |t|\})\\ &= \sup(\{u_n \mid 0 < n \in \omega\})\\ &= u_\omega\end{aligned}$$

となるが，ZF での証明可能性についての上の注意を合わせると，これは次の結果を導く：

15.12 定理 (ZF)(Martin). $\forall a \in {}^\omega\omega(a^\#$ が存在する) を仮定する．このとき，すべての $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合は u_ω-スースリンとなる． ⊣

決定性の公理はさらにすべての $n \le \omega$ に対し，$u_n = \omega_n$ を導く (28.9). ZFC の文脈では，$\mathbf{\Sigma}^1_3$ に対する次の驚くべき構造的結果が得られる：

15.13 系 (Martin). $\forall a \in {}^\omega\omega(a^\#$ が存在する) を仮定する．このときすべての $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合は ω_2-スースリンで，したがって，$\aleph_2$ 個のボレル集合の和集合となっている．

証明 14.19 により $u_\omega < \omega_3$ である．命題の後半は 13.13(f) から導かれる ⊣

これは古典的な結果 13.7 と類似性を持つものとなっており，シャープたちの存在のもとで，**すべての $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合は濃度が高々 $\aleph_2$ であるかあるいは完全集合を部分集合に持ち，したがって濃度が $\aleph_2$ になる**，ということを帰結する．

$\tilde{T}$ の定義可能性の性質から，$\mathbf{\Pi}^1_2$ 集合の単層化に関する結果も導ける．§13 の終わりで論じたように，すべての $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合は，$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合により単層化できるが，Π^1_2 集合でどの射影的集合でも単層化のできないようなものが存在する，という命題は無矛盾である．Mansfield [71] での木による解析と Martin-Solovay [69] でのシャープたちの解析を組み合わせると

次が得られる：

15.14 定理　(Mansfield [71], Martin-Solovay [69]). $\forall a \in {}^\omega\omega$($a^\#$ が存在する）を仮定する．このとき，任意の $b \in {}^\omega\omega$ に対し，すべての $\Pi^1_2(b)$ 集合は $\Pi^1_3(b)$ 集合により単層化できる．

証明　証明の構造は，$A \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ が $\Pi^1_1(a)$ なら，$\Pi^1_1(a)$ 集合 $A_0 \subseteq A$ があって，すべての $x \in {}^\omega\omega$ に対し $A(x,y)$ となる y が存在するなら，$A_0(x,y)$ となるような y が，ちょうど 1 つ存在することを示した $\mathbf{\Pi}^1_1$ 単層化 13.17 の証明と同じである．$\mathbf{\Pi}^1_2$ 集合 $A \subseteq {}^\omega\omega$ との 15.9 で展開したその理論を使って，次の“基礎”定理を確立する：A が $\Pi^1_2(b)$ となるような $b \in {}^\omega\omega$ に対し，$\Pi^1_3(b)$ 集合 $A_0 \subseteq A$ で，もし $A(y)$ となる y が存在するなら，$A_0(y)$ となるような y が，ちょうど 1 つ存在する．記法を変更するだけで，A と A_0 は ${}^2({}^\omega\omega)$ の部分集合とすることができ，証明をパラメタ化したものにより，普通の単層化の命題が確立できる．

${}^2\omega \times \omega_1$ 上の T^* と $\omega \times \overline{\gamma}$ 上の $\tilde{T}$ を前と同じようにとる．したがって任意の $y \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$\begin{aligned} A(y) &\leftrightarrow T^*_y \text{ は整順的} \\ &\leftrightarrow \exists g \in {}^\omega\overline{\gamma}(\langle y, g\rangle \in [\tilde{T}]) \end{aligned}$$

となる．

まず，任意の $y \in {}^\omega\omega$ に対し，g で $\langle y, g\rangle \in [\tilde{T}]$ となるものが 1 つでもがあれば，善良な左はしのものが存在する．つまり，g_y で，任意の他の g に対し，$g_y(i) \leq g(i)$ がすべての $i \in \omega$ に対し成り立つようなものが存在することを見る：

$A(y)$ と仮定すると，T^*_y は整順的である．12.9(a) と 15.3 により，ランク関数 $\rho_{T^*_y}$ の $T^*_y - \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\}$ への制限は，ω_1 への順序を保存する写像である．さらに，15.9 の相対化の議論により，b と y をコードする任意の $c \in {}^\omega\omega$ に対し，$\rho_{T^*_y} \in L[c] \subseteq \tilde{L}$ となる．したがって，$\rho_{T^*_y}$ を $\{h^y_i \mid i \in \omega\} \subseteq \tilde{L}$ の形に作り変えられる．ここに，$i \neq 0$ に対し，h^y_i: $T^*_{y||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i} \to \omega_1$ は $h^y_i(u) = \rho_{T^*_y}(\langle \mathbf{s}_i, u\rangle)$ により規定され，$h^y_0(\emptyset) = 0$ とする．ここで，$g_y \in {}^\omega\overline{\gamma}$ が，$g_y(i) = [h^y_i]$（$\overline{U}_{y||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i}$ の意味での同値類）により定義されているなら，$\langle y, g_y\rangle \in [\tilde{T}]$ となる．

ここで g を任意にとり $\langle y, g\rangle \in [\tilde{T}]$ とする．$i \in \omega$ に対し，h_i: $T^*_{y||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i} \to \mathrm{On}$ を $g(i) = [h_i]$（$\overline{U}_{y||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i}$ の意味での同値類）となるようにとる．このとき $\mathbf{s}_i \supset \mathbf{s}_j \neq \emptyset$ に対し，

$$\{u \in T^*_{y||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i} \mid h_i(u) < h_j(u||\mathbf{s}_j|)\} \in \overline{U}_{y||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i}$$

となるから，ω_1 の閉非有界部分集合 C_{ij} で，

$$(\dagger) \qquad \mathrm{ran}(u) \in [C_{ij}]^{|\mathbf{s}_i|} \to h_i(u) < h_j(u||\mathbf{s}_j|)$$

となるものがある．$C = \bigcap\{C_{ij} \mid i, j \in \omega \ \wedge \ \mathbf{s}_i \supset \mathbf{s}_j \neq \emptyset\}$ とすると，これは ω_1 の閉非有界集合となる．

次に，e: $C \to \omega_1$ を順序を保存する全単射とする．このとき e は T^*_y と

$$\langle t,u\rangle \in T^C \quad \Leftrightarrow \quad \langle t, e\circ u\rangle \in T^*_y$$

で与えられる $\omega\times C$ 上の木 T^C の間の同型写像を惹き起こす：2 番目の座標の順序関係が保存されるからである．$A(y)$ だったから，T^*_y も T^C も整順的となり，これらのランク関数は

$$\rho_{T^C}(\langle t,u\rangle) = \rho_{T^*_y}(\langle t, e\circ u\rangle)$$

として関連づけられる．したがって，12.9(a) と，h_i たちが (†) により順序を保存する写像：$T^C \to \mathrm{On}$ になっていることから，

$$0<i\in\omega \text{ に対し，} \rho_{T^*_y}(\langle \mathbf{s}_i, e\circ u\rangle) \le h_i(u) \text{ かつ } u\in {}^{|\mathbf{s}_i|}C$$

となる．

最後に，ω_1 で閉非有界な $D\subseteq C$ で，その上で e が恒等写像となるようなものがとれるから，

$$<i\in\omega \text{ に対し } \rho_{T^*_y}(\langle \mathbf{s}_i, u\rangle) \le h_i(u) \text{ かつ } u\in {}^{|\mathbf{s}_i|}D$$

となる．したがって，h^y_i の $\rho_{T^*_y}$ からの定義のされ方から，すべての $i\in\omega$ に対し，

$$g_y(i) = [h^y_i] \le [h_i] = g(i)$$

となる．

ここで，$\mathbf{\Pi}^1_1$ 単層化でと同じように議論するが，ここでのアイデアは $[\tilde{T}]$ の元 $\langle y,g\rangle$ があるときには，左はじの y をとる，ということである．A が $\Pi^1_2(b)$ なので，g が善良な左はじの g_y であるはずである，という上で述べた観察から，これは $\Pi^1_3(b)$ で実行することができる．

$R^{\le}$ と $R^{<}$ を

$$R^{\le}(i,y,z) \leftrightarrow \neg A(y) \ \vee \ \neg A(z) \ \vee \ g_y(i)\le g_z(i)\,,$$
$$R^{<}(i,y,z) \leftrightarrow \neg A(y) \ \vee \ \neg A(z) \ \vee \ g_y(i) < g_z(i)$$

で与えられる $\omega\times {}^2({}^\omega\omega)$ 上の関係とする．これらが $\Sigma^1_3(b)$ であることが示せればよい．これが示せたとして $A_0\subseteq A$ が 13.7 の証明でのように定義されると，これにより単層化ができ，これは本質的には $\Pi^1_2(b) \ \wedge \ \forall^1[\Sigma^1_3(b) \to \neg\Sigma^1_3(b)]$ の形をしているから $\Pi^1_3(b)$ となり，証明が完了する．

$R^{\le}$ が $\Sigma^1_3(b)$ であることを示すが，$R^{<}$ に対しても同様に議論できる．まず，$\neg A$ が $\Sigma^1_2(b)$ であることに注意する．したがって，$A(y)$ かつ $A(z)$ としたときに，$g_y(i)\le g_z(i)$ が $\Sigma^1_3(b)$ であることを示せばよい：

このために，任意の $x\in{}^\omega\omega$ は $(x)_k(m) = x(\langle\!\langle k,m\rangle\!\rangle)$ により $\langle (x)_k \mid k\in\omega\rangle \in {}^\omega({}^\omega\omega)$ をコードしていたことを思い出して，$a(y,z)\in{}^\omega\omega$ を $(a(y,z))_0 = b$, $(a(y,z))_1 = y$, かつ $n>2$ に対しては，$(a(y,z))_n =$ 定値関数：$\omega\to\{\emptyset\}$ で定義する．善良な左はじの g_y の特徴付けにより，$i\in\omega$ に対し，$g_y(i) = [h^y_i]$（$\overline{U}_{y||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i}$ の意味での同値類）となる，ここに h^y_i: $T^*_{y||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i} \to \omega_1$ は $h^y_i(u) = \rho_{T^*_y}(\langle \mathbf{s}_i, u\rangle)$ により与えられているものとする．前出

の注意を適用すると，$a(y,z)$ は b と y をコードしているから，$\rho_{T_y^*} \in L[a(y,z)]$ となり，実際にもう少し詳しく見てみると，$\rho_{T_y^*}$ は $\langle L[a(y,z)], \in, a(y,z)\rangle$ ですべての y と a に対する T_y^* を定義するのに必要な1つのパラメタ，つまり（本当の）ω_1 による同じ論理式で定義可能である．

次に，15.11の証明での部品を組み合せる．$0 < i \in \omega$ に対し，置換 $\pi_{i,y}\colon |\mathbf{s}_i| \to |\mathbf{s}_i|$ で，任意の $\xi_0 < \cdots < \xi_{|\mathbf{s}_i|-1} < \omega_1$ に対し，$\langle \xi_{\pi_{i,y}(0)}, \ldots, \xi_{\pi_{i,y}(|\mathbf{s}_i|-1)}\rangle \in T^*_{y||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i}$ となるものが一意に決まる．上で述べた $\rho_{T_y^*}$ の ω_1 による定義可能性から，$0 < i \in \omega$ に対し，y と z に依存せずにスコーレム項 t_i で，

$$\begin{aligned} h_i^y(\langle \xi_{\pi_{i,y}(0)}, \ldots, \xi_{\pi_{i,y}(|\mathbf{s}_i|-1)}\rangle) &= \rho_{T_y^*}(\langle \mathbf{s}_i, \langle \xi_{\pi_{i,y}(0)}, \ldots, \xi_{\pi_{i,y}(|\mathbf{s}_i|-1)}\rangle\rangle) \\ &= t_i^{\langle L[a(y,z)], \in, a(y,z)\rangle}(\xi_0, \ldots, \xi_{|\mathbf{s}_i|-1}, \omega_1) \end{aligned}$$

となるものがとれる．ここで，15.11の証明により（写像 e が恒等写像であることから），

$$[h_i^y] = t_i^{\langle L[a(y,z)], \in, a(y,z)\rangle}(u_1, \ldots, u_{|\mathbf{s}_i|}, u_{|\mathbf{s}_i|+1})$$

となる．

以上と同じ議論で，ある $\bar{t}_i$ による $[h_i^z]$ の同様の表現を得ることができる．したがって，各 $i \in \omega$ に対し，論理式 φ_i で，

$$\begin{aligned} g_y(i) \le g_z(i) &\leftrightarrow [h_i^y] \le [h_i^z] \\ &\leftrightarrow \langle L[a(y,z)], \in, a(y,z)\rangle \models \varphi_i[u_1, \ldots, u_{|\mathbf{s}_i|+1}] \\ &\leftrightarrow \ulcorner \varphi_i(c_0, \ldots, c_{|\mathbf{s}_i|})\urcorner \in a(x,y)^\# \end{aligned}$$

となるものがとれる．ここに，c_i は§9でのシャープの理論のための言語 $\mathcal{L}_\in^*$ での分別不可能クラスの元に対応する定数記号である．定義の一様性から，i に $\ulcorner \varphi_i(c_0, \ldots, c_{|\mathbf{s}_i|})\urcorner$ を対応させる関数は帰納的なものととれる．したがって，b は $a(x,y)$ にコードされることと，14.16と14.12(c)の証明により，$g_y(i) \le g_z(i)$ は $\Sigma_3^1(b)$（実際にはさらに $\Delta_3^1(b)$）であることが分かり，証明が完了した．　⊣

この結果にもう1つ∃を加えることは容易である（13.18を参照）．

15.15 演習　$\forall a \in {}^\omega\omega(a^\#$ が存在する$)$ を仮定する．このとき任意の $b \in {}^\omega\omega$ に対し，すべての $\Sigma_3^1(b)$ 集合は $\Sigma_4^1(b)$ 集合により単層化が可能である．　⊣

このようにして，古典的記述集合論の手法と結果は射影的階層の3番目のレヴェルにまで拡張された．それでは4番目のレヴェルについてはどうであろうか？

$\mathbf{\Pi}_2^1$ 集合に対する，したがって $\mathbf{\Sigma}_3^1$ 集合に対する木の表現を開発したので，次のステップは，ふたたび整順性と，順序数への順序を保存する写像の存在との同値性を用いて後者を $\mathbf{\Pi}_3^1$ 集合の木による表現に変換することであろう．$E \subseteq {}^\omega\omega$ を $\mathbf{\Pi}_3^1$ として，例えば，$\mathbf{\Pi}_2^1$ の $A \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ に対し，

$$E(x) \ \leftrightarrow\ \neg\exists y A(x,y)$$

となっているとする．この A は我々の前に代表として扱ってきた A の2進バージョンと

見なすことができる；（15.12 の前で注意したように）$\overline{\gamma} = u_\omega$ だったことを思い出して，ここでの新しい A は対応する ${}^2\omega \times u_\omega$ 上の $\tilde{T}$ により，$p[\tilde{T}]$ と表せる．したがって，

$$\begin{aligned} E(x) &\leftrightarrow \neg\exists y \exists g \in {}^\omega u_\omega(\langle x, y, g\rangle \in [\tilde{T}]) \\ &\leftrightarrow \tilde{T}_x \text{ は整順的} \\ &\leftrightarrow \exists f(f\colon \tilde{T}_x \to u_\omega^+ \text{ は順序を保存する写像}) \end{aligned}$$

となる．ここで順序を保存する写像の有限近似を使って T^* と同様の木が定義できる．これができたとき，ある順序数の値を持つ関数族がランク付けされなくてはいけないが，このためにある ${}^{|s|}u_\omega$ の部分集合 $X_{s,t}$ に対し，$\mathcal{P}(X_{s,t})$ 上の ω_1-完備超フィルター $U_{s,t}$ が必要になる．これらの超フィルターの族はふたたび一貫性と整順性の性質を満たすものでなくてはならず，これは一番直接的には $\tilde{T}$ の一様性の性質から導き出されるものとなるであろう．このような性質はどのようにして確立できるであろうか？

$\tilde{T}$ の構成をもっと詳しく見てみると，$\langle s, \langle \delta_i \mid i < |s|\rangle\rangle \in \tilde{T}$ なら，s に対し，順序的な列 $\langle h_i \mid i < |s|\rangle$ で $\delta_i = [h_i]$ となるものがあることが分かる．このような列は今度は $h(\langle \mathbf{s}_i, u\rangle) = h_i(u)$ で与えられる $Z_s = \{\langle \mathbf{s}_i, u\rangle \mid \exists i < |s|(\langle\langle s||\mathbf{s}_i|, \mathbf{s}_i, u\rangle) \in T^*\}$ 上の関数に対応する．さらに，15.3 の前の注意により $s \neq \emptyset$ に対し，Z_s は $<_{\mathrm{KB}^2}$ により順序型 ω_1 に整列されている．したがって，Z_s は $[\omega_1]^{\omega_1}$ の要素と同一視することができ，これがここでは $[\omega_1]^n$ の役割を果たすことになる．ところが，ここで我々は 15.8 と類似の，$[\omega_1]^{\omega_1}$ に対する分割の性質が必要となる．つまり，$\omega_1 \longrightarrow (\omega_1)^{\omega_1}_\omega$ に相当するものである．このような性質は AC と矛盾するが，実際に決定性の公理から導け（29.13 を参照），さらに，この公理を，ここで $\tilde{L}$ の役割を果たすことのできる内部モデル $L(\mathbb{R})$ で仮定することにより，ZFC の文脈でこの議論が行なえる．

1971 年にクーネンはこのように考察を進めて $\mathbf{\Pi}^1_3$ 集合の木による表現を与えて，さらに進んで $\mathbf{\Pi}^1_4$ 集合についても同様の理解を得ている．この仕事は射影的集合のこの文脈での最良の分析として 10 年以上最高点であり続けるが，これは δ^1_5 として知られた順序数に関する十分な情報が得られなかったからである．この仕事が 1980 年代の中盤にどのようにして完成されたかは，§30 で論じることになる．

第 4 章　可測性の諸相

この章では，1960 年代後半に行われた，強制法と内部モデルという互いに相補的な手法による可測性に関する広範囲な研究について記述する．この展開によって，一貫した構造解析によるより深い理解が促されただけでなく，新しい問題が提起され，さらに強い仮説を研究するにあたっての規範が与えられることになった．§16 と§17 では，飽和イデアルについて議論する．これはソロヴェイの仕事によって脚光をあびることになった題材である．最初の節で彼の組合せ論的な分析を紹介し，二番目の節で実数値可測性に関するソロヴェイの無矛盾性の結果，さらに，初等的埋め込みの拡張可能性に基づく，クーネン=パリスの一連の無矛盾性の結果について述べる．§18 では，可測性の別の角度からの理解を与えることになったプリクリ強制と，これの一般化の一つで，後に無矛盾性の強さの研究できわめて重要な役割を果たすことになるものを記述する．この章の残りの部分ではクーネンによる超巾の反復，可測性のモデル，および初等的埋め込みに関する仕事を考察する：クーネンの超巾の反復の理論は，M-超フィルターという，より一般的な概念を用いて§19 で展開される．§20 ではこれがクーネンとシルバーによる可測性の内部モデルの理論に応用される．最後に，§21 では $0^\#$ の存在の，$j\colon L \prec L$ の存在との同値性を主張するクーネンの結果，および，その存在が可測性の内部モデル上の超越性を主張する原理となる $0^\dagger$ の，ソロヴェイによる緻密な分析について述べる．

§16　飽和イデアル I

ルベーグ測度の別の観点に着目して，ソロヴェイは AC のもとで，ルベーグ測度がすべての実数の集合に対する測度へ拡張できることの可能性に関する，一連の重要な結果を得ている．ここで別の観点といったのは，バナッハの測度問題 (§2) に関するウラムの基本的な論文 Ulam [30] で示された分岐のもう一方の枝であるところの，$\leq 2^{\aleph_0}$ での実数値可測性の問題のことである．

16.1 定理　(Solovay [66, 71]).

(a) κ が可測基数なら，p.o. P で，

$$\Vdash_P \kappa = 2^{\aleph_0} \wedge \kappa \text{ は実数値可測}$$

となるものが存在する．

(b) κ が実数値可測なら，ZFC の内部モデルで，κ が可測基数となるようなものが存在する．

(a) は次の節で確立される (17.5); (b) のもとの証明については可測性の内部モデルの枠組の中でその要点を述べる (20.4); (b) をもっと強くしたものに対しては，ずっと後になってから証明が与えられることになる（第 II 巻の Precipitous Ideals に関する章を参照）．16.1 を確立する過程で，ソロヴェイの論文 Solovay [71] では，巨大基数の性質の超フィルターによる研究をイデアルに関するものに拡張しただけでなく，現在では **generic 超巾**と名付けられている手法が強制法と超巾の組合せにより得られることをも述べており，その意味でこの論文の影響力は大であった．1970 年代の様々な成果により，generic 超巾は広い応用範囲を持つ標準的な手法となっていった，これに関するより一般的な枠組での記述は第 II 巻で述べる．

この分野で鍵となる役割をはたし，ほどなく巨大基数の理論での主要な概念の一つとなるものに，Tarski [45] で定義され，そこで研究のはじめられた**飽和イデアル**がある．§0 でのイデアルに関する基礎知識をふまえて，集合 S 上のイデアル I に対し，

$$I^* = \{X \subseteq S \mid S - X \in I\},$$
$$I^+ = \mathcal{P}(S) - I.$$

とする．I^* は I の**双対フィルター**で，I^+ は I^*-定常集合である，つまり，I^+ は任意の $Z \in I^*$ に対し $X \cap Z \neq \emptyset$ となるような集合 $X \subseteq S$ の全体となっている．$A \in I^+$ となるのは，I **の** A **への制限** あるいは $I \cup \{S - A\}$ **によって生成されたイデアル**:

$$I|A = \{X \subseteq S \mid X \cap A \in I\}$$

が（真の）イデアルになるちょうどそのときである．直観的には，I, I^+, および I^* は，それぞれ，I の意味で無視できる S の部分集合，無視できない S の集合，および，無視できる集合を除いてすべてとなっている S の部分集合の全体の族とみなせる．S が正則基数 $\kappa > \omega$ の場合には，重要な例として，定常でない集合の全体からなるイデアル $I = \mathrm{NS}_\kappa$ があるが，このときには，I^+ は定常な部分集合の全体となり，I^* は閉非有界フィルター $\mathcal{C}_\kappa$ となる．もちろんイデアルの理論はすべてフィルターの言葉で言いなおすことができ，このアプローチは極大イデアルでなく超フィルターについて言及することを好む現代的な記述とマッチするように思える．しかしながら，強制法で $p \leq q$ で p が q より強いことを表すことにしたときと同様に，イデアルによる定式化の方が，ブール代数との関連性の理由から，より自然なものとなっている．

タルスキーの定義を見てみることにする．イデアル I に対し，

I は λ-飽和的 $\Leftrightarrow$ 任意の $\{X_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \subseteq I^+$ に対し $\beta < \gamma < \lambda$ で $X_\beta \cap X_\gamma \in I^+$ となるものが存在する

として，

$$\mathrm{sat}(I) = 「I \text{ が } \lambda\text{-飽和的となる最小の } \lambda」$$

とする．sat$(I)=2$ となるのは，I が極大イデアルであるちょうどそのときであるから，sat(I) は I が極大イデアルであることにどれだけ近いかを示す尺度となっていると考えられる．Erdös-Tarski [43] で sat(I) は常に正則非可算基数となることが示されている．この節では，基数 κ 上のイデアルのみが考察されるが，そのようなものに対しては，§0で，$\alpha=\{\xi\mid\xi<\alpha\}\in I$ がすべての $\alpha<\kappa$ に対し成立するもののみを考察することにしたのであった．さらに，巨大基数の性質の研究のためには，可測性のときと同じように，ここで不可欠な性質となる，完備性を持ったイデアルのみが考察されることになる：

κ 上のイデアルといったときには，κ 上の κ-完備イデアルのこととする．

κ 上にこのようなイデアルの存在するとき，κ は正則基数でなければならないことは直ちに分かる．

イデアルの飽和というのは，かなり一般的な概念である；例えば，κ 上のイデアル $[\kappa]^{<\kappa}$ が λ-飽和的でないことは，ほとんど互いに素な κ の部分集合 λ 個からなる族 F が存在すること，つまり，$F\subseteq[\kappa]^\kappa$ で，$|F|=\lambda$, かつ $X\neq Y$ が両方とも F の元なら，$|X\cap Y|<\kappa$ となるようなものが存在することと，同値になる．組合せ論的集合論の初期の結果の一つは，このような族が $\lambda=\kappa^+$ に対し存在することを簡単な帰納的構成により示している (Sierpiński [28])．したがって，$[\kappa]^{<\kappa}$ は κ^+-飽和的でない．実数値可測性との関係は 2.1 で与えられている：

16.2 演習　m が κ 上の κ-加法的測度なら，$\{X\subseteq\kappa\mid m(X)=0\}$ は κ 上の ω_1-飽和的イデアルとなる．　⊣

ソロヴェイは，実数値可測性から巨大基数の帰結を得るために必要となるのはこのような性質のみであることを示した．さらに，飽和イデアルの研究は定常集合に関する基本的な結果を導きだし，ほどなく，それ自身として重要な研究分野に成長してゆく．この節では，飽和イデアルに関する基本的な組合せ論的な結果を確立して，次の節で無矛盾性の結果の最初のものについて述べる．

イデアルの飽和性に関する最初の考察は，可測性に関するウラムの基本的な結果に基づくものであった．

16.3 演習　(Ulam [30])．任意の λ に対し，λ^+ 上の λ^+-飽和的イデアルは存在しない．

ヒント　2.4のウラム・マトリックスによる証明をここでも用いることができることを確かめればよい．　⊣

次の命題は，ウラムの 2.5(a) での木による議論の超限的バージョンを用いて確立される；この命題の (c) は，16.2 により，7.12 の証明を与えるものとなる．

16.4 命題　I を κ 上のイデアルとする．

(a) (Tarski [45: 53]) I が λ-飽和的で，$2^{<\lambda}<\kappa$ なら，κ は可測基数となる．

(b) (Levy, Silver) I が κ-飽和的で，κ は弱コンパクトなら，κ は可測基数となる．

(c) ある $\lambda<\kappa$ に対し，I が λ-飽和的なら，κ は木の性質を持つ．

証明 (a) と (b) の証明には，まず I が原子元を持つ，つまり集合 $A \in I^+$ で $A = B \cup C$ を互いに素な和集合とするとき $B \in I$ か $C \in I$ のどちらかが必ず成り立つようなものが存在すると仮定してみる．このときには，$\{X \subseteq \kappa \mid X \cap A \in I^+\}$ は κ-完備な超フィルターとなるから，κ は可測基数である．したがって，I が原子を持たないと仮定してこれから矛盾が導ければよい．

このために，${}^{<\kappa}2$ の元で添数付けされた集合からなり，$\supset$ で順序を入れた木 T を構成する．$X_\emptyset = \kappa$ とする．ある $s \in {}^{<\kappa}2$ に対し，X_s がすでに定義されたとき，$X_s \in I^+$ となるときのみ，$X_{s^\frown\langle 0\rangle}$ と $X_{s^\frown\langle 1\rangle}$ を次が成り立つように定義する：

$$X_{s^\frown\langle 0\rangle}, X_{s^\frown\langle 1\rangle} \in I^+\ ,\ X_s = X_{s^\frown\langle 0\rangle} \cup X_{s^\frown\langle 1\rangle}\ ,\ \text{かつ}\ X_{s^\frown\langle 0\rangle} \cap X_{s^\frown\langle 1\rangle} = \emptyset\ .$$

I が原子を持たないことからこれは可能である．最後に $\delta < \kappa$ が極限順序数で，$s \in {}^{\delta}2$ のときには，$X_{s|\alpha}$ が各 $\alpha < \delta$ に対し定義されているときに限り，$X_s = \bigcap_{\alpha<\delta} X_{s|\alpha}$ と定義する．このようにして構成された木 T は次の性質を持つ：

(*) $\gamma \le \kappa$ で $s \in {}^{\gamma}2$ なら，'横枝' の全体 $\{X_{s|\alpha^\frown\langle i\rangle} \mid \alpha < \gamma \land X_{s|\alpha+1}$ は定義されている $\land\ s(\alpha) \neq i\}$ は互いに素となる．

(a) の証明には，(*) と λ-飽和性から，T の高さは高々 λ であることが分かる．ところが，このときには κ は I の $2^{<\lambda} < \kappa$ 個の元の和集合となる，つまり，この木で次の元を持たないような X_s の全体がそのようなものとなる．これは I の κ-完備性に矛盾である．

(b) の証明には，T の高さが κ 未満なら，κ の到達不可能性と上の議論から，I の κ-完備性に矛盾することが分かる．したがって，T は κ-木であると仮定してよい．したがって，弱コンパクト性から，T は共終枝を持つ．ところが，これは，(*) により I の κ-飽和性に矛盾である．

(c) を証明するために，$\langle T, <_T\rangle$ を κ-木とする；$T = \kappa$ と仮定してよい．$\xi < \kappa$ に対し，$S_\xi = \{\zeta < \kappa \mid \xi <_T \zeta\}$ とおき，$U = \{\xi < \kappa \mid S_\xi \in I^+\}$ とする．このとき，$\xi \in U$ で $\xi' <_T \xi$ なら，$\xi' \in U$ となる．I が κ-完備であることから，U によって与えらる部分木は高さ κ を持ち，λ-飽和性から，各レヴェルの濃度は λ 未満になることが容易に分かる．したがって 7.9 により，この部分木は共終枝を持つことが帰結できるが，この枝は $\langle \kappa, <_T\rangle$ での共終枝でもある． ⊣

(c) の仮定は，I が κ-飽和的である条件に弱めることはできない (Kunen [78])．(a) から，κ 上の λ-飽和性の理論は，$\lambda > \omega$ かつ $2^{<\lambda} \ge \kappa$ でない場合には，実質的には可測性の問題に帰着することが分かる．κ 上の飽和イデアルが存在するためには，16.3 でのようないくつかの制限をうける他には，16.2 で分かるように，κ が強到達不可能である必要はなく，このことから，累積的階層の下の方で飽和イデアルの存在する可能性が出てくる．

κ 上のイデアル I が $(2^\kappa)^+$-飽和的であることは自明であるから，λ-飽和性で問題となるのは，λ が $\omega < \lambda \le 2^\kappa$ の領域にある場合であることが分かる．実際には，飽和イデアルの理論の進歩により，ほどなく κ^+, κ, および $<\kappa$-飽和性の 3 つが問題となる場合となることが明らかになってくる．以下で，これらの場合の各々を考察して，可測性からの帰結として得られていた命題で実はこれらの制限された条件から導けるようなものの証明を与

えながら，順を追ってソロヴェイの仕事を見てゆくことにする．ここで最初に注意しておくと，これらは組合せ論的な命題としては制限された仮定となっているが，κ^+-飽和性でさえ可測性の無矛盾性の強さを持つものとなっている（§17 の始めで述べる注意を参照）．$\kappa^+ < \lambda \le 2^\kappa$ となるような λ に対しての λ-飽和性は，Baumgartner [76: §5] で研究され，Baumgartner-Taylor [82] でさらに詳しく調べられている．いくつかの興味深い未解決問題が残っているが，ここでは巨大基数はほとんど関与しない．

κ-飽和性は，κ を κ 個の互いに素な I^+ 集合に分割することはできない，というふうに述べられるが，κ^+-飽和性には，このような直観的な表現を与えることはできない．ここで重要なのは，商ブール代数 $\mathcal{P}(\kappa)/I$ の完備性である．$\mathcal{P}(\kappa)/I$ は，$X \subseteq \kappa$ に対する同値類 $[X]_I$ からなるブール代数である．ここに，

$$[X]_I = [Y]_I \quad \Leftrightarrow \quad X \triangle Y \in I$$

とする．いつものように，この添数 I は文脈から明らかなときには省略する．ブール演算は，集合算をイデアルの性質で調整して得られる

$$[X] + [Y] = [X \cup Y]\,,\ [X] \cdot [Y] = [X \cap Y]\,,\ \text{かつ}\ -[X] = [\kappa - X]$$

によって定義される．したがって，

$$[X] \le [Y] \quad \Leftrightarrow \quad X - Y \in I\,,$$

で，

$$\mathbf{0} = [\emptyset] = I\ \text{かつ}\ \mathbf{1} = [\kappa] = I^*$$

がこのブール代数の 0-元と単位元となる．$\langle I^+, \subseteq \rangle$ は後で強制法の概念として考察される（第 II 巻の Precipitous Ideals の章を参照）．このときには，$p \perp q \quad \Leftrightarrow \quad p \cap q \in I$ となり，この分離的商構造 $I^+/\approx$ は，$\mathcal{P}(\kappa)/I - \{\mathbf{0}\}$ となる．この装いにおいては，**λ-飽和性は，強制法の概念の λ-c.c. と同値になる．**

次の命題は，κ^+-飽和性に関する最初の重要な結果であった．ブール代数が**完備**とは，任意の $S \subseteq B$ に対し，これの B の意味での最小上界 $\sum S$ が存在することであった．

16.5 命題　(Smith-Tarski [57: 254])．I が κ 上の κ^+-飽和的イデアルなら，$\mathcal{P}(\kappa)/I$ は完備ブール代数となる．

証明　$B = \mathcal{P}(\kappa)/I$ とおき，$S \subseteq B$ を任意にとる．$\sum S$ が存在することの証明は $|S|$ の値に応じた 3 つの場合を順に示すことでなされる：

場合 (i): $|S| < \kappa$. ある $\gamma < \kappa$ に対し，$S = \{[X_\alpha] \mid \alpha < \gamma\}$ とすると，$\sum S = [\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha]$ となる：すべての $\alpha < \gamma$ に対し $[Y] \ge [X_\alpha]$ なら，I の κ-完備性から，$(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha) - Y = \bigcup_{\alpha<\gamma}(X_\alpha - Y) \in I$ となり，したがって，$[Y] \ge [\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha]$ である．

場合 (ii): $|S| = \kappa$. $S = \{b_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ として，(i) を用いて $\alpha < \kappa$ に対し，$a_\alpha = b_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} b_\xi$ とおく．このとき，

(a) $\alpha < \beta < \kappa$ なら，$a_\alpha \cdot a_\beta = \mathbf{0}$；

(b) $\alpha < \kappa$ なら，$\sum_{\xi<\alpha} a_\xi = \sum_{\xi<\alpha} b_\xi$ ；したがって，

(c) $\sum_{\alpha<\kappa} a_\alpha$ が存在するなら，$\sum_{\alpha<\kappa} b_\alpha$ も存在して，$\sum_{\alpha<\kappa} a_\alpha = \sum_{\alpha<\kappa} b_\alpha$ が成り立つ．

よって b_α の代わりに a_α を用いてよい．また，各 a_α は 0 と異なるとしてよい．$\{a_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ を拡張して，$A \subseteq B$ を $x \neq y$ が両方とも A の元のときには $x \neq \mathbf{0}$ だが，$x \cdot y = \mathbf{0}$ となるようなののうち極大のものとする．κ^+-飽和性により，$|A| \leq \kappa$ となるから，$A = \{[Y_\delta] \mid \delta < \kappa\}$ とする．Y_δ は，互いに素になるようにとることができる（各々の Y_δ を $Y_\delta - \bigcup_{\xi<\delta} Y_\xi = Y_\delta - \bigcup_{\xi<\delta}(Y_\xi \cap Y_\delta)$ で置き換えればよい．ここで取り去っている集合は κ-完備性により I の元になることに注意する）．最後に，$D = \bigcup\{Y_\delta \mid$ ある $\alpha < \kappa$ に対し $[Y_\delta] = a_\alpha\}$ とすれば，$[D] = \sum_{\alpha<\kappa} a_\alpha$ となる：

すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$[E] \geq a_\alpha$ となっているとする．このとき，$[E] \geq [D]$ を示すために，$b = [D] - [E]$ とおく．明らかに，$[E]$ に対する仮定から，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$b \cdot a_\alpha = \mathbf{0}$ となる．また，a_α の形をしていない $[Y_\delta]$ に対しては，$Y_\delta \cap D = \emptyset$ だから，$b \cdot [Y_\delta] = \mathbf{0}$ である．したがって，A の極大性から，$b = \mathbf{0}$ となる．

場合 (iii): $|S| > \kappa$. 帰納的に議論して，$T \subseteq S$ で $|T| < |S|$ なら，$\sum T$ が存在すると仮定してよい．$S = \{b_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ として，帰納法の仮定を用いて，$\alpha < \lambda$ に対し，$a_\alpha = b_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} b_\xi$ とおくことができる．このとき，(ii) の (a)–(c) の κ を λ で置き換えたものが成立する．ところが，κ^+-飽和性により，$\mathbf{0}$ と異なる a_α は高々 κ 個である．したがって (ii) により，$\sum_{\alpha<\lambda} a_\alpha = \sum_{\alpha<\lambda} b_\alpha$ が存在する． ⊣

この結果の逆も部分的に成り立つ：

16.6 演習 (Solovay [71: 427]). I を κ 上のイデアルとして，$\mathcal{P}(\kappa)/I$ は完備となっているとする．このとき I が λ-飽和的とならないような任意の λ に対し $2^\lambda \leq 2^\kappa$ が成り立つ．特に：

(a) I は 2^κ-飽和的である．

(b) $2^\kappa < 2^{\kappa^+}$ なら，I は κ^+-飽和的である．

ヒント $\{b_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)/I$ が λ-飽和性の反例となっているとする．$X \subseteq \lambda$ に対し，$a_X = \sum_{\alpha \in X} b_\alpha$ とおく．$X \neq Y$ なら，$a_X \neq a_Y$ となることに注意する．ところが，$|\mathcal{P}(\kappa)/I| \leq 2^\kappa$ である． ⊣

$\mathcal{P}(\kappa)/I$ の完備性はそれ自身強い仮定となっている；Kanamori-Shelah [95] を参照．

ソロヴェイは，16.5 を用いて，イデアルが 5.11 での可測性との類推で “正規化” されるためには κ^+-飽和性があれば十分であるということを示している．いくつかの用語を確立するために，I を κ 上のイデアルとして，$f\colon X \to \kappa$ とする．このとき，

f は X 上 I の意味で小さい	$\Leftrightarrow$	すべての $\alpha < \kappa$ に対し $\{\xi \in X \mid f(\xi) = \alpha\} \in I$,
f は X 上 I の意味で圧縮不可能	$\Leftrightarrow$	f は X 上 I の意味で小さいが，$Y \in I^+$ となる任意の $Y \subseteq X$ に対し，$g\colon Y \to \kappa$ がすべての $\xi \in Y$ に対し $g(\xi) < f(\xi)$ を満たすなら，g は Y 上 I の意味で小さくない,
I は正規	$\Leftrightarrow$	I^* は正規フィルター

とする．つまり I が正規とは，任意の $X \in I^+$ と X 上退行的な f に対し，$Y \subseteq X$ で，$Y \in I^+$ かつ f は Y 上定値関数となるようなものが存在することである．

16.7 命題 (Solovay [71]). I を κ 上の κ^+-飽和的イデアルとする．このとき：

(a) 任意の $X \in I^+$ に対し，$Y \in I^+$ で，$Y \subseteq X$ となるものの上に I の意味で圧縮不可能な関数が存在する．

(b) κ 上 I の意味で圧縮不可能な関数が存在する．

(c) f が κ 上 I の意味で圧縮不可能な関数なら，

$$f_*(I) = \{X \subseteq \kappa \mid f^{-1}(X) \in I\}$$

は，κ 上の正規な κ^+-飽和的なイデアルとなる．

証明　(a) そうでないとして，ある $X \in I^+$ に対し，この命題が成り立たないと仮定する．まず，次を示す：

(∗)　X 上 I の意味で小さい任意の f に対し，X 上 I の意味で小さい $\overline{f}$ で，$[\{\xi \in X \mid \overline{f}(\xi) < f(\xi)\}] = [X]$ となるものが存在する．

上のような f が与えられたとき，仮定から，$Y \subseteq X$ が $Y \in I^+$ となるなら，$Z \subseteq Y$ で，$Z \in I^+$ となるものと，Z 上 I の意味で小さい g で $g(\xi) < f(\xi)$ がすべての $\xi \in Z$ に対して成り立つようなものが存在する．したがって，極大な集合族 $\subseteq \mathcal{P}(X) \cap I^+$ をうまくとって，κ^+-飽和性をこれに適用すると，集合の族 $\{\langle Z_\alpha, g_\alpha\rangle \mid \alpha < \kappa\}$ で，以下を満たすものがあることが分かる：

(i) $\alpha < \beta < \kappa$ なら，$Z_\alpha \subseteq X$ で $Z_\alpha \in I^+$ だが，$Z_\alpha \cap Z_\beta \in I$ となる；

(ii) g_α は Z_α 上 I の意味で小さく，すべての $\xi \in Z_\alpha$ に対し，$g_\alpha(\xi) < f(\xi)$ となる；

(iii) $\sum_{\alpha<\kappa}[Z_\alpha] = [X]$.

16.5 と同様に（Z_α を $Z_\alpha - \bigcup_{\xi<\alpha} Z_\xi$ で置き換えることで），$Z_\alpha, \alpha < \kappa$ は互いに素であると仮定してよい．ここで $\overline{f}$ を $\bigcup_{\alpha<\kappa} g_\alpha$ の X 上への任意の拡張とする．このとき $\overline{f}$ が (∗) の条件をすべて満たすことは容易に確かめられる．例えば $\overline{f}$ が X 上 I の意味で小さいことを証明するには，そうでないとすれば，ある $\gamma < \kappa$ に対し $\{\xi \in X \mid \overline{f}(\xi) = \gamma\} \in I^+$ となるが，このときには (iii) により，$\{\xi \in Z_\alpha \mid g_\alpha(\xi) = \overline{f}(\xi) = \gamma\} \in I^+$ がある α に対し成り立つ．これは (ii) に矛盾である．

$(*)$ を用いると，ただちに矛盾を導くことができる：f_0 を X 上の恒等関数とする．$n \in \omega$ に対し，帰納的に $(*)$ で与えられたように $f_{n+1} = \overline{f}_n$ とおく．

$$X_n = \{\xi \in X \mid f_{n+1}(\xi) < f_n(\xi)\}$$

とすると，$[X_n] = [X]$ により $X - X_n \in I$ である．したがって，$X - \bigcap_n X_n \in I$ となる．よって，$\bigcap_n X_n \in I^+$ である．ところが，この集合の元となる任意の ξ に対し，下降列

$$f_0(\xi) > f_1(\xi) > f_2(\xi) > \cdots$$

が対応するから矛盾である．

(b) 適当に極大な族をとり，κ^+-飽和性を適用して，(a) から，族 $\{\langle Y_\alpha, f_\alpha\rangle \mid \alpha < \kappa\}$ で，以下を満たすものがあることが分かる：

(i) $\alpha < \beta < \kappa$ なら，$Y_\alpha \subseteq X$ で $Y_\alpha \in I^+$ だが，$Y_\alpha \cap Y_\beta \in I$ となる；
(ii) f_α は Y_α 上 I の意味で圧縮不可能となる；
(iii) $\sum_{\alpha<\kappa}[Y_\alpha] = \mathbf{1}$.

再び，$Y_\alpha, \alpha < \kappa$ は互いに素になるようにとれる．このとき $\bigcup_{\alpha<\kappa} f_\alpha$ の任意の κ への拡張は κ 上の I の意味で圧縮不可能な関数となる．

(c) は自然に証明できる．　⊣

κ-飽和性に条件を強めることで，可測基数におけるものと類似の，κ の巨大性に関する結果への扉が開かれる．以下の (c) の証明は，5.14 のキースラー=タルスキーのもとの証明に基づくものとなっている．マーロの演算は

$$M(X) = \{\alpha \in X \mid X \cap \alpha \text{ は } \alpha \text{ で定常}\},$$

というものだったことを思い出そう．(e) はイェンセンによっても得られており，部分的なものはフレムリン Fremlin によっても得られている（Solovay [71: 397] を参照）．

16.8 命題　(Solovay [71])．I を κ 上の κ-飽和的な正規イデアルとする．このとき：

(a) $X \in I^+$ で，f は X 上で退行的なら，$Y \subseteq X$ と $\gamma < \kappa$ で $[Y] = [X]$ かつ $f``Y \subseteq \gamma$ となるものが存在する．
(b) $\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ は正則基数$\} \in I^*$.
(c) $S \subseteq \kappa$ が定常なら，$\{\alpha < \kappa \mid S \cap \alpha$ は α で定常$\} \in I^*$ となる．
(d) 任意の $X \subseteq \kappa$ に対し，$[M(X)] = [X]$ である．
(e) κ は κ-弱マーロ基数である．

証明　(a) $\alpha < \kappa$ に対し，$X_\alpha = \{\xi \in X \mid f(\xi) = \alpha\}$ とおき，$E = \{\alpha < \kappa \mid X_\alpha \in I^+\}$ とする．κ-飽和性から，$|E| < \kappa$ となり，したがって $\gamma = \sup(E) < \kappa$ となる．よって，$Y = \bigcup_{\alpha \in E} X_\alpha$ とすると，正規性を用いることで，$X - Y \in I$ が容易に分かるから，これが求めるようなものとなっている．

(b) $\{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) < \alpha\} \in I^+$ だったと仮定してみると，正規性から，ある $\delta < \kappa$ に対し $A = \{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \delta\} \in I^+$ となる．各 $\alpha \in A$ に対し，$\langle \eta^\alpha_\xi \mid \xi < \delta\rangle$ を α で共

終として，各 $\xi<\delta$ に対し，A 上の退行的な関数 g_ξ を，$g_\xi(\alpha)=\eta_\xi^\alpha$ によって定義する．(a) により，各 $\xi<\delta$ に対し，$A_\xi\subseteq A$ と $\gamma_\xi<\kappa$ で，$[A_\xi]=[A]$ かつ，$g_\xi``A_\xi\subseteq\gamma_\xi$ となるものがとれる．$\gamma=\sup(\{\gamma_\xi\mid\xi<\delta\})<\kappa$ とおく．κ-完備性により，$\bigcap_{\xi<\delta}A_\xi\in I^+$ となるが，A_ξ の定義から，$\bigcap_{\xi<\delta}A_\xi\subseteq\gamma$ となるので，これは矛盾である．

(c) $W=\{\alpha<\kappa\mid S\cap\alpha$ は α で定常でない $\}\in I^+$ だったとしてみる．このときには，各 $\alpha\in W$ に対し α で閉非有界な C_α で，$C_\alpha\cap S=\emptyset$ となるものがある．$\xi<\kappa$ に対し，$f_\xi\colon W\to\kappa$ を，

$$f_\xi(\alpha)=\begin{cases}C_\alpha \text{ の } \xi \text{ 番目の元} & \text{このようなものがあるとき}\\ 0 & \text{そうでないとき}\end{cases}$$

として定義する．このとき f_ξ は W 上の退行的な関数となるから，(a) により，$W_\xi\subseteq W$ と $\gamma_\xi<\kappa$ で，$[W_\xi]=[W]$ かつ $f_\xi``W_\xi\subseteq\gamma_\xi$ となるものが存在する．

D を $W_\xi,\xi<\kappa$ の対角共通部分とする．つまり，

$$D=\{\alpha\in W\mid\alpha\in\textstyle\bigcap_{\xi<\alpha}W_\xi\}$$

とする．このとき，$[D]=[W]$ となる：そうでなければ，$\{\alpha\in W\mid\exists h(\alpha)<\alpha(\alpha\notin W_{h(\alpha)})\}\in I^+$ となるから，正規性により，ある $\xi<\kappa$ に対し，$\{\alpha\in W\mid\alpha\notin W_\xi\}\in I^+$ となる．しかし，これは $[W_\xi]=[W]$ と矛盾である．次に $C=\{\alpha<\kappa\mid\alpha$ は極限順序数$\wedge$ $\forall\xi<\alpha(\gamma_\xi<\alpha)\}$ とすると，これは閉非有界な集合である．

議論を終わらせるには，S は定常だから，$\eta\in S\cap C$ がとれるが，$\zeta\in D$ を $\zeta>\eta$ となるようにとる．(b) により，ζ は正則基数と仮定してよい．したがって，$f_\eta(\zeta)$ は C_ζ の η 番目の元となっている．実際，$f_\eta(\zeta)=\eta$ となることが，不等式

$$\eta\leq f_\eta(\zeta)=\sup(\{f_\xi(\zeta)\mid\xi<\eta\})\leq\sup(\{\gamma_\xi\mid\xi<\eta\})\leq\eta$$

から分かる．このうち，等式は η が極限順序数であることから導かれ，その次の不等式は $\zeta\in D$ から，最後のものは $\eta\in C$ から導かれる．したがって，$\eta=f_\eta(\zeta)\in C_\zeta$ となるが，一方 $\eta\in S$ であるから，これは矛盾である．

(d) $X\in I^+$ と仮定してよいが，I^* は正規で，したがってすべての閉非有界な部分集合を含んでいるから，X は定常である．ここで，

$$M(X)=X\cap\{\alpha<\kappa\mid X\cap\alpha \text{ は } \alpha \text{ で定常}\},$$

だから，(c) により結果が導ける．

(e) は，(b), (d) および κ-完備性から導ける．　⊣

弱コンパクト基数のときと同じように，(e) は対角共通部分を用いることで，$\{\alpha<\kappa\mid\alpha$ は α-弱マーロ基数 $\}\in I^*$ 等々，とさらに続けることができる．

ソロヴェイは，16.8(d) を用いて，それ自身は巨大基数の仮説を必要としないような定常集合に関する基本的な結果を確立している：

16.9 定理　(Solovay [71]). $\kappa>\omega$ を正則基数として，$X\subseteq\kappa$ を定常集合とする．このとき，X を κ 個の互いに素な定常集合に分割することができる．つまり，互いに共通部分を

持たない定常集合 $X_\xi, \xi < \kappa$ で，$X = \bigcup_{\xi<\kappa} X_\xi$ となるものが存在する．

証明 証明の要点は，次の命題にある：

(*) $S \subseteq \kappa$ が定常集合で，$\kappa - S$ が κ で非有界なら，$S - M(S) = \{\alpha \in S \mid S \cap \alpha$ は α で定常集合でない$\}$ は κ の定常集合となる．

これを示すために，κ の閉非有界部分集合 C をとる．D を κ 未満の C の極限点の全体として，E を $\kappa - S$ の κ 未満の極限点の全体とする．D と E は両方とも閉非有界な κ の部分集合だから，$S \cap D \cap E \neq \emptyset$ となっている．α を $S \cap D \cap E$ の最小元とする．$\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$ なら，$\alpha \in E$ により，$S \cap \alpha$ と共通部分を持たない α の非有界な部分集合で，順序型 ω を持つものがある．$\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$ なら，$D \cap E \cap \alpha$ が $S \cap \alpha$ と共通部分を持たない α の閉非有界部分集合となっていることは直ちに分かる．したがって，どちらの場合にも，$\alpha \in (S - M(S)) \cap C$ となる．

定理を確立するためには，必要なら X の部分集合をとって $\kappa - X$ は κ で非有界であると仮定してよい．もし X が κ 個の共通部分を持たない定常部分集合に分割できないなら，$\mathrm{NS}_\kappa|X$ は正規な κ-飽和的イデアルとなることが容易に確かめられる．ところが，このときには，$S = X$ に対する (*) は 16.8(d) に矛盾する． ⊣

この結果は，現在では組合せ論的集合論での標準的なツールとなっており，16.8(d) を用いない証明も工夫されている（例えば，Jech [78: 434] を参照）．そうだとしても，この定理は巨大集合の文脈で発見された集合論の基本的な結果として，重要な例となっていることに変わりはない．もう一つのこのような例としては，シルバーの特異基数問題に関する 1974 年の結果がある（第 II 巻を参照）．これらの結果は，巨大基数の理論の研究を通じて開発された技術により，巨大基数と直接には関係のない集合論の重要な結果が得られている，という意味で，この理論の“実用的な意味での有用性”を実証するものとなっている．

κ の部分集合のイデアル NS_κ に関する基礎的な組合せ論的問題の一つが間もなく提起されている：

> ある正則基数 $\kappa > \omega$ に対し，NS_κ あるいは，ある定常集合 $S \subseteq \kappa$ に対する $\mathrm{NS}_\kappa|S$ が κ^+-飽和的となることはあり得るか？

16.9 により，κ-飽和性は否定されているが，κ^+-飽和性の問題，特に $\kappa = \omega_1$ の場合は未解決の問題として残ったのだった．間もなく得られたいくつかの結果により，非極限基数 κ 上の κ^+-飽和的イデアルの存在は非常に強い仮説で，特に，ω_1 でのこの問題が非常に興味のあるものであることが明らかになってくる．研究の進展につれて，イデアルと巨大基数の間の関係に対する理解が次第に深まり，遂に 1980 年代の半ばに上の問題に対する肯定的な答が得られることになる（§32 と第 II 巻を参照）．

分割の性質についてはどうだろうか？ ソロヴェイは $<\kappa$-飽和性を用いてローボトムの正規超フィルターに関する結果 7.17 の一般化を確立している．基数 κ 上のフィルター F と $\omega < \nu < \kappa$ に対し，

F は ν-ローボトム　$\Leftrightarrow$　任意の $\gamma < \kappa$ と $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ に対し，
$X \in F$ で $|f``[X]^{<\omega}| < \nu$ となるものが存在する．

F はローボトム　$\Leftrightarrow$　F は ω_1-ローボトム

とする．この ν-ローボトム基数の概念のフィルターによる強化は，正規超フィルターのラムズィー基数に対するものと類似の関係を示ものとなっている．これに関する定理を述べる前にまず簡単な考察を与えておく：

16.10 演習　$\nu < \kappa$ として，I を κ 上の ν-飽和的イデアルとする．$\gamma < \kappa$ に対し，$f\colon \kappa \to \gamma$ で，$E = \{\xi < \gamma \mid f^{-1}(\{\xi\}) \in I^+\}$ とすると，$E \neq \emptyset, |E| < \nu$ かつ，$\bigcup_{\xi \in E} f^{-1}(\{\xi\}) \in I^*$ となる．　$\dashv$

16.11 定理　(Solovay [71])．I を κ 上の正規な ν-飽和的イデアルとし，ν は正則基数で $\omega < \nu < \kappa$ となっているとする．このとき，I^* は ν-ローボトム・フィルターである．

証明　以下をすべての $n \in \omega$ に対し示せればよい：任意の $\gamma < \kappa$ と $f\colon [\kappa]^n \to \gamma$ に対し，$X \in I^*$ で，$|f``[X]^n| < \nu$ となるものが存在する．

帰納法で証明するが，$n = 1$ の場合は 16.10 によりよいから，この主張が n に対し成り立つと仮定して，$\gamma < \kappa$ で $f\colon [\kappa]^{n+1} \to \gamma$ とする．各 $\alpha < \kappa$ に対し，$f_\alpha\colon [\kappa]^n \to \gamma$ を次のように定義する：

$$f_\alpha(s) = \begin{cases} f(\{\alpha\} \cup s) & \alpha < \min(s) \text{ のとき,} \\ 0 & \text{そうでないとき.} \end{cases}$$

帰納法の仮定により，各 $\alpha < \kappa$ に対し，$H_\alpha \in I^*$ を，$f_\alpha``[H_\alpha]^n = S_\alpha$ としたとき，$|S_\alpha| < \nu$ となるようにとる．

ここでさらに集合を削ってゆく．まず，$g\colon \kappa \to \nu$ を $g(\alpha) = |S_\alpha|$ で与える．16.10 により，$W \in I^*$ を $|g``W| < \nu$ となるようにとる．$\delta = \sup(g``W)$ とすると，ν は正則基数だったから，$\delta < \nu$ となる．各 $\alpha \in W$ に対し，$h_\alpha\colon \delta \to S_\alpha$ を上射とする．ここで，各 $\xi < \delta$ に対し，$g_\xi\colon W \to \gamma$ を，$g_\xi(\alpha) = h_\alpha(\xi)$ で定義する．前と同じように，各 $\xi < \delta$ に対し，$W_\xi \subseteq W$ で，$W_\xi \in I^*$ かつ，$|g_\xi``W_\xi| < \nu$ となるものがとれる．$\nu$ が正則基数であることから，$E = \bigcup_{\xi<\delta} g_\xi``W_\xi$ とすると，$|E| < \nu$ である．

最後に，$X = \bigcap_{\xi<\delta} W_\xi \cap \triangle_{\alpha<\kappa} H_\alpha$ とおく．正規性により，$X \in I^*$ となるから，$f``[X]^{n+1} \subseteq E$ が示せれば証明が完了する．$t \in [X]^{n+1}$ として，$t = \{\alpha\} \cup s$ とする．ここに，$\alpha < \min(s)$ とする．このとき，$s \in [H_\alpha]^n$ だから，$f(t) = f_\alpha(s) \in S_\alpha$ となり，$\alpha \in \bigcap_{\xi<\delta} W_\xi$ により，$S_\alpha \subseteq E$ が言える[1]．　$\dashv$

16.12 系　(Prikry [75])．

(a) κ 上に ν-飽和的イデアルが存在して，$\omega < \nu < \kappa$ かつ $2^{<\nu} = \kappa$ となっているとする．このとき，すべての $\nu \leq \lambda < \kappa$ に対し $2^\lambda = \kappa$ が成り立つ．

---

[1] ［訳注］ $\alpha \in W_\xi$ なら $g_\xi(\alpha) \in E$ となるから，g_ξ の定義から $h_\alpha(\xi) \in E$ となる．したがって，$S_\alpha = \{h_\alpha(\xi) \mid \xi < \delta\} \subseteq E$ である．

(b) $2^{\aleph_0}$ が実数値可測なら，$2^\lambda = 2^{\aleph_0}$ がすべての $\lambda < 2^{\aleph_0}$ に対し成り立つ．

証明 (a) ν が正則基数なら，主張は 16.11 と 8.9 から示される．ν が特異基数なら，$2^\nu = \kappa$ となる[2]; ところが，$\nu < \kappa$ だから，16.3 により，$\nu^+ < \kappa$ となる．したがって，ν^+-飽和性から，16.11 と 8.9 により主張が示される（これの別証はイデアルが λ-飽和的となるような最小の λ は常に正則基数になる，という Erdös-Tarski [43] の結果を用いることによっても得られる）．

(b) は (a) から導ける． ⊣

(b) はプリクリの論文の主定理で，彼の論法は 8.9 が議論の中に埋め込まれているものであった．(b) の結論は，マルティンの公理からも導かれるが，マルティンの公理自身は，$2^{\aleph_0}$ の実数値可測性と両立しない．

クーネンにより可測基数との類似性はさらに拡張されていて，彼はある $\nu < \kappa$ に対し κ 上の ν-飽和的イデアルの存在するような κ がある種の Π^2_1-記述不可能性を持つことを示している（Solovay [71] を参照）．

§17 飽和イデアル II

本節では，強制法によって得られる，飽和イデアルに関する相対的無矛盾性の初期の結果について述べる．ソロヴェイは 16.11 を得て，これにシルバーの可測性での論法を適用することで 16.1(b) を確立することができた —— 20.3 と 20.4 を参照．このすぐ後にクーネンは Kunen [70] で超巾の反復を用いて，包括的な結果を得るための条件は κ^+-飽和性で十分であることを示している：**I が κ 上の正規な κ^+-飽和的イデアルなら，κ は I から相対的構成可能な集合の全体のクラス $L[I]$ で可測基数となる．さらに，$L[I]$ で，$I \cap L[I]$ の双対フィルターは κ 上の正規超フィルターとなる．** この結果をさらに改良したものは後に確立されることになる（第 II 巻の Precipitous Ideal の項を参照）．ここで重要なのは，以下での強制法による議論では，基礎モデルで可測基数が存在することがつねに仮定されているが，この仮定が必要かつ十分である，ということである．

プリクリによる強制法を用いた結果が，この分野での初期の研究をうながすことになった．プリクリは，飽和性を保存するためには，連鎖条件があれば十分であり，したがって，飽和イデアルは様々な generic 拡大で保存されることを示したのであった．次は彼の結果を改良したものである．

17.1 定理 （$\lambda < \kappa$ に対しては Prikry [66,70]，$\lambda = \kappa$ に対しては Solovay [71: 411]，$\lambda = \kappa^+$ に対しては Kakuda [72]）I を κ 上の λ-飽和的イデアルで，$\lambda \leq \kappa^+$ は正則基数とし，P を，$\nu < \kappa$ かつ $\nu \leq \lambda$ となる ν に対し ν-c.c. を満たすような p.o. とする．このとき，

$$\Vdash_P \check{I} \text{ は } \kappa \text{ 上の } \lambda\text{-飽和的イデアルを生成する．}$$

---

2 ［訳注］ν_α, $\alpha < \mathrm{cf}(\nu)$ を ν で共終として，$2^\nu = \Pi_{\alpha<\mathrm{cf}(\nu)} 2^{\nu_\alpha} \leq \kappa^{\mathrm{cf}(\nu)} = (2^{<\nu})^{\mathrm{cf}(\nu)} = 2^{<\nu} = \kappa$ となる．

証明　$\dot{I}$ を I から生成されるイデアルの P-名称とする．つまり，$\Vdash \dot{I} = \{X \subseteq \kappa \mid \exists Y \in \check{I} (X \subseteq Y)\}$ とする．$\Vdash$「$\dot{I}$ は κ-完備」を示すには，$\nu \leq \kappa$ の仮定で十分である：$\rho < \kappa$ で，$p \Vdash \{\dot{X}_\alpha \mid \alpha < \rho\} \subseteq \check{I}$ なら，$A \in I$ で $p \Vdash \bigcup_{\alpha<\rho} \dot{X}_\alpha \subseteq \check{A}$ となるものがあることが示せればよい．このために，すべての $\alpha < \rho$ に対し，Q_α を，任意の $q \in Q_\alpha$ に対し，$A^q_\alpha \in I$ で $q \Vdash \dot{X}_\alpha = \check{A}^q_\alpha$ となるようなものが存在するような p の下の極大な反鎖とする．ν-c.c. により，$|Q_\alpha| < \nu \leq \kappa$ となるから，$A_\alpha = \bigcup\{A^q_\alpha \mid q \in Q_\alpha\} \in I$ である．したがって，$A = \bigcup_{\alpha<\rho} A_\alpha \in I$ で $p \Vdash \bigcup_{\alpha<\rho} \dot{X}_\alpha \subseteq \check{A}$ となることも容易に分かる．

λ-飽和性を示すために，$p \Vdash \{\dot{Y}_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \subseteq \dot{I}^+$ とする．$q \leq p$ と $\alpha < \beta < \lambda$ で $q \Vdash \dot{Y}_\alpha \cap \dot{Y}_\beta \in \dot{I}^+$ となるものが見つかればよい．

このために，各 $\alpha < \lambda$ に対し，

$$A_\alpha = \{\xi < \kappa \mid \exists q \leq p(q \Vdash\ \xi \in \dot{Y}_\alpha)\}$$

とする．$p \Vdash \dot{Y}_\alpha \subseteq \check{A}_\alpha$ だから，$A_\alpha \in I^+$ である．したがって，$A \in I^+$ で，

$$(*) \qquad \forall W(W \subseteq A \ \wedge\ W \in I^+ \ \rightarrow\ |\{\alpha < \lambda \mid W \cap A_\alpha \in I^+\}| = \lambda)$$

となるものがとれることが，λ-飽和性と λ が正則基数であることから導ける：$\{W_\gamma \mid \gamma < \rho\} \subseteq I^+$ を，$\gamma < \delta < \rho$ なら $W_\gamma \cap W_\delta \in I$ で，$|\{\alpha < \lambda \mid W_\gamma \cap A_\alpha \in I^+\}| < \lambda$ となるようなもののうち極大なものとする．このとき $\rho < \lambda$ となるから，十分に大きな $\beta < \lambda$ に対し $A = A_\beta$ とすれば $(*)$ が満たされることが容易に分かる．

$(*)$ により，集合 $\{S_\eta \mid \eta < \nu\} \subseteq [\lambda]^{<\lambda}$ および $\{B_\alpha \mid \alpha \in S_\eta\}$ で $\eta < \zeta < \nu$ に対し以下を満たすようなものがとれる：

(i) $S_\eta \cap S_\zeta = \emptyset$，

(ii) $\{\alpha, \beta\} \in [S_\eta]^2$ なら，$B_\alpha \subseteq A_\alpha \cap A$ かつ $B_\alpha \in I^+$ となるが，$B_\alpha \cap B_\beta = \emptyset$ である，

(iii) $[A] = \sum_{\alpha \in S_\eta} [B_\alpha]$.

これの帰納的な構成は，$\eta < \nu$ 番目の構成ステップでは，$\nu \leq \lambda$ で λ は正則基数だから，$|\bigcup_{\xi<\eta} S_\xi| < \lambda$ となっており，したがって $(*)$ により，$S_\eta \subseteq \lambda - \bigcup_{\xi<\eta} S_\xi$ と $\{B_\alpha \mid \alpha \in S_\eta\}$ を (iii) を満たし，$\{\alpha, \beta\} \in [S_\eta]^2$ なら，$B_\alpha \subseteq A_\alpha \cap A$ で $B_\alpha \in I^+$ だが，$B_\alpha \cap B_\beta \in I$ となるようにとることができる．λ-飽和性により，$|S_\eta| < \lambda$ だから，いつものように，B_α を，$B_\alpha - \bigcup\{B_\beta \mid \beta < \alpha \ \wedge\ \beta \in S_\eta\}$ で置き換えることで，$B_\alpha, \alpha \in S_\eta$ は互いに共通部分を持たないとしてよい．

$A' = \bigcap_{\eta<\nu} \bigcup_{\alpha \in S_\eta} B_\alpha$ とすれば，(iii) と κ-完備性により $[A'] = [A]$ となるから，$A' \in I^+$ である．(ii) により，各々の $\xi \in A'$ と $\eta < \nu$ に対して，$\xi \in B_\alpha \subseteq A_\alpha$ となるような $\alpha \in S_\eta$ がちょうど一つある．したがって，A_α の定義により，$q^\eta_\xi \leq p$ で $q^\eta_\xi \Vdash \xi \in \dot{Y}_\alpha$ となるものがとれる．ν-c.c. により，各 $\xi \in A'$ に対し $\eta_\xi < \zeta_\xi < \nu$ と $r_\xi \in P$ で $r_\xi \leq q^{\eta_\xi}_\xi, q^{\zeta_\xi}_\xi$ となるものがあることに注意する（もし $\lambda \leq \kappa$ なら，$\dot{Y}_\alpha$ を互いに共通部分を持たないようにとっておくことができるから，r_ξ は ξ が異なる 2 つの Y_α に属すことを強制することから，矛盾となり，これにより証明を終えることができる）．κ-完全性と $\nu < \kappa$ により，

$\eta < \zeta < \nu$ と $B \subseteq A'$ で $B \in I^+$ かつ，すべての $\xi \in B$ に対し，$\langle \eta_\xi, \zeta_\xi \rangle = \langle \eta, \zeta \rangle$ となるようなものが存在する．最後に，(i) と (ii), および，$\mathcal{P}(\kappa)/I$ が完備であることから，異なる $\alpha, \beta < \lambda$ で，$\alpha \in S_\eta$, $\beta \in S_\zeta$ かつ $Z = B_\alpha \cap B_\beta \cap B \in I^+$ となるものがある．

上の議論により，

各 $\xi \in Z$ に対し，$r_\xi \leq p$ で，$r_\xi \Vdash \xi \in \dot{Y}_\alpha \cap \dot{Y}_\beta$ となるものが存在する

ような $Z \in I^+$ と $\alpha < \beta < \lambda$ のとれることが示せた．残りは簡単である．$Q \subseteq P$ を $q \in Q$ なら $Z_q \in I$ で $q \Vdash \dot{Y}_\alpha \cap \dot{Y}_\beta \subseteq \check{Z}_q$ となるものがあるような p の下の極大な反鎖とする．$|Q| < \nu \leq \kappa$ となるから，$Z - \bigcup_{q \in Q} Z_q \in I^+$ である．$Z - \bigcup_{q \in Q} Z_q$ の任意の元 ξ に対し，r_ξ は Q のすべての元と共存不可能となる．したがって，$r_\xi \Vdash \dot{Y}_\alpha \cap \dot{Y}_\beta \in \dot{I}^+$ となり，証明が完了する． ⊣

この結果を，κ-c.c. に対して拡張することはできない．レヴィ崩壊 $\mathrm{Col}(\omega, \kappa)$ は κ-c.c. を持つが，16.3 により，ω_1 上には ω_1-飽和的イデアルは存在しないからである．κ 上の κ^+-飽和的イデアルに対しては，Laver [82] および後に Baumgartner-Taylor [82a] が，上の結果の結論が正しくなるような κ-c.c. を満たす P の特徴付けを与えている．17.1 はこの結果の一部となっており，ここで与えた証明も，この特徴付けの証明を変形して得られたものである．上の補題での $\lambda < \kappa$ の場合から飽和イデアルに関する最初の無矛盾性の結果が得られている：

17.2 系 (Prikry [66, 70]). κ を可測基数とする．このとき，ω_1-c.c. を満たす p.o. P で，

$$\Vdash_P 2^{\aleph_0} = \kappa \ \wedge\ \exists I (I \text{ は } \kappa \text{ 上 } \omega_1\text{-飽和的なイデアル})$$

となるものがある．

証明 P を κ 個のコーエン実数を付加する p.o. とする．つまり，

$$P = \{p \mid p \text{ は有限の関数} \ \wedge\ \mathrm{dom}(p) \subseteq \kappa \times \omega \ \wedge\ \mathrm{ran}(p) \subseteq 2\}$$

である．よく知られているように P は ω_1-c.c. を満たし（これは Δ-レンマ 10.4 を用いて証明できる）$\Vdash_P 2^{\aleph_0} = \kappa$ となる（片方向の証明には 10.5 を用いる）．17.1 により，κ 上 κ-完備な任意の超フィルターに双対なイデアルは generic 拡大で ω_1-飽和的イデアルを生成する． ⊣

プリクリは Prikry [70] でこの generic 拡大では，κ は実数値可測ではないことを示している．ソロヴェイはプリクリの仕事に触発されてコーエン実数ではなく“ランダム実数を κ 個付け加える”ことにより，κ が実数値可測性を失わないことを示したのであった．まず次でこの強制法について議論した後，このソロヴェイの結果を確立する．

積測度による強制

任意の基数 κ に対し，§0 で述べたようなルベーグ測度の定義を想起させる ${}^\kappa 2$ 上の積測度を導入する．関数 s で $\mathrm{dom}(s) \in [\kappa]^{<\omega}$, $\mathrm{ran}(s) \subseteq 2$ となるものに対し，

$$O(s) = \{f \in {}^\kappa 2 \mid f \supseteq s\}$$

とおく．$O(s)$ の形の集合を基本開集合としてとることにより，${}^{\kappa}2$ に位相が入る．

$\mathcal{B}_\kappa$ を $O(s)$ の形の集合から生成された ${}^{\kappa}2$ 上の σ-代数とする．

$\mathcal{B}_\kappa$ に測度を入れるには，m_2 を $m_2(\emptyset) = 0, m_2(\{0\}) = m_2(\{1\}) = \frac{1}{2}$, かつ $m_2(\{0,1\}) = 1$ で指定される $\mathcal{P}(2)$ 上の測度として，

m_κ を m_2 から惹き起こされる $\mathcal{B}_\kappa$ 上の積測度とする．

すべての s に対し，$m_\kappa(O(s)) = 2^{-|s|}$ となり，m_κ はこの性質を持つ唯一の $\mathcal{B}_\kappa$ 上の測度となる．

ここで

$$\mathcal{B}_\kappa^* = \{X \in \mathcal{B}_\kappa \mid m_\kappa(X) > 0\}$$

に

$$p \leq q \quad \Leftrightarrow \quad p \subseteq q$$

で順序を入れたものを強制法での p.o. として考える．次は 11.7 とまったく同様に示せる：

17.3 演習

(a) $p, q \in \mathcal{B}_\kappa^*$ なら，$p \perp q \quad \Leftrightarrow \quad m_\kappa(p \cap q) = 0$ となる．

(b) $\mathcal{B}_\kappa^*$ は ω_1-c.c. を持つ． ⊣

$\mathcal{B}_\kappa^*$ は分離的ではなく，これの分離的商構造は，$p \approx q \quad \Leftrightarrow \quad m_\kappa(p \triangle q) = 0$ により得られる．これを用いて $\approx$ を $\mathcal{B}_\kappa$ の全体に拡張して，集合のブール演算を $\approx$ で割ったものを考えると，$\mathcal{B}_\kappa/\approx$ はブール代数となる．このブール代数は，上で議論した $\mathcal{P}(\kappa)/I$ と類似の形をしていて，$\{X \in \mathcal{B}_\kappa \mid m_\kappa(X) = 0\}$ が対応するイデアルとなる．16.5 の証明を少し変更することで，ω_1-c.c. から $\mathcal{B}_\kappa/\approx$ **は完備ブール代数となる**ことが分かる．

§11 と同じようにして，$\mathcal{B}_\kappa^*$ の適当な元の集合に対しそのコードを導入することができて，$\mathcal{B}_\kappa^*$ による強制はランダム実数に対応するような新しい関数：$\kappa \to 2$ を付加することと一致することを示すことができる．また，これに対し，11.9 および 11.10 と類似の特徴付けを与えることができる．次の補題は $\mathcal{B}_\kappa^*$ による強制が連続体の濃度にどのような影響を与えるかを示している．

17.4 命題 $\Vdash_{\mathcal{B}_\kappa^*} \ulcorner 2^{\aleph_0} \geq \kappa \urcorner$ となり，さらに $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$ なら，$\Vdash_{\mathcal{B}_\kappa^*} \ulcorner 2^{\aleph_0} = \kappa \urcorner$ が成立する．

証明 極限順序数 $\gamma < \kappa$ に対し，$\dot{f}_\gamma$ を $\Vdash \dot{f}_\gamma\colon \omega \to 2$ となるような名称で，すべての $n \in \omega$ と $i < 2$ に対し，

$$\Vdash \dot{f}_\gamma(n) = i \ \leftrightarrow \ \check{O}(\{\langle \gamma + n, i \rangle\}) \in \dot{G}$$

となるようなものとする（ここに $\dot{G}$ は generic な対象の標準的名称とする）．$\Vdash 2^{\aleph_0} \geq \kappa$ の証明には，$\Vdash \dot{f}_\gamma \neq \dot{f}_\delta$ がすべての極限順序数 $\gamma < \delta < \kappa$ に対し成り立つことが示せればよい：

$p \in \mathcal{B}_\kappa^*$ を任意にとる．$k \in \omega$ を十分に大きくとって，$2^{-k} < m_\kappa(p)$ となるようにする．

各 $t \in {}^k2$ に対し，

$$\bar{t}\colon \{\gamma, \gamma+1, \ldots, \gamma+k-1, \delta, \delta+1, \ldots, \delta+k-1\} \to 2$$

を，$\bar{t}(\gamma+i) = \bar{t}(\delta+i) = t(i)$ がすべての $i < k$ に対し成り立つようなものとする．$q = \bigcup_{t \in {}^k2} O(\bar{t})$ とすれば，$m_\kappa(q) = 2^k(2^{-2k}) = 2^{-k}$ となるから，$m_\kappa(p-q) > 0$ である．したがって，強制法での標準的な議論により，$p - q \Vdash \dot{f}_\gamma|k \neq \dot{f}_\delta|k$ となることが示せる．

$\kappa^{\aleph_0} = \kappa$ なら，${}^\omega\omega$ でのボレル階層と同様な $\mathcal{B}_\kappa$ の ω_1 の長さを持つ階層を考察することにより，$|\mathcal{B}_\kappa| = \aleph_1 \cdot \kappa^{\aleph_0} = \kappa$ が分かる．したがって，ω_1-c.c. と 10.5 により，$\Vdash 2^{\aleph_0} \leq \kappa$ となる． ⊣

$\gamma < \kappa$ に対し，$e_\gamma(n) = \gamma + n$ で与えられる写像 $e_\gamma\colon \omega \to \kappa$ は完備な埋め込み $\mathcal{B}^*_\omega \to \mathcal{B}^*_\kappa$ を惹き起こす．したがって，10.1(a) により，G が $\mathcal{B}^*_\kappa$-generic なら，$e_\gamma^{-1}(G)$ は $\mathcal{B}^*_\omega$-generic となる．さらに，極限順序数 γ に対しては，これらの generic 対象は上の証明の $\dot{f}_\gamma$ によって決定され，したがってランダム実数と見なすことができる（§11 ではランダム実数は $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{P}({}^\omega\omega)$ によって導入されており，ここでは $\mathcal{B}^*_\omega \subseteq \mathcal{P}({}^\omega 2)$ となっているが，可算個の点を無視すれば，${}^\omega\omega$ と ${}^\omega 2$ の間の自然な位相同型が存在し，このような対応は測度も保存し（Levy [79: VII§3] を参照），したがってランダム性も保存するものとなる）．このような意味で，$\mathcal{B}^*_\kappa$ による強制は "κ 個のランダム実数の付加" と呼ばれる．とはいえ，測度論的な構成から，これは "side-by-side" に κ 個のランダム実数を付加する強制とは異なるものとなっている．

ソロヴェイは $\mathcal{B}^*_\kappa$ による彼の結果 16.1(a) をブール値モデルを用いて証明している．証明を述べるために，$\mathcal{B}^*_\kappa$ での強制法の言語の論理式に対する弱い意味でのブール値を与えることでこのアプローチの一部分を継承することにする：任意の論理式 φ に対し，極大反鎖 $A \subseteq \{p \in \mathcal{B}^*_\kappa \mid p \parallel \varphi\}$ を選ぶ．ω_1-c.c. により，A は可算である．ここで

$$[\![\varphi]\!] = \bigcup\{p \in A \mid p \Vdash \varphi\} \in \mathcal{B}_\kappa$$

とおく．$[\![\varphi]\!]$ は次の二つの重要な性質をもつ：$[\![\varphi]\!] \neq \emptyset$ なら，$[\![\varphi]\!] \Vdash \varphi$ となる；また，任意の $q \in \mathcal{B}^*_\kappa$ に対し，$q \Vdash \varphi$ なら，$m_\kappa(q - [\![\varphi]\!]) = 0$ となる．$[\![\varphi]\!]$ は A の選択に依存するが，問題となるのは $m_\kappa([\![\varphi]\!])$ と $p \in \mathcal{B}^*_\kappa$ に対する $m_\kappa([\![\varphi]\!] \cap p)$ の値で，これらが A に依存しないことは容易に確かめられる．

次の結果から 16.1(a) を確立することができる：

17.5 定理 (Solovay [66, 71]). κ を可測基数とする．このとき，

$$\Vdash_{\mathcal{B}^*_\kappa} 2^{\aleph_0} = \kappa \ \wedge\ \kappa \text{ は実数値可測基数である}$$

が成り立つ．

証明 17.4 により，実数値可測性を確立すればよい．U を κ 上の κ-完備超フィルターとする．まず，各 $p \in \mathcal{B}^*_\kappa$ ごとに，名称 $\dot{X}$ で $p \Vdash \dot{X} \subseteq \kappa$ となるものに対する "測度" μ_p を次で定義する：

$$\mu_p(\dot{X}) = r \quad \Leftrightarrow \quad \{\xi < \kappa \mid \frac{m_\kappa([\![\xi \in \dot{X}]\!] \cap p)}{m_\kappa(p)} = r\} \in U\ .$$

$2^{\aleph_0} < \kappa$ で，U は κ-完備だから，これはうまく定義されている．次のことは容易に確かめられる．

(i) $X \in U$ なら，$\mu_p(\check{X}) = 1$ となり，$X \notin U$ なら $\mu_p(\check{X}) = 0$ となる；

(ii) $p \Vdash \dot{X} \subseteq \dot{Y} \subseteq \kappa$ なら，$\mu_p(\dot{X}) \leq \mu_p(\dot{Y})$ となる．

(iii) $\gamma < \kappa$ で $p \Vdash$「$\dot{X} = \bigcup\{\dot{X}_\alpha \mid \alpha < \gamma\} \subseteq \kappa$ は互いに素な集合の和集合となっている」なら，$\mu_p(\dot{X}) = \sum_{\alpha<\gamma} \mu_p(\dot{X}_\alpha)$ となる．

最後のものについては，$\xi < \kappa$ に対し，

$$m_\kappa([\![\xi \in \dot{X}]\!] \cap p) = m_\kappa(\textstyle\bigcup_{\alpha<\gamma}[\![\xi \in \dot{X}_\alpha]\!] \cap p) = \sum_{\alpha<\gamma} m_\kappa([\![\xi \in \dot{X}_\alpha]\!] \cap p)$$

となることに注意すればよい．ここで等式は上での和集合が ω_1-c.c. により実際には可算和となっていることから分かる．

ここで重要になるのは，任意の $p \in \mathcal{B}^*_\kappa$, $p \Vdash \dot{X} \subseteq \kappa$ となる名称 $\dot{X}$, および $r \in \mathbb{R}$ で $0 \leq r \leq 1$ となるものに対し，

$$(*) \qquad \forall q \leq p \exists s \leq q(\mu_s(\dot{X}) \leq r) \text{ なら } \mu_p(\dot{X}) \leq r$$

となる（および，最後の 2 つの $\leq$ を $\geq$ で置き換えた同様の命題も成り立つ）ということである．これを示すには，$A = \{p_n \mid n \in \omega\}$ を p の下の極大な反鎖で，$\mu_{p_n}(\dot{X}) \leq r$ がすべての $n \in \omega$ に対し成り立つようなものとする．U の ω_1-完備性により，$E \in U$ で，各 $\xi \in E$ に対し，$m_\kappa([\![\xi \in \dot{X}]\!] \cap p_n) \leq r \cdot m_\kappa(p_n)$ がすべての $n \in \omega$ で成り立つようなものが存在する．このような ξ に対し，反鎖の極大性から，

$$m_\kappa([\![\xi \in \dot{X}]\!] \cap p) = \textstyle\sum_n m_\kappa([\![\xi \in \dot{X}]\!] \cap p_n) \leq r \cdot \sum_n m_\kappa(p_n) = r \cdot m_\kappa(p)$$

が成り立つ．したがって，$\mu_p(\dot{X}) \leq r$ である．

任意の $\mathcal{B}^*_\kappa$-generic な G に対し，$V[G]$ で，μ: $\mathcal{P}(\kappa) \to [0,1]$ を

$$\mu(X) = \lim(\{\mu_p(\dot{X}) \mid p \in G\})$$

で与える．ここに $\dot{X}$ は X の任意の名称とする．このとき $V[G]$ で，μ が κ 上の κ-加法的な測度であることを示せば定理が確立できる．上のような lim が存在して，これが名称 $\dot{X}$ に依存せず，必要な性質を満たすことを示すために，ソロヴェイは測度論でのラドン=ニコディムの定理を用いている．ここでは，Jech [78: 423ff] に習って，lim inf を用いて，もう少し小心な議論することにする：

まず，各 $p \in \mathcal{B}^*_\kappa$ に対し，名称 $\dot{X}$ で $p \Vdash \dot{X} \subseteq \kappa$ となるようなものに対する μ^*_p を，次で定義する：

$$\mu^*_p(\dot{X}) = \inf(\{\mu_q(\dot{X}) \mid q \leq p\})\ .$$

次に，$\dot{\mu}$ を $\Vdash \dot{\mu}$: $\mathcal{P}(\kappa) \to [0,1]$ となる名称で，

$$\Vdash \dot{X} \subseteq \kappa \to \dot{\mu}(\dot{X}) = \sup(\{\check{\mu}^*_p(\dot{X}) \mid p \in \dot{G}\})$$

を満たすものとする（ここに $\dot{G}$ は generic な対象の標準的名称とする）．μ_p^* と $\dot{\mu}$ の間には次のような基本的な関係が成り立つ：任意の $p \in \mathcal{B}_\kappa^*$, $p \Vdash \dot{X} \subseteq \kappa$ となる名称 $\dot{X}$, および有理数 $r \in [0,1]$ に対し，

$$(**) \qquad \mu_p^*(\dot{X}) \geq r \quad \Leftrightarrow \quad p \Vdash \dot{\mu}(\dot{X}) \geq \check{r}$$

となる．順方向は明らかである．逆方向を見るには，$p \Vdash \dot{\mu}(\dot{X}) \geq \check{r}$ と仮定して，$r_0 \in \mathbb{R}$ を $0 \leq r_0 < r$ となるようなものとする．このとき，$\mu_p^*(\dot{X}) \geq r_0$ となることが示せればよい：$\dot{\mu}$ の定義により，$p \Vdash \exists s \in \dot{G}(\check{\mu}_s^*(\dot{X}) \geq r_0)$ となる．つまり，任意の $q \leq p$ は $\mu_s^*(\dot{X}) \geq r_0$ となるようなある s と共存可能となる．一般に $p_1 \leq p_2$ なら $\mu_{p_1}^*(\dot{X}) \geq \mu_{p_2}^*(\dot{X})$ だから，

$$\forall q \leq p \exists s \leq q(\mu_s^*(\dot{X}) \geq r_0)$$

となっていることが分かる．ここで $(*)$ の $\geq$ 版で，任意の $p_0 \leq p$ を p と見なすと，$\mu_{p_0}(\dot{X}) \geq r_0$ が得られる．したがって，$\mu_p^*(\dot{X}) \geq r_0$ である．

$\Vdash$「$\dot{\mu}$ はうまく定義でき κ-加法的測度となる」を示し証明を完了する．上の (i) により，$X \in U$ なら，$\Vdash \dot{\mu}(\check{X}) = 1$ となる，一方 $X \notin U$ なら，$\Vdash \dot{\mu}(\check{X}) = 0$ である．また，上の (ii) により，$p \Vdash \dot{X} \subseteq \dot{Y} \subseteq \kappa$ なら，任意の $q \leq p$ に対し $\mu_q^*(\dot{X}) \leq \mu_q^*(\dot{Y})$ となる．したがって $p \Vdash \dot{\mu}(\dot{X}) \leq \dot{\mu}(\dot{Y})$ である（そうでなければ，$q \leq p$ と有理数 r で $q \Vdash \dot{\mu}(\dot{X}) \geq \check{r} > \dot{\mu}(\dot{Y})$ となるものがあるが，$(**)$ によりこれから $\mu_q^*(\dot{X}) \geq r > \mu_q^*(\dot{Y})$ が導けるので矛盾である）．特に，$p \Vdash \dot{X} = \dot{Y}$ なら，$p \Vdash \dot{\mu}(\dot{X}) = \dot{\mu}(\dot{Y})$ となり，したがって任意の $\mathcal{B}_\kappa^*$-generic な G に対し，$\dot{\mu}^G$ は $V[G]$ の元上でうまく定義されている．証明の残りで $\Vdash$「$\dot{\mu}$ は κ–加法的である」ということの検証をする：

まず，$\Vdash$「$\dot{\mu}$ は有限加法的である」を確かめる．これには $\Vdash$「$\dot{X}, \dot{Y} \subseteq \kappa$ は共通部分を持たない」が成り立っているとして，$\Vdash \dot{\mu}(\dot{X} \cup \dot{Y}) = \dot{\mu}(\dot{X}) + \dot{\mu}(\dot{Y})$ となることを示せばよい：r_1 と r_2 を $p \Vdash \dot{\mu}(\dot{X}) \geq \check{r}_1 \ \wedge \ \dot{\mu}(\dot{Y}) \geq \check{r}_2$ となるような有理数とする．このとき，

$$\mu_p^*(\dot{X} \cup \dot{Y}) \geq \mu_p^*(\dot{X}) + \mu_p^*(\dot{Y}) \geq r_1 + r_2$$

が成り立つ．最初の不等式は上の (ii),(iii) と μ_p^* の定義から，二番目の不等式は $(**)$ から導かれる．したがって再び $(**)$ により，$p \Vdash \dot{\mu}(\dot{X} \cup \dot{Y}) \geq \check{r}_1 + \check{r}_2$ となる．p, r_1, r_2 は任意だったから，このことから $\Vdash \dot{\mu}(\dot{X} \cup \dot{Y}) \geq \dot{\mu}(\dot{X}) + \dot{\mu}(\dot{Y})$ が帰結できる．

反対方向を示すには，$\Vdash \dot{\mu}(\dot{X} \cup \dot{Y}) > \dot{\mu}(\dot{X}) + \dot{\mu}(\dot{Y})$ だったとして矛盾を導く．このときには，ある p と有理数 r_3, r_4, r_5, r_6 に対し，

$$p \Vdash \dot{\mu}(\dot{X}) < \check{r}_3 < \check{r}_4 \ \wedge \ \dot{\mu}(\dot{Y}) < \check{r}_5 < \check{r}_6 \ \wedge \ \dot{\mu}(\dot{X} \cup \dot{Y}) \geq \check{r}_4 + \check{r}_6$$

とできる．$q \leq p$ なら，$(**)$ により $\mu_q^*(\dot{X}) < r_3$ である．よって，$\mu_s(\dot{X}) < r_3$ となるような $s \leq q$ がある．したがって，$(*)$ により，$\mu_p(\dot{X}) \leq r_3$ である．同様に $\mu_p(\dot{Y}) \leq r_5$ も言えるから，

$$\mu_p^*(\dot{X} \cup \dot{Y}) \leq \mu_p(\dot{X} \cup \dot{Y}) = \mu_p(\dot{X}) + \mu_p(\dot{Y}) \leq r_3 + r_5 < r_4 + r_6$$

となるが，これは $(**)$ により $p \Vdash \dot{\mu}(\dot{X} \cup \dot{Y}) \geq r_4 + r_6$ となることと矛盾する．

κ-加法性を示すために，$\gamma < \kappa$ で $\Vdash$「$\dot{X} = \bigcup\{\dot{X}_\alpha \mid \alpha < \gamma\} \subseteq \kappa$ は互いに素な集合族の和集合となっている」とする．有限加法性から，$\Vdash \dot{\mu}(\dot{X}) \geq \sum_\alpha \dot{\mu}(\dot{X}_\alpha)$ となる．反対方向を示すために，そうでないとして，p と有理数 r_1, r_2 で

$$p \Vdash \textstyle\sum_\alpha \dot{\mu}(\dot{X}_\alpha) < \check{r}_1 < \check{r}_2 \leq \dot{\mu}(\dot{X})$$

となるものがあると仮定してみる．任意の $t \in [\gamma]^{<\omega}$ に対し $\dot{X}_t$ を $\Vdash \dot{X}_t = \bigcup_{\alpha\in t} \dot{X}_\alpha$ となる名称とする．このとき，有限加法性から，$p \Vdash \dot{\mu}(\dot{X}_t) < \check{r}_1$ となる．このことから，前の節の $(*)$ を適用して，$\mu_p(\dot{X}_t) \leq r_1$ が分かる．t は任意だったから，上の (iii) により $\mu_p(\dot{X}) \leq r_1$ となる．ところがこれは $(**)$ により，$p \Vdash \dot{\mu}(\dot{X}) \geq \check{r}_2$ に矛盾する．これで証明が完了した．　⊣

クーネン=パリス強制

クーネンとパリスは Kunen-Paris [71] で初めて，$|P| \geq \kappa$ となる p.o. P による強制法での拡大で，可測基数 κ の性質を保存するようなものを与える広範囲に応用可能な手法を導入し，これを用いて κ 上の飽和イデアル I で $(I) \geq \kappa$ となるようなものに関する無矛盾性の結果を確立している．彼等の用いた基本的な図式を後の発展を見やすい形で与える．本節の残りの部分ではこの手法の応用について述べる．

κ を可測基数として，U を κ 上の正規超フィルターとし，$j\colon V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V, U)$ とする．j が弱い意味で中間拡大に拡張できるような条件のいくつかを p.o. の一般的な性質として考察する．P を p.o. で $j(P)$ を V での p.o. とみたとき，

(i) $j(P) \cong P * \dot{Q}$ となり，この同一視により，
(ii) $j(p) = \langle p, \dot{1\!\!1}_Q \rangle$ がすべての $p \in P$ に対し成り立つ．

この条件は強制法の反復と見なせるような様々な p.o. で成り立つ．

G を V 上 $j(P)$-generic とする．このとき，(i) と 10.9 により，G_0, G_1 で，$G = G_0 * G_1$，G_0 は B 上 P-generic, G_1 は $V[G_0]$ 上 $\dot{Q}^{G_0}$-generic で $V[G] = V[G_0][G_1]$ となるようなものがとれる．さらに (ii) により，

$$(*)\qquad p \in G_0 \text{ なら } j(p) \in G$$

となる．$M \subseteq V$ だから，G は M 上 $j(P)$-generic でもある．したがって，M の generic-拡大 $M[G]$ を考えることができる．ここで鍵となるのは，$(*)$ により，埋め込み j が，$V[G]$ で定義可能な初等的埋め込み

$$\bar{j}\colon V[G_0] \prec M[G]$$

に拡張できることである．ここでのアイデアは j を強制法での名称に適用することである：

$x \in V[G_0]$ として，$\dot{x}$ を P-名称で，$\dot{x}^{G_0} = x$ となるものとする．このとき，$j(\dot{x})$ は $j(P)$-名称となるから，

$$\bar{j}(x) = j(\dot{x})^{M[G]}$$

とすることができる．これはうまく定義できている，つまり，x の名称の選び方に依存し

ない：$\dot{y}$ をもうひとつ別の名称として，$p \in G_0$ で

$$p \Vdash_P \dot{x} = \dot{y}$$

となっているとする．このとき，(*) により $j(p) \in G$ となり，初等的埋め込みから M で

$$j(p) \Vdash_{j(P)} j(\dot{x}) = j(\dot{y})$$

が成り立つ．したがって，$j(\dot{x})^{M[G]} = j(\dot{y})^{M[G]}$ である．$\bar{j}$ が初等的埋め込みであることも，ここでの原子論理式 $\dot{x} = \dot{y}$ を一般の論理式で置き換えることで同様に確かめられる．最後に，$x \in V$ なら $x = \check{x}^{G_0}$ だから（強制法の言語が妥当に設定されていれば）$j(\check{x}) = \check{j}(x)$ となり，$\bar{j}$ は j を拡張することも分かる．

埋め込み $\bar{j}$ は超フィルターを生成する．内部モデル N に対し，

W は κ 上の N-正規超フィルター $\Leftrightarrow$
(i) W は $\mathcal{P}(\kappa) \cap N$ 上の超フィルターで
(ii) 任意の $f \in {}^{\kappa}\kappa \cap N$ で $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) < \xi\} \in W$ となるものに対し $\alpha < \kappa$ で $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) = \alpha\} \in W$ となるものが存在する．

(ii) は **N-κ-完備性とでも呼ぶべき性質を含んでいる**ことに注意したい． もちろん，ここでの要点は，$W \in N$ は要求されていないことである．次は 5.6 を連想させるものとなっている：

17.6 演習 $V[G]$ で $\bar{j}$ を上でのようなものとする．$\overline{U}$ を，

$$X \in \overline{U} \quad \Leftrightarrow \quad X \in \mathcal{P}(\kappa) \cap V[G_0] \ \wedge \ \kappa \in \bar{j}(X)$$

により定義すると，$\overline{U}$ は κ 上の $V[G_0]$-正規超フィルターで $\overline{U} \supseteq U$ となる． ⊣

以上がクーネン=パリスの基本図式である．これは $j(P) \cong P * \dot{Q}$ での $\dot{Q}$ の部分がおとなしい性質を持つような P に適用される．例えば，もし $\dot{Q}$ が κ の新しい部分集合を付加しない場合には，17.6 の $\overline{U}$ により，κ は $V[G]$ で可測基数となる．次の補題も $\overline{U}$ の双対に対して適用して，これが中間モデル N, $V[G_0] \subseteq N \subseteq V[G]$ で飽和イデアルとなることを帰結できる．内部モデル N に対し，

J は κ 上 N-λ-飽和的イデアル $\Leftrightarrow$
(i) J は $\mathcal{P}(\kappa) \cap N$ 上のイデアルで，
$\gamma < \kappa$ かつ $f \in {}^{\gamma}J \cap N$ なら，$\bigcup_{\alpha<\gamma} f(\alpha) \in J$ となり，
(ii) 任意の $g \in {}^{\lambda}J^+ \cap N$ に対し $\alpha < \beta < \lambda$ で $g(\alpha) \cap g(\beta) \in J^+$ となるものが存在する

とする．

17.7 補題 κ と λ を正則基数とし，P を λ-c.c. を満たす p.o. とする．このとき，

$$\Vdash_P \dot{J} \text{ は } \kappa \text{ 上の } \check{V}\text{-}\lambda\text{-飽和的イデアル}$$

なら，

$$I = \{X \subseteq \kappa \mid \Vdash_P \check{X} \in \dot{J}\}$$

は κ 上の λ-飽和的イデアルとなる．

証明　$\{X_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \subseteq I^+$ とする．このとき

$$(*) \qquad \Vdash |\{\alpha < \lambda \mid \check{X}_\alpha \in \dot{J}^+\}| = \lambda$$

となる：もしそうでなければ，λ が正則基数で P が λ-c.c. を満たすことから，$\gamma < \lambda$ で

$$\Vdash \{\alpha < \lambda \mid \check{X}_\alpha \in \dot{J}^+\} \subseteq \gamma$$

となるものが存在する．ところが，このときには $X_\gamma \in I$ となってしまうから矛盾である．$(*)$ により，$\dot{J}$ が $\check{V}$-λ-飽和的であることから，$p \in P$ と $\alpha < \beta < \lambda$ で $p \Vdash \check{X}_\alpha \cap \check{X}_\beta \in \dot{J}^+$ となるものがあるが，このことから $X_\alpha \cap X_\beta \in I^+$ が分かる．　$\dashv$

クーネンとパリスは，彼等の基本図式の応用において（10.7 の前で述べたような）イーストン積が巨大基数の性質を保存することを示している．最初の応用例では可測性が保存され，正規超フィルターであるという性質は特殊なものであるにもかかわらず，そのようなフィルターが可能なうち最大の個数存在する，ということが無矛盾になることを示している．

17.8 定理　(Kunen-Paris [71]). κ を可測基数とする．このとき，κ-c.c. p.o. E で，

$$\Vdash_E \kappa \text{ 上の正規超フィルターが } 2^{2^\kappa} \text{ 個存在する}$$

となるものがある．

証明　P を κ より小さな非極限基数の各々に対し generic 部分集合を付加するような p.o. のイーストン積とする．P は，$\mathrm{dom}(p) \subseteq \kappa \times \kappa$, $\mathrm{ran}(p) \subseteq 2$ となるような関数 p で，

(i) すべての $\langle \xi, \zeta \rangle \in \mathrm{dom}(p)$ に対し ξ は κ 未満の非極限基数で $\zeta < \xi$，また
(ii) すべての正則基数 ν に対し，$|\{\langle \xi, \zeta \rangle \in \mathrm{dom}(p) \mid \xi \leq \nu\}| < \nu$ となる

ようなものの全体からなるとすることができる．最後の条件での $\xi \leq \nu$ は 2 つの事項をまとめている：つまり，$\xi < \nu$ の場合は，イーストン積の構造に対する要請となっており，$\xi = \nu$ の場合は，非極限基数 ν で付加される部分集合に関する要請となっている．$\nu = \kappa$ とすると $|p| < \kappa$ がすべての $p \in P$ に対し成り立っていることが分かることに注意する．P の順序は，$p \leq_P q \iff p \supseteq q$ で与える．

後での証明の文脈を確立しておく必要もあるため，まず，イーストン積に対し一般に成り立ついくつかの事実を考察しておく．はじめに標準的な積への分解に関する考察をする：任意の γ に対し，

$$(P)_\gamma = \{p \in P \mid p \subseteq \gamma \times \kappa \times 2\},$$
$$(P)^\gamma = \{p \in P \mid p \cap (\gamma \times \kappa \times 2) = \emptyset\}$$

とする．このとき $p\in P$ を $\langle p\cap\gamma\times\kappa\times 2,\ p-\gamma\times\kappa\times 2\rangle$ に対応づける自然な同一視により $P\cong(P)_\gamma\times(P)^\gamma$ となることが分かる．$(P)^\gamma$ は γ^+-閉鎖で，$\gamma^{<\gamma}=\gamma$ なら，Δ-レンマ 10.4 の典型的な応用により $(P)_\gamma$ は γ^+-c.c. を満たすことが分かる．したがって 10.8 により，$(P)_\gamma$ による強制に続けて $(P)^\gamma$ で強制したときには，$(P)^\gamma$ では γ の新しい部分集合は付加されず γ^+ は基数として保存される．任意に大きな，このような $\gamma<\kappa$ が存在するから，P による強制では，κ は依然として到達不可能基数となっていることが分かる．次に，κ がマーロ基数のときには P は κ-c.c. を満たすことを示す：

$A\subseteq P$ を極大な反鎖とする．6.2(b) により，$\delta<\kappa$ を到達不可能基数で，

$$\langle V_\delta,\in,P\cap V_\delta,A\cap V_\delta\rangle\prec\langle V_\kappa,\in,P,A\rangle$$

となるようなものとする．任意の $p\in P$ に対し，(ii) により，$p\cap V_\delta\in V_\delta$ となる．したがって，$A\cap V_\delta$ が V_δ で極大であることから，$p\cap V_\delta$ は $A\cap V_\delta$ のある元と共存可能となる．ところがこのときには，p 自身もこの元と共存可能となることが，すぐに分かる．したがって，$A\cap V_\delta$ は P での極大な反鎖となっている．よって，$A=A\cap V_\delta$ で，$|A|<\kappa$ である．

今度は，U を κ 上の正規超フィルターと仮定し，$j\colon V\prec M\cong\mathrm{Ult}(V,U)$ とする．このとき，$(j(P))_\kappa=P$ となる．よって $Q=(j(P))^\kappa$ として，

$$j(P)\cong P\times Q$$

となる．任意の $p\in P$ に対し，$|p|<\kappa$ で，したがって $j(p)=p$ となるから，$j(p)$ は $\langle p,\emptyset\rangle=\langle p,1\!\!1_Q\rangle$ と同一視される．よって，クーネン=パリスの条件が満たされていることが分かる．

一般に，17.6 の $\overline{U}$ は $\overline{j}$ の定義から $P\times Q$-名称 $\dot{U}$ で任意の κ の部分集合の P-名称 $\dot{X}$ と $\langle p,q\rangle\in P\times Q$ に対し，

$$\langle p,q\rangle\Vdash\dot{X}\in\dot{U}\leftrightarrow\kappa\in j(\dot{X})$$

となるものに対応する．ここでは，$P\times Q$ は $\langle p,q\rangle$ を $p\cup q$ に対応させることで $j(P)$ と同一視されているから，ある $f_q\colon\kappa\to P$ に対し $q=[f_q]_U$ となっているとして，

$$(*)\qquad \langle p,q\rangle\Vdash\dot{X}\in\dot{U}\quad\Leftrightarrow\quad\{\xi<\kappa\mid p\cup f_q(\xi)\Vdash\xi\in\dot{X}\}\in U$$

となる．さらに（κ は極限基数だから）Q は κ^+-閉鎖である[3]．P は κ^+-c.c. を持つから 10.8 により P での強制の後 Q で強制したときには κ の新しい部分集合は付加されない．したがって，

$$\Vdash_{P\times Q}\dot{U}\text{ は }\kappa\text{ 上の正規超フィルター}$$

となっている．2^{2^κ} 個の正規超フィルターを得るには次のようにする：V で $\lambda=2^{2^\kappa}$ として，R を Q の λ 個のコピーの κ^+-積とする．つまり，$|\{\alpha<\lambda\mid r(\alpha)\neq\emptyset\}|\leq\kappa$ となる

---

[3] ［訳注］：j が初等的埋め込みであることから，$M\models$「Q は κ^+-閉鎖」となるが，5.7(d) により ${}^\kappa M\subseteq M$ だから，Q は V の意味でも κ^+-閉鎖であることが帰結できる．

ような $r \in {}^{\lambda}Q$ の全体に $r \le_R s \quad \Leftrightarrow \quad \forall\alpha < \lambda(r(\alpha) \le_Q s(\alpha))$ で順序を入れて得られる p.o. とする．ここで $P \times R$ による強制を考える．R も κ^+-閉鎖であることはすぐに分かる．したがって，各 $\alpha < \lambda$ に対し $\dot{U}$ に対応する $P \times R$-名称を $\dot{U}_\alpha$ とすると，

$$\Vdash_{P\times R} \dot{U}_\alpha \text{ は } \kappa \text{ 上の正規超フィルター}$$

となり，任意の $\langle p, r\rangle \in P \times R$ と P-名称 $\dot{X}$ に対し，

$$(**) \qquad \langle p, r\rangle \Vdash_{P\times R} \dot{X} \in \dot{U}_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \langle p, r(\alpha)\rangle \Vdash_{P\times Q} \dot{X} \in \dot{U}$$

となる．generic 性の議論により，$\alpha < \beta < \lambda$ なら $\Vdash_{P\times R} \dot{U}_\alpha \neq \dot{U}_\beta$ となることが示せる：

任意の $\langle p, r\rangle \in P \times R$ が与えられたとき，$\langle \overline{p}, \overline{r}\rangle \le \langle p, r\rangle$ を，$\overline{r}(\alpha) \perp \overline{r}(\beta)$ が Q で成り立つようにとる．このとき，$[g]_U = \overline{r}(\alpha)$, $[h]_U = \overline{r}(\beta)$ なら，

$$Y = \{\xi < \kappa \mid P \text{ で } g(\xi) \perp h(\xi)\} \in U$$

となる．$\dot{X}$ を κ の部分集合の P-名称で

$$\Vdash_P \forall\xi(\xi \in \dot{X} \ \leftrightarrow\ \xi \in \check{Y} \ \wedge\ g(\check{\xi}) \in \dot{G})$$

となるものとする（ここに $\dot{G}$ は P-generic な対象の標準的名称とする）．つまり，すべての $z \in P$ に対し $z \Vdash \xi \in \dot{X} \quad \Leftrightarrow \quad \xi \in Y \wedge z \le_P g(\xi)$ となっている．このとき $(*)$ と $(**)$ から，

$$\langle \overline{p}, \overline{r}\rangle \Vdash \dot{X} \in \dot{U}_\alpha - \dot{U}_\beta$$

となることが直ちに確かめられる．

最後に，$\lambda = 2^{2^\kappa}$ が generic 拡大の意味で成り立つことを示す：λ 個の異なる κ 上の超フィルターが存在することがわかっているから，$2^{2^\kappa} \le \lambda$ が示せれば十分である：$P \times R$ は明らかに濃度 λ を持つ．また，Δ-レンマ 10.5 により，これが $(2^\kappa)^+$-c.c. を持つこと示せる．したがって，10.5 での計算により，求めたい結果が得られる（実際には，generic 拡大で 2^{2^κ} を任意に大きくできることも直ちに分かる）．　$\dashv$

次の二つの定理は，κ 上のイデアルで $\mathrm{sat}(I) = \kappa$ および $\mathrm{sat}(I) = \kappa^+$ となるようなものに関する無矛盾性の結果を確立する．

17.9 定理　(Kunen-Paris [71]). κ を可測基数とする．このとき p.o. E で $\Vdash_E$ (a) + (b) + (c) を満たすものがある．ここに：

(a) $2^{\aleph_0} = \kappa$.

(b) κ-飽和的な κ 上のイデアルが存在する．

(c) どの $\lambda < \kappa$ に対しても κ 上の λ-飽和的なイデアルは存在しない．

証明　P を ω と κ 未満のすべての非極限基数の κ 個の部分集合を付加するようなイーストン積とする．P は $\mathrm{dom}(p) \subseteq \kappa \times \kappa \times \kappa$ かつ $\mathrm{ran}(p) \subseteq 2$ となるような関数 p で，

(i) 任意の $\langle \xi, \zeta, \eta\rangle \in \mathrm{dom}(p)$ に対し，ξ は ω あるいは κ 未満の非極限基数で，$\zeta < \xi$,

(ii) 任意の正則基数 ν に対し，$|\{\langle \xi, \zeta, \eta\rangle \in \mathrm{dom}(p) \mid \xi \le \nu\}| < \nu$

となるようなものの全体として把握できる．ここに $p(\langle\xi,\zeta,\eta\rangle) = 1 \iff$ “η 番目の ξ の新しい部分集合は ζ を含む” と解釈する．$\nu = \kappa$ とすると，$|p| < \kappa$ がすべての $p \in P$ に対し成り立つことが分かることに注意する．P の順序は $p \leq_P q \iff p \supseteq q$ で与える．17.8 でと同様に，P は κ-c.c. を持つことが示せる．

ここで，U を κ 上の正規超フィルターとして，$j\colon V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V, U)$ とする．

$$P_1 = \{p \in j(P) \mid p \subseteq (j(\kappa) - \kappa) \times j(\kappa) \times j(\kappa) \times 2\},$$
$$P_2 = \{p \in j(P) \mid p \subseteq \kappa \times \kappa \times (j(\kappa) - \kappa) \times 2\}$$

とする．このとき，自然な同一視により，

$$j(P) \cong P \times P_1 \times P_2$$

となることが分かる．ここで，すべての $p \in P$ に対し，$|p| < \kappa$ により，$j(p) = p$ となるから，$j(p)$ は $\langle p, \emptyset, \emptyset\rangle = \langle p, \mathbb{1}_{P_1}, \mathbb{1}_{P_2}\rangle$ と同一視される．よってクーネン=パリスの条件は満たされている．

$P \times P_1$ が求めるような p.o. となっていることを示す．G_0 を V 上 P-generic とし，G_1 を $V[G_0]$ 上 P_1-generic とする．クーネン=パリスの基本図式を適用するために G_2 を $V[G_0][G_1]$ 上 P_2-generic として，$G = G_0 \times G_1 \times G_2$ とする．（κ は極限基数だから）P_1 は κ^+-閉鎖であることが分かる．したがって 10.8 により P の後で P_1 によって強制したときには κ の新しい部分集合は付加されない．したがって，

(∗)　　17.6 の $\overline{U}$ は κ 上の $V[G_0][G_1]$-正規超フィルターとなる

次に，$\Vdash_{P\times P_1}$「$\check{P}_2$ は κ-c.c. を満たす」ことを示す：$\{p_\alpha \mid \alpha < \kappa\} \subseteq P_2$ が与えられたとき，

$$X = \{\eta \mid \exists\alpha\exists\xi\exists\zeta(\langle\xi,\zeta,\eta\rangle \in \mathrm{dom}(p_\alpha))\} \subseteq j(\kappa) - \kappa$$

とすると $|X| \leq \kappa$ だから，単射：$X \to \kappa$ を用いて各 p_α に対し $q_\alpha \in P$ を対応させ，$p_\alpha \perp p_\beta \iff q_\alpha \perp q_\beta$ となるようにできる．したがって P が κ-c.c. を満たすことから P_2 が κ-c.c. を満たすことを帰結できる．標準的な反鎖に関する議論により，P が κ-c.c. を満たすことが示せるから，これを繰り返し用いて，$\Vdash_P$「$\check{P}_2$ は κ-c.c. を満たす」が示せる．最後に，P_1 は κ^+-閉鎖だから，10.8 により $\Vdash_{P\times P_1}$「$\check{P}_2$ は κ-c.c. を満たす」が言える．

これと (∗) を用いると，17.7 を $\overline{U}$ の双対イデアルに適用することにより，$V[G_0][G_1]$ で κ 上の κ-飽和的イデアルが存在することが帰結できる．$2^{\aleph_0} = \kappa$ となることも標準的な議論により示せる（片方向で 10.5 と κ-c.c. を用いる）．$V[G_0][G_1]$ で任意の $\lambda < \kappa$ に対し κ 上の λ-飽和的イデアルが存在しないことを示して証明を終える：

仮にそのようなイデアルがある $\lambda < \kappa$ に対して存在するとしてみる．λ は V で $\lambda^{<\lambda} = \lambda$ を満たすとしてよい．17.8 での積への分解により $P \cong (P)_\lambda \times (P)^\lambda$ である．ここに $(P)_\lambda$ は λ^+-c.c. を満たし，$(P)^\lambda$ は λ^+-閉鎖である．したがって G_0 は，ある $H_0 \subseteq (P)_\lambda$ と $H_1 \subseteq (P)^\lambda$ により，$H_0 \times H_1$ と表せる．$V[G_0][G_1]$ を $V[H_1][G_1]$ の $(P)_\lambda$ による generic-拡大とみたとき，17.7 により，$V[H_1][G_1]$ で λ^+-飽和的イデアルが存在することが言える．

このモデルでは，$(P)^\lambda \times P_1$ が λ^+-閉鎖であることが分かることから，$2^\lambda < \kappa$ が成り立っている．したがって 16.4(a) により κ はここで可測基数となる．ところが $(P)^\lambda$ により，$2^{\lambda^+} = \kappa$ がこのモデルで成り立っているから，これは矛盾である．$\dashv$

17.10 定理　(Kunen-Paris [71]). κ を可測基数とする．このとき，p.o. E で $\Vdash_E$ (a) + (b) + (c) となるものが存在する．ここに，

(a) κ は弱コンパクト．

(b) κ^+-飽和的な κ 上のイデアルが存在する．

(c) κ-飽和的な κ 上のイデアルは存在しない．

証明　P を κ 未満のすべての正則基数に対して generic な部分集合を付加するような p.o. のイーストン積とする．つまり P は 17.8 の証明での p.o. の定義の (i) で，“非極限基数” を “正則基数” で置き換えたとき得られるようなものである．ふたたび P は κ-c.c. を満たす．

ここで U を κ 上の正規超フィルターとして，$j\colon V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V, U)$ とする．

$$P_1 = \{p \in j(P) \mid p \subseteq (j(\kappa) - \kappa + 1) \times j(\kappa) \times 2\},$$
$$P_2 = \{p \in j(P) \mid p \subseteq \{\kappa\} \times \kappa \times 2\}$$

とする．このとき，P_1 は κ^+-閉鎖となり，P_2 は κ-閉鎖で κ^+-c.c. を満たす．また自然な対応により，

$$j(P) \cong P \times P_1 \times P_2$$

となり，この対応で，任意の $p \in P$ に対し $j(p)$ は $\langle p, 1\!\!1_{P_1}, 1\!\!1_{P_2}\rangle$ と同一視されるから，クーネン=パリスの条件はここでも満たされている．

ここで $P \times P_1$ が求めるような p.o. となっていることを示す．G_0 を V 上 P-generic として G_1 を $V[G_0]$ 上 P_1-generic とする．クーネン=パリスの図式を適用するために G_2 を $V[G_0][G_1]$ 上 P_2-generic とし，$G = G_0 \times G_1 \times G_2$ とおく．前の証明と同じように，P_1 が κ^+-閉鎖であることから，$V[G]$ で κ 上の $V[G_0][G_1]$-正規超フィルターが存在することが帰結できる．P_2 は κ^+-c.c. を満たすから，17.7 により，$V[G_0][G_1]$ で，κ 上の κ^+-飽和的イデアルが存在することが分かる．

次に $V[G_0][G_1]$ で κ が弱コンパクトであることを示す：7.8 により，κ が弱コンパクトとなるのは，κ が到達不可能基数で木の性質を持つ，ちょうどそのときである．したがって，10.8 により，$V[G_0]$ で κ がこれらの性質を持つことを示せば十分である．まず，17.8 の証明の初めのところの注意により κ は $V[G_0]$ で到達不可能基数である．次に，$\langle T, <_T\rangle$ を $V[G_0]$ での κ-木で $T \subseteq \kappa$ となっているものとする．クーネン=パリスの j の拡張 $\bar{j}\colon V[G_0] \prec M[G]$ を用いると，$\langle \bar{j}(T), \bar{j}(<_T)\rangle$ は $M[G]$ で $\bar{j}(\kappa)$-木となる．したがって，この木の κ 番目のレヴェルの任意の元 γ は T の κ-枝を決定する．このような枝が $V[G_0]$ ですでに存在することが示せればよいが，これは，$\mathcal{P}(\kappa) \cap V[G_0] = \mathcal{P}(\kappa) \cap V[G]$ は言えないため，直ちには帰結することはできない．$V[G_0]$ で議論して，$V[G]$ は 強制概念 $P_1 \times P_2$ による generic 拡大として得られ，$P_1 \times P_2$ は κ-閉鎖である，という事実を用いる：

上で述べたことから $P_1 \times P_2$-名称 τ で

$$\Vdash_{P_1 \times P_2} \tau \text{ は } T \text{ での } \kappa\text{-枝}$$

となるものが存在する．κ-閉鎖性を用いて，$\alpha < \kappa$ に対し，条件 $p_\alpha \in P_1 \times P_2$ と集合 b_α が次を満たすように帰納的にとれる：$\alpha < \beta < \kappa$ なら，(i) $p_\alpha \Vdash \tau \cap \alpha = \check{b}_\alpha$, かつ (ii) $p_\beta \leq p_\alpha$. ところが，このとき $b = \bigcup_{\alpha<\kappa} b_\alpha$ は κ-枝となっている．(ここでは $p \Vdash \tau = \check{b}$ となるような $p \in P_1 \times P_2$ の存在を用いているわけでないことに注意)．

あとは $V[G_0][G_1]$ で κ 上の κ-飽和的イデアルが存在しないことが示せれば証明が完了する．このためには，16.4(b) により，$V[G_0][G_1]$ で κ が可測基数であり得ないことがいえればよい：各正則基数 $\alpha < \kappa$, P に対し P は generic 集合 $g(\alpha) \subseteq \alpha$ で $g(\alpha) \cap \xi \in V$ がすべての $\xi < \alpha$ に対し成り立つようなものを付加している．κ が可測基数だったとして，W を κ 上の正規超フィルターとし，$x = [g]_W$ とする．いつものように $x = j_W(x) \cap \kappa$ となる．つまり，$\{\alpha \mid g(\alpha) = x \cap \alpha\} \in W$ となっている．ところが，このとき，両方ともこの集合に入っているような任意の $\alpha < \beta$ に対し，$g(\alpha) = g(\beta) \cap \alpha \in V$ となってしまうから，矛盾である． ⊣

17.11 演習 17.10 で "κ は弱コンパクト" を "κ は弱到達不可能基数で $2^{\aleph_0} = \kappa$" で置き換えたものも成立する．

ヒント 一つのアプローチとしては，まず 17.10 の p.o. E で強制して，その後に κ 個のコーエン実数を付加する ω_1-c.c. を満たす p.o. で強制すればよい．このとき，17.1 により (b) が成り立ち，17.7 により (c) が成り立つ． ⊣

κ が可測基数でなく，かつ κ 上のあるイデアル I が $\text{sat}(I) \leq \kappa$ を持つような可能性についての無矛盾性の結果を，さらにいくつか引用しておくことにする：κ が弱コンパクトなら，16.4(b) により，唯一の可能性は $\text{sat}(I) = \kappa^+$ であるが，これの無矛盾性は 17.10 で示されている．κ が強到達不可能だが弱コンパクトではない場合については，$\text{sat}(I) = \kappa$ と $\text{sat}(I) = \kappa^+$ が可能性で，前者の無矛盾性はクーネン Kunen [78] により，後者の無矛盾性はボース Boos [74] により示されている．κ が弱到達不可能だが強到達不可能ではない場合は，17.1 により $\omega < \text{sat}(I) < \kappa$ が無矛盾で，$\text{sat}(I) = \kappa$ も 17.11 により無矛盾である．最後に κ が非極限基数の場合には 16.3 により $\text{sat}(I) = \kappa^+$ が唯一の可能性となるが，これの無矛盾性は 1972 年にクーネン Kunen [78] により示されている．

この最後の結果はたいへん注目を集めた．他の結果では可測基数の存在の無矛盾性の強さが前提となっており，これがちょうど必要となる無矛盾性の強さであった．ところが，クーネンは先に Kunen [70] で内部モデルを用いて κ^+-飽和的イデアルが非極限基数 κ 上に存在するということの無矛盾性の強さは可測性より真に強いことを示している．この後クーネンは膨大基数 (§24) が存在する，という強い仮定のもとで，ω_2-飽和的なイデアルが ω_1 上に存在するような generic 拡大が存在することを示して，さらに，このような仮説が必要となることを明瞭に示す事実をあげている．これは累積的階層での低い部分での組合せ論的な命題の解析をするという，後に重要となるアプローチの初期の例の一つであった：強制法と内部モデルを用いることにより，このような命題の無矛盾性の強さが巨大基数の

階層での二つの仮説の間のものとして同定される．無矛盾等価性を示すことができない場合にはこれらの命題の強さは他のものと比較され，そこで示唆される可能性は巨大基数の相関関係の図式をよりきめの細かいものにしてゆく．ω_1 上の ω_2-飽和的イデアルを得るという問題に関しては，現在では，膨大基数よりずっと小さなものの存在の仮定で十分であることが知られている（§32, 特に 32.10 を参照）．

§18　プリクリ強制

この節では，プリクリ (Karel Prikry) によって開発された，単純だがエレガントな，可測基数のための強制法の概念，および，その便利な一般化を記述する．これらの強制法の概念と§17 で述べたものは，プリクリがシルバーの指導のもとに書いた 1968 年のバークレイでのドクター論文に現れている．プリクリとイェヒ Thomas Jech はもともとはヴォピェンカの多産なセミナーのメンバーであったが，彼等の移民はアメリカの集合論にとってのプラハの春となった．プリクリの強制法は最初は変則的なものと見なされていたきらいがあるが，じきに可測基数の理論に欠かせない手法となる．これは可測基数に関する直観の源の一つとなるのみならず，後の一般化への規範を供することにもなるである．

少し一般的な記述をすることにして，F を基数 κ 上のフィルターとする．このとき F に対するプリクリ強制の p.o. は，$P_F = [\kappa]^{<\omega} \times F$ に

$$\langle s, A\rangle \le \langle t, B\rangle \quad \Leftrightarrow \quad t \text{ は } s \text{ の始片で } A \cup (s-t) \subseteq B \text{ が成り立つ}$$

によって順序を入れたものとして定義される．ここでのアイデアは，条件 $\langle s, A\rangle$ は κ の新しい部分集合の始片 s を決定し，この新しい部分集合のこれから先の元を A の元に制限するが，一方，これは F の意味で大きなものに保たれる，ということである．任意の $\langle s, A\rangle, \langle t, B\rangle \in P_F$ に対し，$\langle s, A\rangle \le \langle t, B\rangle$ となるのは，$\langle s, A\rangle \le \langle t, B-(\max(t)+1)\rangle$ となるちょうどそのときであるから，P_F は分離的ではない．条件 $\langle s, A\rangle$ は $A\cap(\max(s)+1) = \emptyset$ を満たすということを要請してもよいのだが，これは記述を煩雑にするだけである．

18.1 補題

(a) $\langle s, A\rangle \parallel \langle t, B\rangle$ なら，s は t の始片であるか，またはその逆である．

(b) P_F は κ^+-c.c. を満たす．

(c) G が P_F-generic で，

$$x = \bigcup\{s \mid \exists A(\langle s, A\rangle \in G)\}$$

なら，x は 順序型 ω を持つ κ の非有界な部分集合で，$V[x] = V[G]$ となる．

証明　(a) は明らかである．(b) は，1番目の構成要素の等しいような任意の 2 つの条件は共存可能であることから出る．

(c) については，x が 順序型 ω を持つ κ の非有界な部分集合であることは，稠密集合の議論から出る（§0 での取り決めにより，$\{\xi \mid \alpha \le \xi < \kappa\} \in F$ がすべての $\alpha < \kappa$ に対し成り立つのであった）．他方，(a) により，任意の $\langle s, A\rangle \in G$ に対し，s は x の始片と

なることから，x の順序型は $\leq \omega$ でなければならなことが分かる．最後に

$$G_x = \{\langle s, A\rangle \in P_F \mid s \text{ は } x \text{ の始片で } \ x - s \subseteq A\}$$

とすれば $G = G_x$ となるから（11.14の前を参照），G は x から復元できることが分かる． ⊣

この最後の命題により，ZFCの推移的な $\in$-モデル M で，$M \models$「F は基数 κ 上のフィルター」となるものと，$x \in [\kappa]^\omega$ に対し，

$$x \text{ は } M \text{ 上 } P_F\textbf{-generic} \quad \Leftrightarrow \quad G_x \text{ は } M \text{ 上 } P_F\text{-generic となる}$$

とする．また，x とこれの増加列による枚挙を同一視して，

$$x \text{ は } M \text{ 上の}\textbf{プリクリ列} \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ は } M \text{ 上ある } F \text{ に対して } P_F\text{-generic となる}$$

とする．P_F による任意の強制拡大で κ の共終数は ω となるから，κ は崩壊される可能性がある．つぎの鍵となる補題で巨大基数がここでどのように関わってくるかが示されるが，プリクリ強制はもともとこのような場合について考えられたものであった．

18.2 補題 (Prikry [70]). κ を可測基数として，U を κ 上の正規超フィルターとする．このとき任意の $\langle s, A\rangle \in P_U$ と強制法の言語での論理式 φ に対し，$B \subseteq A$ で $B \in U$ かつ，$\langle s, B\rangle \parallel \varphi$ となるものが存在する．

証明 関数 f: $[A - (\max(s)+1)]^{<\omega} \to 2$ を

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \exists X(\langle s \cup t, X\rangle \Vdash \varphi) \text{ のとき} \\ 1 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

と定義する．ローボトムの定理 7.17 により，$B \in U$ となる $B \subseteq A - (\max(s)+1)$ で，f に関して一様となるようなものが存在する．このとき，$\langle s, B\rangle \parallel \varphi$ である：そうでないとすると，$\langle s \cup t_0, B_0\rangle \leq \langle s, B\rangle$ と $\langle s \cup t_1, B_1\rangle \leq \langle s, B\rangle$ で，$\langle s \cup t_0, B_0\rangle \Vdash \varphi$ かつ $\langle s \cup t_1, B_1\rangle \Vdash \neg\varphi$ となるようなものがとれる．必要ならこれらの条件の片方を拡張して，$|t_0| = |t_1|$ となっているとしてよい．ところが，このときには，$f(t_0) = 0$ かつ $f(t_1) = 1$ となるから，これは B の一様性に矛盾する． ⊣

任意の $\langle s, A\rangle \in P_U$ と論理式 φ に対し，つねに $\langle t, B\rangle \leq \langle s, A\rangle$ で φ を決定するものが存在することは明らかだが，上での要点は，このとき $t = s$ ととれるということである．この事実から，通常は p.o. が κ-閉鎖であることから帰結される，強い性質を導くことができる：

18.3 補題 18.2 の仮定のもとで，任意の P_U-名称 $\dot{\tau}$ と $|y| < \kappa$ となる集合 y に対し，$\Vdash \dot{\tau} \subseteq \check{y} \to \dot{\tau} \in \check{V}$ が成り立つ．

証明 $\langle s, A\rangle \Vdash \dot{\tau} \subseteq \check{y}$ を仮定して，$\langle t, B\rangle \leq \langle s, A\rangle$ と $z \in V$ で $\langle t, B\rangle \Vdash \dot{\tau} = \check{z}$ となるものが見つけられればよい．各 $a \in y$ に対し，18.2 により $\langle s, B_a\rangle \parallel \check{a} \in \dot{\tau}$ となるようにす

る．$|y| < \kappa$ だから，$B = \bigcap_{a \in y} B_a \in U$ である．z を $a \in z \iff \langle s, B \rangle \Vdash \check{a} \in \dot{\tau}$ で定義すると，$\langle s, B \rangle \Vdash \dot{\tau} = \check{z}$ となる．　$\dashv$

次の定理がここでの状況を総括する：

18.4 定理　(Prikry [70])．κ を可測基数として，U を κ 上の正規超フィルターとする．G が P_U-generic なら，$(V_\kappa)^V = (V_\kappa)^{V[G]}$ で，V の基数と $V[G]$ の基数は一致する．しかし，$\mathrm{cf}^{V[G]}(\kappa) = \omega$ である．

証明　$(V_\kappa)^V = (V_\kappa)^{V[G]}$ となることは 18.3 を用いて帰納法により直ちに証明できる．したがって κ 以下の基数は保存されることが分かる．κ はこれらの基数の極限だから，やはり保存される．また κ より大きな基数は κ^+-c.c. により保存される．　$\dashv$

したがって，P_U は κ 以下のユニヴァースを乱すことなく κ で共終な ω-列を導入する．ここで最も重要な点は，プリクリの補題 18.2 である．18.4 は ZFC のモデルを基数を変えずに，しかし共終数は変わるように拡張する，という問題の最初の解を与えた．注目すべきことに，内部モデルの理論の進歩によって，可測基数の無矛盾性の強さはこのために必要であることが後に示されることになる（第 II 巻を参照）．それは別として，基数の保存のためには，16.10 の前で定義されたようなローボトム・フィルターの存在で十分である：

18.5 演習　(Prikry [70])．F をローボトム・フィルターとする．このとき P_F による強制はすべての基数を保存する．

ヒント　すべての非極限基数 $\lambda^+ < \kappa$ が P_F で保存されることを示せば十分である．$\mu = \lambda^+$ として，$\langle s, A \rangle \Vdash \ulcorner \dot{\tau}\colon \lambda \to \mu$ で $\dot{\tau}$ は増加的$\urcorner$ とする．各 $t \in [A - (\max(s) + 1)]^{<\omega}$ に対し，

$$E_t = \{\eta \mid \exists \xi \exists X (\langle s \cup t, X \rangle \Vdash \dot{\tau}(\xi) = \eta)\}$$

とする．$\dot{\tau}$ は関数となるように強制されるから，$|E_t| \leq \lambda$ である．そこで，$f(t) = \sup(E_t) < \mu$ とおく．$B \subseteq A - (\max(s) + 1)$ を $B \in F$ かつ $|f``[B]^{<\omega}| \leq \omega$ となるようにとると，$\delta = \sup(f``[B]^{<\omega}) < \mu$ となる．ここで $\langle s, B \rangle \Vdash \dot{\tau}``\lambda \subseteq \delta$ となることを示せばよい．　$\dashv$

デブリンは Devlin [74] で P_F がすべての基数を保存するような κ 上のフィルター F の，ローボトム・フィルターであるという性質よりいくらか弱いものによる特徴付けを与えている．これは上の証明ですでに暗に示されている．他方，デブリンとパリスは，$(V_\kappa)^V = (V_\kappa)^{V[G]}$ がすべての P_F-generic な G で成り立つような P_F の条件を求めている (Devlin [74: 30])：F は κ-完備超フィルターでローボトムの分割の性質 7.17 を満たさなくてはならない —— これが 18.2 で正規性の性質として必要となっているすべてである．

P_F が巨大基数の性質のいくつかを保存するであろうということは十分に想像がつく；次の結果は共終数 ω を持つローボトム基数の例を与える．

18.6 演習　(Prikry [70])．F を κ 上のローボトム・フィルターとする．このとき P_F による任意の generic 拡大で，F は κ 上のローボトム・フィルターを生成する．

ヒント　$\lambda < \kappa$ で，$\langle s, A \rangle \Vdash \dot{\tau}\colon [\kappa]^{<\omega} \to \lambda$ として，$B \in F$ かつ $\langle s, B \rangle \Vdash |\dot{\tau}``[\check{B}]^{<\omega}| \leq \omega$

となる $B \subseteq A$ がとれることが示せればよい．このために，各 $t \in [A-(\max(s)+1)]^{<\omega}$ に対し，

$$f(t) = \{\eta \mid \exists u, v \exists X(t = u \cup v \ \wedge\ \langle s \cup u, X\rangle \Vdash \dot{\tau}(v) = \eta)\}$$

とする．$\dot{\tau}$ は関数になるように強制されるから，$f(t) \in [\lambda]^{<\omega}$ となる．$B \subseteq A-(\max(s)+1)$ を $B \in F$ で，$|f``[B]^{<\omega}| \leq \omega$ となるようにとり，$W = \bigcup f``[B]^{<\omega}$ とする．ここで $\langle s, B\rangle \Vdash \dot{\tau}``[\check{B}]^{<\omega} \subseteq \check{W}$ となることを示す． ⊣

次に，正規超フィルター U に対し，P_U-generic であることの意味を明確にする特徴付けを与える．F を任意の（V での）κ 上の超フィルターとして $x \in [\kappa]^\omega$ を V 上 P_F-generic とする．このとき，generic 性により，x はすべての $X \in F$ の中にもぐりこむ．x が次の意味で F を生成することはすぐに分かる：

$$\forall X \in V \cap \mathcal{P}(\kappa)(X \in F \leftrightarrow x - X \text{ は有限})\ .$$

マサイアスは正規超フィルターに対してはこれの逆が成立することを示すプリクリ強制の基礎的な構造原理を与えた．よく知られた対角共通部分の概念を拡張して，$\langle A_s \mid s \in [\kappa]^{<\omega}\rangle$ で各 A_s は κ の部分集合となっているものに対し，これの**対角共通部分**を

$$\triangle_s A_s = \{\xi < \kappa \mid \xi \in \bigcap\{A_s \mid \max(s) < \xi\}\}$$

と定義する．U が κ 上の正規超フィルターで各 A_s が U の元であるときには，$\triangle_s A_s \in U$ となることがすぐに分かる．

18.7 定理 (Mathias [73]). M を ZFC の推移的な $\in$-モデルとして，κ は M での可測基数で U を M での κ 上の正規超フィルターとする．このときすべての $x \in [\kappa]^\omega$ に対し，

$$x \text{ は } M \text{ 上 } P_U\text{-generic} \quad \Leftrightarrow \quad \forall X \in U(x - X \text{ は有限})\ .$$

18.8 系 M を上のようなものとして，x は M 上 P_U-generic で $y \in [x]^\omega$ とする．このとき，y も M 上 P_U-generic となる． ⊣

18.7 の証明 問題となる方向の証明のために，$x \in [\kappa]^\omega$ として，すべての $X \in U$ に対し $x - X$ は有限であるとする．このとき

$$G_x = \{\langle s, A\rangle \in P_U \mid s \text{ は } x \text{ の始片で } x - s \subseteq A\}$$

が M 上 P_U-generic であることが示せればよい．このためには，$D \in M$ が P_U で稠密開集合なら，$G_x \cap D \neq \emptyset$ となることを示せばよい：

各 $s \in [\kappa]^{<\omega}$ に対し，$f_s\colon [\kappa-(\max(s)+1)]^{<\omega} \to 2$ を

$$f_s(t) = \begin{cases} 0 & \exists X(\langle s \cup t, X\rangle \in D) \text{ のとき} \\ 1 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

と定義する．7.17 により，$A_s \subseteq \kappa-(\max(s)+1)$ で，$A_s \in U$ かつ，A_s は f_s に関して

一様となるものがとれるから，$A = \triangle_s A_s \in U$ とする．

次に，各 $s \in [\kappa]^{<\omega}$ に対し，もし X で $\langle s, X\rangle \in D$ となるものがあれば B_s をそのような X の一つとし，そうでなければ $B_s = \kappa$ とする．$B = A \cap \triangle_s B_s \in U$ とおくと $B \in U$ となる．このとき，D が稠密開集合であることに注意すると，

$$(*) \qquad \forall s \in [\kappa]^{<\omega}(\exists X(\langle s, X\rangle \in D \to \langle s, B - (\max(s)+1)\rangle \in D))$$

となることが分かる．

仮定から，x の始片 s_0 で $x - s_0 \subseteq B$ となるものがある．稠密性から，$t \in [B-(\max(s_0)+1)]^{<\omega}$ で，$\langle s_0 \cup t, X\rangle \in D$ がある X に対し成り立つようなものが存在する．したがって，t_0 を $x - s_0 \subseteq B$ の最初の $|t|$ 個の要素からなるものとすると，$B - (\max(s_0)+1) \subseteq A_{s_0}$ の f_{s_0} に関する一様性から，$\langle s_0 \cup t_0, X\rangle \in D$ がある X に対し成立する．したがって $(*)$ により，$\langle s_0 \cup t_0, B - (\max(t_0)+1)\rangle \in D$ となる．この条件も G_x の元であるから，証明が完了した．　$\dashv$

18.8 は，マサイアス実数に対する結果 11.14(b) と類似のものとなっているが，実際にこの二つの結果はマサイアスにより一緒に証明されたのであった．この類似性はさらに，マサイアス強制は，まず ω_1-閉鎖な強制により強い性質を持つ ω 上の超フィルター U を付加して，その後 P_U で強制することと同値になる (Mathias [77: §4])，という状況に拡張される．外的な ω 列が内部の正規超フィルターを生成するという状況は次の節で述べる超巾の反復においても現れる．これを導くために，デオルノワ Patrick Dehornoy によって研究されたプリクリ強制との関連を確立することにする．スレソン Claude Sureson [89] は異なるプリクリ拡大の相関関係を構成可能性の度数の観点から研究している．

1970 年代を通じて内部モデルの理論が発展するにつれ，興味深い諸結果が強制法と内部モデルの現象と識別不可能クラスの生成の間の密接な関係を与えることになる．このような統合においてプリクリ強制は可測性の研究に欠かせないものとなってくるのである．

一般化

プリクリは Prikry [70: 17, 18, 38] で，18.2 が分割の性質 7.17 の仮定なしでも成り立つような，彼の強制法の概念の一般化も考察している．この一般化は自然なもので，様々な用途に役立つが，デオルノワは Dehornoy [78] でこれを再発見しており，18.7 に類似の性質をこの一般化に対して証明している．これのいくつかの変種はギティック Moti Gitik [80, 86]，ブラス Andreas Blass [88]，ヘンレ James Henle [90] らによって導入されている（アプター Arthur Apter とヘンレによる Apter-Henle [91, 92] も参照されたい）．ここでは一般的な定式化の一つを与え，主要な性質を証明した後でいくつかの例を挙げる．

$\langle I, <_I\rangle$ を空でなく極大元を持たない有向集合 (§0) として，$<_I$ に関して ${}^{<\omega}I_+$ で増加列の全体からなる ${}^{<\omega}I$ の部分集合を考える，つまり

$${}^{<\omega}I_+ = \{s \mid \exists n \in \omega(s\colon n \to I \ \wedge\ \forall i \forall j(i < j < n \to s(i) <_I s(j)))\}$$

である．次に，$\mathcal{F}$ を ${}^{<\omega}I_+$ 上の関数で，$s \in {}^{<\omega}I_+$ に対し，

(i) $\mathcal{F}(s)$ は I 上の超フィルターで，
(ii) すべての $i \in I$ に対し，$\{j \mid i <_I j\} \in \mathcal{F}(s)$

となるものとする．このような $\mathcal{F}$ に対し，

$$\prod\mathcal{F} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ は関数} \wedge \mathrm{dom}(\mathcal{A}) = {}^{<\omega}I_+ \wedge \forall s \in {}^{<\omega}I_+(\mathcal{A}(s) \in \mathcal{F}(s))\}$$

とする．$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \prod\mathcal{F}$ に対し，

$$\mathcal{A} \subseteq^* \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad \forall s \in {}^{<\omega}I_+(\mathcal{A}(s) \subseteq \mathcal{B}(s))$$

とする．最後に，強制法の概念を

$$P_\mathcal{F} = {}^{<\omega}I_+ \times \prod\mathcal{F}$$

に

$$\langle s, \mathcal{A}\rangle \le \langle t, \mathcal{B}\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & t \subseteq s\,, \\ \text{(ii)} & \mathcal{A} \subseteq^* \mathcal{B}\,,\ \text{かつ} \\ \text{(iii)} & |t| \le i < |s| \text{ なら，} s(i) \in \mathcal{B}(s|i) \end{array}$$

で順序を入れたものとする（$t \subseteq s$ はもちろん $s||t| = t$ となること，つまり t が s の始片となることと同値である）．

$I = \kappa$ で，$<_I$ は κ 上の $\in$-関係とする．U を κ 上の正規超フィルター として，$\mathcal{F}$ は地域 $\{U\}$ を持つ定値関数とするときには，$P_\mathcal{F}$ と前に定義した P_U とは同値の強制の概念となる：ここでは ${}^{<\omega}[\kappa]_+$ の元とその地域 $\in [\kappa]^{<\omega}$ を同一視することにして，$i_0\colon P_U \to P_\mathcal{F}$ を $i_0(\langle s, A\rangle) = \langle s, \mathcal{A}\rangle$ で定義する．ここに $\mathcal{A}$ は定値関数：$[\kappa]^{<\omega} \to \{A\}$ である．また，$i_1\colon P_\mathcal{F} \to P_U$ を $i_1(\langle t, \mathcal{B}\rangle) = \langle t, B\rangle$ で定義する．ここに $B = \triangle_s\mathcal{B}(s)$ とする．したがって，$B - (\max(s)+1) \subseteq \mathcal{B}(s)$ が各 s で成り立つ．任意の $\langle s, \mathcal{A}\rangle, \langle t, \mathcal{B}\rangle \in P_\mathcal{F}$ に対し，$\langle s, \mathcal{A}\rangle \le i_0(i_1(\langle t, \mathcal{B}\rangle))$ なら $\langle s, \mathcal{A}\rangle \le \langle t, \mathcal{B}\rangle$ となることに留意すると，i_0 も i_1 も稠密な埋め込みとなっていることが容易に示せる（10.1 を参照）．

この一般化での要点は，有限の s に対し，単一の大きな集合から帰結される拡張を考えるかわりに，木での連鎖を考えて，各点で一つの元を加える拡張の可能性を，その点固有の大きいことの概念によって決めるということである．

次は 18.1 に対応するものである：

18.9 演習

(a) $\langle s, \mathcal{A}\rangle \parallel \langle t, \mathcal{B}\rangle$ なら，$s \subseteq t$ であるか，またはこの逆が成り立つ．
(b) $P_\mathcal{F}$ は $|I|^+$-c.c. を持つ．
(c) G が $P_\mathcal{F}$-generic で

$$x = \bigcup\{s \mid \exists\mathcal{A}(\langle s, \mathcal{A}\rangle \in G)\}$$

とすると，$x\colon \omega \to I$ で，これは $\langle I, <_I\rangle$ で非有界である．つまり任意の $i \in I$ に対し，$n \in \omega$ で $i <_I x(n)$ となるものがある．また $V[x] = V[G]$ となる． ⊣

(c) の最後の主張は,

$$G_x = \{\langle s, \mathcal{A}\rangle \in P_{\mathcal{F}} \mid s \subseteq x \ \wedge\ \forall i(|s| \le i < \omega \to x(i) \in \mathcal{A}(x|i))\}$$

とすると $G = G_x$ となることを示すことで得られる. このことから, M が ZFC の推移的な $\in$-モデルで, このモデルで I と $\mathcal{F}$ が上のようになっており, $x\colon \omega \to I$ なら,

$$x \text{ は } M \text{ 上 } (P_{\mathcal{F}})^M\text{-generic} \quad \Leftrightarrow \quad G_x \cap M \text{ は } M \text{ 上 } (P_{\mathcal{F}})^M\text{-generic}$$

となる.

次は 18.2 に対応するものであり, 18.2 がそこでそうだったように, これは, ここでの文脈で決定的な役割を果たす.

18.10 補題　$\langle s, \mathcal{A}\rangle \in P_{\mathcal{F}}$ として, φ を強制法の言語での論理式とする. このとき, $\mathcal{B} \in \prod \mathcal{F}$ で, $\mathcal{B} \subseteq^* \mathcal{A}$ かつ, $\langle s, \mathcal{B}\rangle \parallel \varphi$ となるものが存在する.

証明　まず次を示す:

(*)　任意の $t \in {}^{<\omega}I_+$ に対し, $\mathcal{X} \in \prod \mathcal{F}$ で, $\langle t, \mathcal{X}\rangle \Vdash \varphi \ \Leftrightarrow\ \{i \in I \mid \exists \mathcal{Y}(\langle t^\frown\langle i\rangle, \mathcal{Y}\rangle \in P_{\mathcal{F}} \ \wedge\ \langle t^\frown\langle i\rangle, \mathcal{Y}\rangle \Vdash \varphi)\} \in \mathcal{F}(t)$ となるものがある.

$t(|t|-1) <_I i$ となるすべての $i \in \mathcal{X}(t)$ に対し, $\langle t^\frown\langle i\rangle, \mathcal{X}\rangle \le \langle t, \mathcal{X}\rangle$ となるから, 上の同値命題の順方向は明らかである. これの逆方向の証明のために, W をここで $\mathcal{F}(t)$ の元となると仮定した集合とし, $t(|t|-1) <_I i$ となる各 $i \in W$ に対し, $\mathcal{Y}_i$ を $\langle t^\frown\langle i\rangle, \mathcal{Y}_i\rangle \Vdash \varphi$ となるものとする. $\mathcal{X} \in \prod \mathcal{F}$ を

$$\mathcal{X}(u) = \begin{cases} \mathcal{Y}_i(u) & i \in W \text{ で } t^\frown\langle i\rangle \subseteq u \text{ のとき,} \\ W & u = t \text{ のとき,} \\ I & \text{その他の場合.} \end{cases}$$

として定義する. このとき, $\langle t, \mathcal{X}\rangle \Vdash \varphi$ となることが容易に確かめられる.

補題の証明を完了させるために, 逆にどの $\mathcal{B} \subseteq^* \mathcal{A}$ でも $\langle s, \mathcal{B}\rangle \parallel \varphi$ とならない, と仮定してみる. $s \subseteq t$ となる $t \in {}^{<\omega}I_+$ に対し,

$$\mathcal{A}'(t) = \{i \in \mathcal{A}(t) \mid \neg\exists \mathcal{Y}(\langle t^\frown\langle i\rangle, \mathcal{Y}\rangle \in P_{\mathcal{F}} \ \wedge\ \langle t^\frown\langle i\rangle, \mathcal{Y}\rangle \parallel \varphi)\}$$

とおく. このような t に対しては $\mathcal{A}'(t) \in \mathcal{F}(t)$ となることが $|t|$ に関する帰納法により, φ と $\neg\varphi$ に対する, $\mathcal{A}$ に "制限された" 形の (*) をくりかえし適用することで, 容易に示せる. したがって, $s \not\subseteq t$ となる t に対しては $\mathcal{A}'(t) = \mathcal{A}(t)$ とおくと, $\mathcal{A}' \in \prod \mathcal{F}$ で $\mathcal{A}' \subseteq^* \mathcal{A}$ となる. ところが, このとき, どの $\langle t, \mathcal{X}\rangle \le \langle s, \mathcal{A}'\rangle$ も φ を決定しないから, これは矛盾である. ⊣

次は 18.3 に対応するものである:

18.11 演習　λ を正則基数として $\mathcal{F}(s)$ はすべての $s \in {}^{<\omega}I_+$ に対し, λ-完備とする. このとき任意の $P_{\mathcal{F}}$-名称 $\dot{\tau}$ と $|y| < \lambda$ となる集合 y に対し, $\Vdash \dot{\tau} \subseteq \check{y} \to \dot{\tau} \in \check{V}$ が成り立つ. ⊣

以上のことは，すべて Prikry [70] ですでに得られている；デオルノワは Dehornoy [78] でさらに進んで，彼の文脈の中で以下の 18.7 に対応する命題を確立している．より一般的なこの結果では，18.7 での分割の性質による議論が整順性に関する議論で置き換えられている．

18.12 定理 M を ZFC の推移的な $\in$-モデルとして，I と $\mathcal{F}$ はそこで上のように定義されているとする．このとき任意の $<_I$ の意味で増加的な $x\colon \omega \to I$ に対し，

$$
\begin{aligned}
&x \text{ は } M \text{ 上 } (P_{\mathcal{F}})^M\text{-generic} \quad \Leftrightarrow \\
&\qquad \forall \mathcal{A} \in (\textstyle\prod \mathcal{F})^M \exists n \in \omega \forall i (n \le i < \omega \to x(i) \in \mathcal{A}(x|i))
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

証明 すべての $\mathcal{A} \in (\prod \mathcal{F})^M$ に対し $\{\langle t, \mathcal{B}\rangle \in (P_{\mathcal{F}})^M \mid \mathcal{B} \subseteq^* \mathcal{A}\}$ は稠密となるから，順方向は明らかである．

逆方向の証明には，

$$G_x = \{\langle s, \mathcal{A}\rangle \in (P_{\mathcal{F}})^M \mid s \subseteq x \ \wedge \ \forall i (|s| \le i < \omega \to x(i) \in \mathcal{A}(x|i))\}$$

が M 上 $(P_{\mathcal{F}})^M$-generic であることを示せばよいが，これはこの集合がすべての M での稠密開集合と共通部分を持つことを示すことに帰着されることが，直ちに分かる．

このために M の中で議論して，D を $P_{\mathcal{F}}$ の稠密開集合とする．$\langle s, \mathcal{A}\rangle \in P_{\mathcal{F}}$ に対し，

$$
\begin{aligned}
\tau(s, \mathcal{A}) = \{t \mid s \subseteq t \ \wedge \ &\forall i (|s| \le i < |t| \to t(i) \in \mathcal{A}(t|i)) \\
&\wedge \exists \mathcal{B} \in \textstyle\prod \mathcal{F} (\langle t, \mathcal{B}\rangle \notin D)\}
\end{aligned}
$$

とおく．つまり，これは $\langle s, \mathcal{A}\rangle$ の一番目の要素の可能な拡張 t のうちで，まだ $\mathcal{B}$ で $\langle t, \mathcal{B}\rangle \notin D$ となるものが存在する，という意味で，“安全でない” ようなものの全体の集合となっている．D は開集合だったから，$t_0 \subseteq t_1$ で $t_1 \in \tau(s, \mathcal{A})$ なら，$t_0 \in \tau(s, \mathcal{A})$ となる．ここで，

$$
\begin{aligned}
\langle s, \mathcal{A}\rangle \text{ は } D \text{ を捕獲する} \quad \Leftrightarrow \quad &y\colon \omega \to I \text{ ですべての } n \in \omega \text{ に対し} \\
&y|n \in \tau(s, \mathcal{A}) \text{ となるものは存在しない}
\end{aligned}
$$

とする．つまり，これは $\langle \tau(s, \mathcal{A}), \supset\rangle$ が整順的であるということである．このとき，すべての $s \in {}^{<\omega}I_+$ に対し，$\mathcal{A} \in \prod \mathcal{F}$ で $\langle s, \mathcal{A}\rangle$ が D を捕獲するものがある：

つまり，18.10 でと同様な議論によって，次が示せる．まず，

$$
\begin{aligned}
&\text{すべての } t \in {}^{<\omega}I_+ \text{ に対し，} \mathcal{X} \in \textstyle\prod \mathcal{F} \text{ で } \langle t, \mathcal{X}\rangle \text{ が } D \text{ を捕獲するものが存在する} \\
&\Leftrightarrow \\
&\{i \in I \mid \exists \mathcal{Y} (\langle t^\frown \langle i\rangle, \mathcal{Y}\rangle \in P_{\mathcal{F}} \ \wedge \ \langle t^\frown \langle i\rangle, \mathcal{Y}\rangle \text{ は } D \text{ を捕獲する})\} \in \mathcal{F}(t)
\end{aligned}
$$

として，仮に $\mathcal{A} \in \prod \mathcal{F}$ で $\langle s, \mathcal{A}\rangle$ が D を捕獲するようなものは存在しないとすると，$\mathcal{A}' \in \prod \mathcal{F}$ で，すべての $t \in {}^{<\omega}I_+$ で，$s \subseteq t$ となるものに対し，

$$\mathcal{A}'(t)=\{i\in I\mid \neg\exists\mathcal{Y}(\langle t^\frown\langle i\rangle,\mathcal{Y}\rangle\in P_{\mathcal{F}}\ \wedge\ \langle t^\frown\langle i\rangle,\mathcal{Y}\rangle \text{ は } D \text{ を捕獲する})\}$$

となるものがとれる．ところが，任意の $\langle t,\mathcal{X}\rangle\leq\langle s,\mathcal{A}'\rangle$ で $\langle t,\mathcal{X}\rangle\in D$ となるものは D を捕獲するから，これは矛盾である．

定理の証明を完了するには，各 $s\in{}^{<\omega}I_+$ に対し，$\mathcal{A}_s\in\prod\mathcal{F}$ を $\langle s,\mathcal{A}_s\rangle$ が D を捕獲するようなものとする．$\mathcal{A}_s$, $s\in{}^{<\omega}I_+$ の "対角共通部分" を，$t\in{}^{<\omega}I_+$ に対し

$$\mathcal{B}(t)=\textstyle\bigcap_{s\subseteq t}\mathcal{A}_s(t)$$

として定義する．$\mathcal{B}\in\prod\mathcal{F}$ で，任意の $s\in{}^{<\omega}I_+$ に対し，$\tau(s,\mathcal{B})\subseteq\tau(s,\mathcal{A}_s)$ となることが容易に確かめられるから，$\langle s,\mathcal{B}\rangle$ は D を捕獲する．

仮定により，$n\in\omega$ で $n\leq i<\omega$ に対し，$x(i)\in\mathcal{B}(x|i)$ となるものがとれる．このとき $\langle x|n,\mathcal{B}\rangle$ は D を捕獲する．つまり $\langle\tau(x|n,\mathcal{B}),\supset\rangle$ は整順的である，したがって 0.3 により，順序を保存する関数 ρ: $\tau(x|n,\mathcal{B})\to\mathrm{On}$ が存在する．最後に M から出て，このような ρ は $\tau(x|n,\mathcal{B})^M$ が V で整順的であることを保証しているから，$m\geq n$ で $\langle x|m,\mathcal{B}\rangle\in D$ となるものがあることが分かる．ところが，このとき $\langle x|m,\mathcal{B}\rangle\in G_x$ となるから，証明が完了する． ⊣

18.13 系 M を 18.12 でのようなものとして，x が M 上 $(P_{\mathcal{F}})^M$-generic で，y: $\omega\to I$ を $<_I$ に関する増加列で $\mathrm{ran}(y)\subseteq\mathrm{ran}(x)$ とするとき，y も M 上 $(P_{\mathcal{F}})^M$-generic となる． ⊣

これでプリクリ強制の主要な性質が一般化されたセッティングでも成り立つことが示せたので，いくつかの例をあげて，この節を終えることにする：

1. (Prikry [70: 38]) I を κ^+ として $<_I$ は κ 上の $\in$-関係とする．また $\mathcal{F}$ は地域 $\{U\}$ を持つ定値関数とする．ここに U は κ^+ 上の κ-完備な超フィルターとする．このとき，$P_{\mathcal{F}}$ による強制は新しい κ の有界な部分集合を付加せず，κ^+ 以外のすべての基数を保存し，κ^+ の共終数は ω になる．

2. (Prikry [70: 38]) I を κ^+ として，$<_I$ は κ 上の $\in$-関係とする．また κ で共終的な基数の上昇列 $\langle\kappa_n\mid n\in\omega\rangle$ と $n\in\omega$ に対し κ^+ 上の κ_n-完備な超フィルター U_n が存在するとし，$s\in{}^{<\omega}I_+$ に対し $\mathcal{F}(s)=U_{|s|}$ とする．このときにも，$P_{\mathcal{F}}$ による強制は新しい κ の有界な部分集合を付加せず，κ^+ 以外のすべての基数を保存し，κ^+ の共終数は ω になる（しかし，ここではさらに 18.10 の $\mathcal{B}$ は，証明をうまく調節することで，さらに $s\not\subseteq t$ に対しては $\mathcal{B}(t)=\mathcal{A}(t)$ を満たしていると仮定してよいこと，そしてこれを用いて 18.11 では $\mathcal{F}(s)$ は十分に大きな $|s|$ に対しては λ-完備であればよいことに注意する必要がある）．

3. (Dehornoy [78]) I を $\kappa>\omega$ として $<_I$ は κ 上の $\in$-関係とする．また $\mathcal{F}$ は地域 $\{U\}$ を持つ定値関数とする．ここに U は κ 上の（必ずしも正規でない）κ-完備な超フィルターとする．この場合には，$P_{\mathcal{F}}$ による強制は同値な定式化でプリクリ強制にもっと似たものを持つ：

$f\in{}^{\kappa}\kappa$ を $[f]_U=\kappa$ となるようなものとする．つまり，すべての $\alpha<\kappa$ に対し，$\{\xi<\kappa\mid\alpha<f(\xi)\}\in U$ となるが，すべての $g\in{}^{\kappa}\kappa$ で $\{\xi<\kappa\mid g(\xi)<f(\xi)\}\in U$

となるものに対しては $\alpha < \kappa$ で，$\{\xi < \kappa \mid g(\xi) = \alpha\} \in U$ となるものが存在する．$\langle A_s \mid s \in [\kappa]^{<\omega} \rangle$ で各 s で $A_s \subseteq \kappa$ となるようなものに対し，これの **f-対角共通部分**を

$$\triangle^f_s A_s = \{\xi < \kappa \mid \xi \in \bigcap\{A_s \mid \max(s) < f(\xi)\}\}$$

とする．f が恒等関数: $\kappa \to \kappa$ であるとき，つまり U が正規超フィルターであるときと同じように，各 s で $A_s \in U$ なら，$\triangle^f_s A_s \in U$ となる．

$${}^{<\omega}[\kappa]_f = \{s \in {}^{<\omega}[\kappa] \mid \forall i < |s| - 1(s(i) < f(s(i+1)))\}$$

とおき，

$$P^f_U = {}^{<\omega}[\kappa]_f \times U$$

として，これに

$$\langle s, A \rangle \le \langle t, B \rangle \quad \Leftrightarrow \quad t \text{ は } s \text{ の始片で } A \cap (\mathrm{ran}(s) - \mathrm{ran}(t)) \subseteq B$$

で順序を入れる．$f(\xi) \le \xi$ がすべての $\xi < \kappa$ に対し成り立っているとしてよいから，これは，実際，$s(i) < s(i+1)$ だけでなく $s(i) < f(s(i+1)) \le s(i+1)$ となるようなプリクリ強制の変形となっている．

18.9 の前の注意をここでもう一度繰り返し，ふたたびここで ${}^{<\omega}[\kappa]_+$ の元と $[\kappa]^{<\omega}$ の元となるその地域を同一視することにして，i_0: $P^f_U \to P_{\mathcal{F}}$ を $i_0(\langle s, A \rangle) = \langle s, \mathcal{A} \rangle$ で定義する．ここに，$\mathcal{A}$ は定値関数 $[\kappa]^{<\omega} \to \{A\}$ である．また i_1: $P_{\mathcal{F}} \to P^f_U$ を $i_1(\langle t, \mathcal{B} \rangle) = \langle t, B \rangle$ で定義する．ここに $B = \triangle^f_s \mathcal{B}(s)$ とする．$\langle t, \mathcal{B} \rangle \in P_{\mathcal{F}}$ に対し，$\mathcal{B}'$: $[\kappa]^{<\omega} \to U$ を

$$\mathcal{B}'(s) = \mathcal{B}(s) \cap \{\xi < \kappa \mid \max(s) < f(\xi)\} \in U$$

で定義すると，任意の $\langle s, \mathcal{A} \rangle \le \langle t, \mathcal{B}' \rangle$ と $i+1 \in \mathrm{dom}(s) - \mathrm{dom}(t)$ に対し，$s(i) < f(s(i+1))$ となることに注意する．したがって，$\langle s, \mathcal{A} \rangle \le i_0(i_1(\langle t, \mathcal{B}' \rangle))$ なら，$\langle s, \mathcal{A} \rangle \le \langle t, \mathcal{B}' \rangle$ である．ここで，i_0 と i_1 が稠密な埋め込みとなっていることが容易に確かめられる．

Gitik-Magidor [92] ではこの強制法が P_U の定式化で用いられている．

$\kappa \le \gamma$ として，I を $\mathcal{P}_\kappa \gamma = \{x \subseteq \gamma \mid |x| < \kappa\}$ とし，$<_I$ は $\mathcal{P}_\kappa \gamma$ での真部分集合の関係として，$\mathcal{P}_\kappa \gamma$ は地域 $\{U\}$ を持つ定値関数とする．ここに U は $\mathcal{P}_\kappa \gamma$ 上の κ-完備超フィルターで $\{x \in \mathcal{P}_\kappa \gamma \mid \alpha \in x\} \in U$ がすべての $\alpha < \gamma$ に対し成り立つものとする．このとき，$P_{\mathcal{F}}$ による強制は新しい κ の有界集合を付加せず，すべての正則基数 δ で $\kappa \le \delta \le \gamma$ となるものの共終数を ω にする：x: $\omega \to \mathcal{P}_\kappa \gamma$ を $P_{\mathcal{F}}$-generic とすると，$\bigcup_{n \in \omega} x(n) \cap \delta = \delta$ となる．generic 拡大での κ の次の基数は正則基数となるから，これは V でも正則基数である．したがって，$\kappa < \delta \le \gamma$ となるどの δ も基数ではなくなる．

5. (Gitik) 4. と同様だが，$<_I$ は，

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad x \subseteq y \text{ かつ } |x| < |y \cap \kappa|$$

で定義される $\mathcal{P}_\kappa \gamma$ 上の関係 $<$ とする．このとき，$P_{\mathcal{F}}$ による強制は 4. で述べたような性質を持ち，しかも 3. で述べたような別表記を持つものとなる．これの応用については Gitik

[80, 86] および，Apter-Henle [91, 92] を参照されたい．

6. I は ω で $<_I$ は ω 上の $\in$ 関係とする．ブラスは Blass [88] で $\mathcal{F}$ の様々な性質を考察して，マサイアスが Mathias [77] でマサイアス強制（§11 の最後を参照）を用いて確立したいくつかの結果を拡張している．ウディン Woodin とユダ=シェラハ Judah-Shelah [91] は CH を仮定したとき，$P_{\mathcal{F}}$（したがってこれは ω_1-c.c. を満たす強制の概念となる）が極小な構成可能性の度数を持つような実数を付加するような $\mathcal{F}$ を構成する方法を与えている．

プリクリ強制は様々な目的のために色々な方向に一般化され，相対的無矛盾性の結果を確立するために頻繁に強い仮定が用いられるようになるにつれ，そこでの大きな部分をしめるようになってくる．ある大きな κ に対し，ユニヴァースをできるだけ乱さずに新しい非有界な部分集合を付加できることの可能性は，新しいパラダイムとして，巨大基数の重要な特徴の一つとしてとらえられるようになる．これに続く数十年にわたって，共終数を変化させるための一般化は，強極限特異基数 λ での 2^λ の可能な値の研究で中心的な役割を果たすことになる．また，ある κ の閉非有界集合を付加する一方，κ の巨大基数の性質は保存するような，エレガントで技術的には先鋭な一般化によって，無矛盾等価の結果がいくつも得られることになる．この一般化は**ラディン強制**と呼ばれているものである（第 II 巻を参照）．

§19　超巾の反復

クーネン Kenneth Kunen はスタンフォード大学でスコットのもとに学び，後にウィスコンシン大学での集合論およびトポロジーの重要な研究者となる．彼による結果はすでに §17 や他のところでも述べた．集合論の発展に与えたインパクトにおいて，彼の学位論文 Kunen [68] と比較できるのは，それより数年前に提出されたシルバーの学位論文くらいのものであろう．この洗練された広範囲な論文は，内部モデルと初等的埋め込みに関するエレガントな結果を提示し，これにより可測基数と $0^\#$ の構造理論を大幅に明確化した．これらの結果は次の節で確立されるが，この節ではそのために必要となる技術的な道具立てを準備する．

シルバーもそうだったように，クーネンはガイフマンの画期的な仕事に触発を受けている．ガイフマンは超巾の構成の超限回の反復の操作の方法を組織化して，9.1 を確立することでこの方法に潜在する可能性を明らかにしたのであった．クーネンは，内部モデルの超巾は，必ずしもこのモデルの元とはなっていないような超フィルターによっても構成でき，この操作は "従順性" の条件が満たされていれば反復できることに気付いた．彼のアプローチを，歴史的にはこれより後に展開されることになる理論に見合ったやり方で定式化することにする．まず §5 でみた超フィルターの構成法の一般化を考察する．

M を ZFC^-, つまり ZFC から巾集合の公理を除いたものの，推移的な $\in$-モデルとする．また，κ は M の意味での無限基数とする．**κ は V での基数である必要はない**（この章の終わりまで，$\kappa, \lambda, \ldots$ で，推移的な $\in$-モデルの意味においての基数を表すことにする）．

このとき，

U は κ 上の M-**超フィルター** $\Leftrightarrow$
(i) $\langle M, \in, U\rangle \models U$ は κ 上の正規超フィルター； かつ
(ii) $\langle M, U\rangle$ は**弱従順**である：つまり，任意の $F \in {}^{\kappa}M \cap M$ に対し，$\{\xi < \kappa \mid F(\xi) \in U\} \in M$ が成り立つ

とする．(i) と同値の条件は 17.6 の前の定義でも用いられていた．そこでも注意したように，**κ-完備性は正規性から導かれる．また $U \in M$ は仮定されていない．** ここでの $\langle M, \in, U\rangle$ による定式化は以下でこのような形の構造を扱うことを前提としているが，M が真のクラスである場合には，いつもと同じように，充足関係の定式化の可能性に関する注意 (§0) が必要となることを指摘しておく．新しい条件 (ii) はイェンセンによる従順性の概念を弱めたものとなっている：$R \subseteq A$ に対し，$\langle A, R\rangle$ が**従順**とは，任意の $x \in A$ に対し $R \cap x \in A$ となることである．(ii) は $x \in M$ で M の意味での濃度が高々 κ のもののみに，この条件を要求するものとなっている．したがって，$\langle M, \in, U\rangle$ で考えるとき，明らかに U は $M \models \mathrm{ZFC}^-$ での置換の公理では扱うことができない．

ここでの κ 上の M-超フィルターの定義は次の二点で Kunen [70] でのもとの定義と異なるものとなっている：まず，推移的な $\in$-モデルとして，ZFC を満たすものだけでなく ZFC^- のみを満たすものも考察の対象としている；このようなものの例としては，正則基数 $\lambda > \omega$ に対する L_λ や H_λ またこれらの初等的部分モデルなどたくさんある（他方，このような M がすべての順序数を含めば，自動的に ZFC の内部モデルとなる（3.1 の前を参照））．二番目に，記述を簡単にするために，最初から U に対して正規性が要求されているが，クーネンは M の意味での κ-完備性から出発している．クーネンは Kunen [70: 188] で，可算な $M \models \mathrm{ZFC}$ で κ-上に，この弱い意味での M-超フィルターが存在することと，κ が M で弱コンパクトであることの同値に注意している．正規性に関しては，Kleinberg [78] でもう少し強い巨大基数の性質に関して同様の同値性が得られている（第 II 巻の Subtle Properties の章を参照）．この性質も $V = L$ と矛盾しないが，いずれにしても，外側での可測性と弱従順性の条件 (ii) は，少なくとも $M \models \mathrm{ZFC}$ の場合には M に対して，ずっと強い条件となる．

U を κ 上の M-超フィルターとするとき，以下のようにして $\langle M, \in, U\rangle$ の超巾を構成することができる：任意の $f \in {}^{\kappa}M \cap M$ に対し，

$$(f)_U = \{g \mid g \in {}^{\kappa}M \cap M \ \wedge\ \{\xi < \kappa \mid f(\xi) = g(\xi)\} \in U\}$$

とおく．つまり，M の中の関数のみを考察の対象とし，これらの同値類をとる．M が真のクラスである場合も扱えるように，§5 でと同じように

$$(f)_U^0 = \{g \mid g \in (f)_U \ \wedge\ \forall h(h \in (f)_U \rightarrow\ \mathrm{rank}(g) \leq \mathrm{rank}(h))\}$$

として，$(f)_U^0$ が常に集合となるようにする．このとき超巾の領域を

$${}^{\kappa}M/U = \{(f)_U^0 \mid f \in {}^{\kappa}M \cap M\}$$

ととり，ここでの要素関係 E_U を

$$(f)^0_U\ E_U\ (g)^0_U \quad\Leftrightarrow\quad \{\xi<\kappa \mid f(\xi)\in g(\xi)\}\in U$$

で定義する．さらに，$\langle M,\in,U\rangle$ の言語を $\mathcal{L}_{\in}(\dot{A})$ として，1 変数述語記号 $\dot{A}$ の解釈 $\dot{A}_U$ を

$$(f)^0_U\ E_U\ \dot{A}_U \quad\Leftrightarrow\quad \{\xi<\kappa \mid f(\xi)\in U\}\in U$$

として定義することができる．ここで弱従順性の定義の必然性が明らかになる：$\{\xi<\kappa \mid f(\xi)\in U\}\in M$ となっていることがこの定義を可能にしているからである．

§5 と同じように議論を進めると，ウォッシュの定理が $\langle {}^{\kappa}M/U, E_U\rangle$ で成り立つことを示すために $M\models \mathrm{ZFC}^-$ が本質的に用いられることになる：この定理が記述できるためには分出公理が必要となり，存在量化子に対する証明のステップで選択公理が必要となる．しかしながら，M の意味において U が κ-完備であることが保証されているだけなので，E_U は整順的とはかぎらない．もしこれが整順的なら，崩壊の補題 0.4 により，推移的な N と $W\subseteq N$, および同型写像

$$\pi\colon \langle {}^{\kappa}M/U, E_U, \dot{A}_U\rangle \ \to\ \langle N,\in,W\rangle$$

が存在する．このとき，$f\in {}^{\kappa}M\cap M$ に対し，

$$[f]_U=\pi((f)^0_U)$$

とおくことができ，$x\in M$ に対し

$$j(x)=[f_x]_U$$

とできる．ここに，f_x は定値関数: $\kappa\to\{x\}$ である．ウォッシュの定理により，

$$j\colon \langle M,\in\rangle \prec \langle N,\in\rangle$$

となるから，$N\models \mathrm{ZFC}^-$ で，$\mathrm{On}\cap M\subseteq \mathrm{On}\cap N$ となり，正規性により

$$\mathrm{crit}(j)=\kappa \ \text{ かつ } \ [\mathrm{id}]_U=\kappa$$

である．ここに，$\mathrm{id}:\kappa\to\kappa$ は恒等関数とする．M が ZFC の内部モデルで，$U\in M$ なら，上で述べたことは，§6 で述べた M の内部で行われる超巾の構成法に他ならない．したがって，$W\in N\subseteq M$ となり，N は M の意味で定義可能なクラスとなる．しかしながら，$\mathrm{On}\cap M<\mathrm{On}\cap N$ となることは実際にあり得る：例えば κ を可測基数，U を κ 上の正規超フィルターとして，$M=H_{\kappa^+}$ とする．このとき，$\langle {}^{\kappa}M/U, E_U\rangle$ は整順的となるから，上のような N と j がとれる．j は V 上で普通に定義された埋め込みの M への制限となっているから，

$$\mathrm{On}\cap M=\kappa^+\leq 2^{\kappa}<j(\kappa)<\mathrm{On}\cap N$$

となる．M,U,N を融合した構造を考えて，これの可算な初等的部分構造をとり，そこで M,

N に対応する構造の推移的崩壊をとることで，可算な M_0, U_0, N_0 で $\mathrm{On}\cap M_0 < \mathrm{On}\cap N_0$ となるものが得られる．

次の補題の命題群は 5.7 でのそれに対応するものとなっている；いつものように，添数 U は省略する．

19.1 補題

(a) j は共終的である：つまり，任意の $y \in N$ に対し $x \in M$ で $y \in j(x)$ となるものが存在する．さらに，y が順序数であるときには，x も順序数となるようにとることができる．

(b) M が集合なら，$|M| = |N|$ となる．

(c) すべての $x \in V_\kappa \cap M$ に対し，$j(x) = x$ となり，$V_\kappa \cap M = V_\kappa \cap N$, $\mathcal{P}(\kappa) \cap M = \mathcal{P}(\kappa) \cap N$ かつ $\kappa^{+M} = \kappa^{+N}$ である．

(d) $U \notin N$ である．

(e) W は $j(\kappa)$ 上の N-超フィルターとなる．

証明 (a) 例えば $y = [f]$ なら，$x = \mathrm{ran}(f)$ ととればよい．もし，$y \in \mathrm{On}$ なら，$\mathrm{ran}(f) \subseteq \mathrm{On}$ と仮定してよいから，$x = \sup(\mathrm{ran}(f)) + 1$ とる．

(b) $|N| \leq |{}^\kappa M \cap M| \leq |M|$ であるが，j の存在により，$|M| \leq |N|$ でもある．

(c) ランク関数は ZFC^- で超限帰納法による普通のやり方 (0.2) により定義できる．これを用いて，各 $\alpha < \kappa$ に対し，

(∗) すべての $x \in V_\alpha \cap M$ に対し，$j(x) = x$ となり，$V_\alpha \cap M = V_\alpha \cap N$ となる

ことを α に関する帰納法で示す．極限順序数のステップは明らかである．非極限順序数のステップは，(∗) が α で成り立つと仮定して，$x \in M$ を $\mathrm{rank}(x) = \alpha$ となるものとする．このときランクの定義可能性から，$\mathrm{rank}(j(x)) = j(\alpha) = \alpha$ となる．したがって帰納法の仮定から，

$$\begin{aligned} j(x) &= \{y \in V_\alpha \cap N \mid y \in j(x)\} \\ &= \{y \in V_\alpha \cap M \mid y \in j(x)\} \\ &= \{y \in V_\alpha \cap M \mid j(y) \in j(x)\} \\ &= \{y \mid y \in x\} \\ &= x \end{aligned}$$

となる．このことから，$V_{\alpha+1} \cap M \subseteq V_{\alpha+1} \cap N$ となることも分かるから，(∗) の帰納法による証明を終えるには，これの逆の包含関係を示せばよい：

$x \in N$ を $\mathrm{rank}(x) = \alpha$ となるものとして，$x = [f]$ となっているとする．$j(\alpha) = \alpha$ だから，$\mathrm{rank}(f(\xi)) = \alpha$ がすべての $\xi < \kappa$ に対して成り立っているとしてよい．$u = \bigcup \mathrm{ran}(f) \in M$ とおく．もし $|u| \geq \kappa$ が M で成り立っていたとすると，上射 $s\colon u \to \kappa$ で $s \in M$ となるものがある．$g\colon \kappa \to u$ を $g \in M$ で，$s(g(\xi)) = \xi$ がすべての $\xi < \kappa$ に対し成り立つものとする．すべての $\xi < \kappa$ に対し $\mathrm{rank}(g(\xi)) < \alpha$ となっているから，$[g] \in V_\alpha \cap N = V_\alpha \cap M$ である．例えば $[g] = z \in M$ とすると $j(z) = z = [g]$ となる．

ところが，g は定義から単射であるから，これは矛盾である．

したがって M で $|u| \leq \kappa$ となっていることが分かった．したがって，

$$x = \{y \in u \mid \{\xi < \kappa \mid y \in f(\xi)\} \in U\} \in M$$

となる：等号はすべての $y \in x$ に対し $y \in V_\alpha \cap N = V_\alpha \cap M$ で帰納法の仮定により $j(y) = y$ となることから，成り立ち，M の要素であることは，$\langle M, U\rangle$ の弱従順性から得られる．

(c) の最後の部分については，まず $X \in \mathcal{P}(\kappa) \cap M$ なら，$j(X) \cap \kappa = X \in N$ となることに注意する．逆に $Y \in \mathcal{P}(\kappa) \cap N$ として，例えば $Y = [f]$ とすると，

$$Y = \{\alpha \in \kappa \mid \{\xi < \kappa \mid \alpha \in f(\xi)\} \in U\}$$

となるが，これは $\langle M, U\rangle$ の弱従順性により M の元である．$\kappa^{+M} = \kappa^{+N}$ であることは，M と N の κ 上の整列順序の全体の族が等しいものになることから分かる．

(d) $U \in N$ だったとしてみると，

$$\mathcal{P}(\kappa) \cap M = U \cup \{\kappa - X \mid X \in U\} \in N$$

となる．(c) により $\mathcal{P}(\kappa)^N = \mathcal{P}(\kappa) \cap N = \mathcal{P}(\kappa) \cap M$ で，$j(\kappa) = \{[f] \mid f \in {}^\kappa\kappa \cap M\}$ だから，$\alpha = \kappa$ ととり，置換の公理を用いて $U \in M$ 上の関数 g をうまくとることにより，

$$N \models \exists\alpha < j(\kappa)\exists y\exists g(y = \mathcal{P}(\alpha)\ \wedge\ g\colon y \to j(\kappa)\ \text{は上射})$$

が成り立つことが容易に示せる．ところがこのとき，

$$M \models \exists\alpha < \kappa\exists y\exists g(y = \mathcal{P}(\alpha)\ \wedge\ g\colon y \to \kappa\ \text{は上射})$$

となる．このことから 2.8 での議論と同様に矛盾が導ける（あるいは，以下のように議論することもできる：$h\colon \kappa \to y$ を $h \in M$ で $g(h(\xi)) = \xi$ がすべての $\xi < \kappa$ に対し成り立つようなものとする．このとき，(c) により，$[h] \in V_{\alpha+1} \cap N = V_{\alpha+1} \cap M$ となるが，(c) の証明でと同様に h が単射であることから矛盾が導ける）．

(e) $\langle N, W\rangle$ の弱従順性を示すために，$F \in {}^{j(\kappa)}N \cap N$ として，$F = [f]$ とする．すべての $\xi < \kappa$ に対して，$f(\xi) \in {}^\kappa M$ となっているとしてよいから，関数 $\overline{f}\colon \kappa \times \kappa \to M$ を $\overline{f}(\xi, \eta) = f(\xi)(\eta)$ により定義することができる．$\overline{f} \in M$ だから，$\langle M, U\rangle$ の弱従順性により $X = \{\langle \xi, \eta\rangle \mid \overline{f}(\xi, \eta) \in U\} \in M$ である．ここで $g \in {}^\kappa M$ を $g(\xi) = \{\eta \mid \langle \xi, \eta\rangle \in X\}$ により定義すると，$g \in M$ となり，任意の $h \in {}^\kappa M \cap M$ に対し，

$$\begin{aligned}
[h] \in [g] \quad &\Leftrightarrow \quad \{\xi < \kappa \mid h(\xi) \in g(\xi)\} \in U \\
&\Leftrightarrow \quad \{\xi < \kappa \mid f(\xi)(h(\xi)) \in U\} \in U \\
&\Leftrightarrow \quad F([h]) \in W
\end{aligned}$$

となる．つまり，$[g] = \{\alpha < j(\kappa) \mid F(\alpha) \in W\}$ である．$\langle N, \in, W\rangle \models$「$W$ は正規超フィルター」となることも同様に示せる．　⊣

(d) の要点は，$U \in M$ であるかどうかに関わりなく，常に $U \notin N$ となる，ということである．(a) のような命題は $\mathrm{On} \cap M = \mathrm{On} \cap N$ とは限らないことから意味を持つものとなる．

5.6 に対応して，初等的埋め込みはここでも超フィルターをもたらす：

19.2 演習 M と N を推移的な ZFC^- の $\in$-モデルとして，$k\colon M \prec N$ を $\mathrm{crit}(k) = \kappa$ で $\mathcal{P}(\kappa) \cap M = \mathcal{P}(\kappa) \cap N$ となるものとする．このとき，

$$\{X \in \mathcal{P}(\kappa) \cap M \mid \kappa \in k(X)\}$$

は κ 上の M-超フィルターとなる． ⊣

ここで超フィルターの構成の反復のプロセスについて述べる．まず κ 上の M-超フィルターから出発して，M の U による超巾が整順的なら，N, W, j を上のようにとり，19.1(e) により，このプロセスを今度は N と W に対して繰り返す．超巾が整順的であるかぎり同様の構成を非極限順序数のステップで繰り返す．極限ステップでは§0 で復習しておいたようなモデルと埋め込みの順系ができあがっているから，これの順極限をとることができる．以下に述べる考察により，これによって整順的な構造が得られるときには，このプロセスをさらに先に進めることができることが分かる．簡単のために，

$$e\colon \langle X, \in, R\rangle \prec^- \langle Y, E, S\rangle$$

で，(i) $e\colon \langle X, \in\rangle \prec \langle Y, E\rangle$ つまり，e は $\mathcal{L}_\in$ 論理式に関して初等的埋め込みとなっており，(ii) e は述語を保存する，つまり，e は構造 $\langle X, \in, R\rangle$ の $\langle Y, E, S\rangle$ への埋め込みになっていることを表すことにする．(i) に関しては，5.1(c) によって推移的な真のクラスとなっている $\in$-構造に対しては，初等的埋め込みとは Σ_1-初等的埋め込みのことであったことを思い出そう．(ii) に関しては，R が $\langle X, \in\rangle$ で定義可能なときには，$\prec^-$ は全体の初等的埋め込み $\prec$ と同値になることに注意をしておく．

19.3 演習 各 $\alpha < \delta$ に対し，W_α を λ_α 上の N_α-超フィルターとして，

$$\langle\langle\langle N_\alpha, \in, W_\alpha\rangle \mid \alpha < \delta\rangle, \langle j_{\alpha\beta} \mid \alpha \leq \beta\rangle\rangle$$

が $\prec^-$-埋め込みに関して順系になっており，整順的な順極限を持つとする．このとき，この極限は推移的崩壊 $\langle N, \in, W\rangle$ を持つ．$\alpha < \delta$ に対し $j_{\alpha\delta}\colon \langle N_\alpha, \in, W_\alpha\rangle \prec^- \langle N, \in, W\rangle$ を順極限の埋め込みに推移的崩壊での変更を加えたものとして，ある（したがって任意の）$\alpha < \delta$ に対して，$\lambda = j_{\alpha\delta}(\lambda_\alpha)$ とすると，W は λ 上の N-超フィルターとなる．

ヒント 崩壊の補題 0.4 が順極限に対し適用できることを見るために，これが集合的となっていることを見る：$\langle D, E, A\rangle$ を順極限として，$\alpha < \delta$ に対し，$i_\alpha\colon \langle N_\alpha, \in, W_\alpha\rangle \to \langle D, E, A\rangle$ をこれに対応する埋め込みとする．$a \in D$ とすると，ある $\alpha < \delta$ に対し $b \in N_\alpha$ で $i_\alpha(b) = a$ となるものがとれる．このとき任意の $x \in D$ に対し，

$$x \ E \ a \quad \Leftrightarrow \quad \exists\beta\exists y(\alpha \leq \beta < \delta \ \wedge \ i_\beta(y) = x \ \wedge \ y \in j_{\alpha\beta}(b))$$

となるから，置換の公理により $\{x \in D \mid x \ E \ a\}$ は集合であることが分かる．

後半の証明は従順性の用いられ方の典型的なものとなっている：$F \in {}^{\lambda}N \cap N$ とする．したがって，ある $\alpha < \delta$ と $\overline{F} \in {}^{\lambda_\alpha}N_\alpha \cap N_\alpha$ に対し，$F = j_{\alpha\delta}(\overline{F})$ となる．$\langle N_\alpha, W_\alpha \rangle$ の弱従順性から，

$$X = \{\xi < \lambda_\alpha \mid \overline{F}(\xi) \in W_\alpha\} \in N_\alpha$$

となるから，

$$j_{\alpha\delta}(X) = \{\xi < \lambda \mid F(\xi) \in W\} \in N$$

である．　⊣

したがって，κ 上の任意の M-超フィルターが与えられたとき，$\alpha < \tau$ に対して，$\mathcal{L}_\in(\dot{A})$ 構造 $\langle M_\alpha, \in, U_\alpha \rangle$ で，U_α は κ_α 上の M_α-超フィルターとなるようなものと，$\alpha \leq \beta < \tau$ に対し，埋め込み $i_{\alpha\beta}$: $\langle M_\alpha, \in, U_\alpha \rangle \prec^- \langle M_\beta, \in, U_\beta \rangle$ とを次のように帰納的に定義することができる：$M_0 = M$, $U_0 = U$, $\kappa_0 = \kappa$ とおき，i_{00} は M 上の恒等写像とする．$\alpha \leq \beta < \delta$ に対し $M_\alpha, U_\alpha, \kappa_\alpha$ と $i_{\alpha\beta}$ がすでに定義されたとき，次の 2 つの場合にわけて考える：

(i) δ が非極限順序数である場合．例えば $\delta = \gamma + 1$ とする．U_γ による M_γ の超巾が整順的なら，M_δ をその推移的崩壊とし，この節の最初のところでの $U_\delta \subseteq M_\delta$ は $W \subseteq N$ と同様に定義し，

$$j\colon \langle M_\gamma, \in, U_\gamma \rangle \prec^- \langle M_\delta, \in, U_\delta \rangle$$

を対応する埋め込みとする．$\alpha < \gamma$ に対しては $\kappa_\delta = j(\kappa_\gamma)$, $i_{\gamma\delta} = j$, $i_{\alpha\delta} = j \circ i_{\alpha\gamma}$ として，$i_{\delta\delta}$ は M_δ 上の恒等写像とする．他方，この超巾が整順的でないなら $\delta = \tau$ とする．

(ii) δ が極限順序数である場合．

$$\langle \langle \langle M_\alpha, \in, U_\alpha \rangle \mid \alpha < \delta \rangle, \langle i_{\alpha\beta} \mid \alpha \leq \beta \rangle \rangle$$

の順極限が整順的なら，M_δ をそれの推移的崩壊として，$U_\delta \subseteq M_\delta$ を各 $\alpha < \delta$ に対し，

$$\langle M_\alpha, \in, U_\alpha \rangle \prec^- \langle M_\delta, \in, U_\delta \rangle$$

を，順極限の埋め込みに推移的崩壊による変更を加えたものとする．$\alpha < \delta$ に対し，この埋め込みを $i_{\alpha\delta}$ と呼ぶことにして，ある（したがってすべての）$\alpha < \delta$ に対し，$\kappa_\delta = i_{\alpha\delta}(\kappa_\alpha)$ として，$i_{\delta\delta}$ は M_δ 上の恒等写像とする．他方，この順極限が整順的でないときには，$\delta = \tau$ とおく．

この定義がすべての順序数に対し行なえる場合には $\tau = \mathrm{On}$ とおく．そうでない時には $\tau \in \mathrm{On}$ はこの反復のプロセスが最初に整順的でないものに遭遇するような順序数である．整順的でない構造もふくめてこのプロセスを押し進めることも可能であるが，これは記述を複雑にするだけで，苦労してそのように定義しても，ここでは何ら得るところはない．

ここでの記法のまとめをしておく．

$$\langle M_\alpha, U_\alpha, \kappa_\alpha, i_{\alpha\beta} \rangle_{\alpha \leq \beta \in \tau} \text{ は } \langle M, \in, U \rangle \text{ の**反復**とする．}$$

τ は反復の**長さ**で，$\alpha \in \tau$ に対し，$\langle M_\alpha, \in, U_\alpha \rangle$ を $\langle M, \in, U \rangle$ の**反復子**，あるいはもっと正確に **α 番目の反復子**と呼ぶ．また，

$$\langle M, \in, U \rangle \text{ は反復可能}（U \text{ は反復可能な } M\text{-超フィルター}） \quad \Leftrightarrow \quad \tau = \mathrm{On}$$

とする．記述の可能性について言っておくと，M が真のクラスの場合でも，$\langle M, \in, U \rangle$ の反復は M と U から定義のできる単一のクラスと見なすことができる．特に，M が ZFC の内部モデルで，$U \in M$ なら，この反復は，M の中で定義することができる．

反復可能性は，非常に重要な概念であり，これについては，すぐ後で子細に考察することになる．今はとりあえず $\langle M, \in, U \rangle$ を固定して，これの反復が与えられているとして，基本的な性質を確立するいくつかの補題をみてみる．

19.4 補題 $\alpha < \beta \in \tau$ とする．このとき，

(a) $\mathrm{crit}(i_{\alpha\beta}) = \kappa_\alpha$, $i_{\alpha\beta}(\kappa_\alpha) = \kappa_\beta$ となる．

(b) すべての $x \in V_{\kappa_\alpha} \cap M_\alpha$ に対し，$i_{\alpha\beta}(x) = x$, $V_{\kappa_\alpha} \cap M_\alpha = V_{\kappa_\alpha} \cap M_\beta$ で，$\mathcal{P}(\kappa_\alpha) \cap M_\alpha = \mathcal{P}(\kappa_\alpha) \cap M_\beta$ となる．

(c) β が極限順序数なら，$\kappa_\beta = \sup(\{\kappa_\gamma \mid \gamma < \beta\})$ となる．

(d) M が集合なら，$|M_\alpha| = |M| \cdot |\alpha|$ となる．

証明 (a) は反復の構成法から直ちに導け，(b) は 19.1(c) から帰結できる．(c) は，$\xi < \kappa_\beta$ なら，順極限の定義により，ある $\gamma < \beta$ と $\overline{\xi} < \kappa_\gamma$ に対し，$\xi = i_{\gamma\beta}(\overline{\xi})$ とできるから，$\xi = \overline{\xi} < \kappa_\gamma$ となることにより示せる．

(d) については，$|M_\alpha| \leq |M| \cdot |\alpha|$ は 19.1(b) と順極限での極限操作から帰納法によって容易に示せる．逆に，M は M_α に単射的に埋め込まれており，$\{\kappa_\gamma \mid \gamma < \alpha\} \subseteq M_\alpha$ となっているから，$|M| \cdot |\alpha| \leq |M_\alpha|$ である． ⊣

U_α の正規性から，任意の $\alpha + 1 \in \tau$ と $X \in \mathcal{P}(\kappa_\alpha) \cap M_\alpha$ に対し，

$$X \in U_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \{\xi \mid \xi \in X\} \in U_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \kappa_\alpha \in i_{\alpha,\alpha+1}(X)$$

となる．このことから，後で定義可能性に関する諸結果 —— これは正規性の概念の有効性を更に実証するものとなっている —— に対して決定的な役割を果たすことになる，極限順序数における，もう一つの特徴付けが得られる．

19.5 補題 (Kunen [68, 70])．β を τ より小さい極限順序数とする．このとき，任意の $X \in \mathcal{P}(\kappa_\beta) \cap M_\beta$ に対し，

$$X \in U_\beta \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha < \beta (\{\kappa_\gamma \mid \alpha \leq \gamma < \beta\} \subseteq X)$$

となる．

証明 $\gamma < \beta$ で，ある $\overline{X} \in \mathcal{P}(\kappa_\gamma) \cap M_\gamma$ に対し $X = i_{\gamma\beta}(\overline{X})$ となっているとする．このとき，$i_{\gamma+1,\beta}(\kappa_\gamma) = \kappa_\gamma$ だから，

$$\begin{aligned} X \in U_\beta \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{X} \in U_\gamma \\ &\Leftrightarrow \quad \kappa_\gamma \in i_{\gamma,\gamma+1}(\overline{X}) \\ &\Leftrightarrow \quad \kappa_\gamma \in i_{\gamma\beta}(\overline{X}) = X \end{aligned}$$

となる．したがって，任意の $\gamma < \beta$ に対し，$X \in \mathrm{ran}(i_{\gamma\beta})$ なら，$X \in U_\beta \quad \Leftrightarrow \quad \kappa_\gamma \in X$ となるが，順極限の定義により，このことから補題の主張が導かれる．　$\dashv$

したがって，U_β は閉非有界な集合 $\{\kappa_\gamma \mid \gamma < \beta\} \subseteq \kappa_\beta$ により生成することができ，特に，この閉非有界集合は M_β の元ではあり得ない．次の結果は，超巾の反復の特徴付けを与える 5.13(a) の一般化となっており，超巾の反復の構造理論において基本的な役割を果たす．

19.6 補題　任意の $\alpha \in \tau$ と $x \in M_\alpha$ に対し，$n \in \omega$, $f \in {}^{[\kappa]^n}M \cap M$, $\gamma_1 < \cdots < \gamma_n < \alpha$ で，$x = i_{0\alpha}(f)(\kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n})$ となるものが存在する．

証明　α 上の帰納法によって示す．この命題が α に対し成り立つとして，$\alpha + 1 \in \tau$ で $x \in M_{\alpha+1}$ とする．5.13.(a) により，ある $g \in {}^{\kappa_\alpha}M_\alpha \cap M_\alpha$ に対し，$x = i_{\alpha,\alpha+1}(g)(\kappa_\alpha)$ となるようにできる．したがって，$\alpha = 0$ の場合はこれで示せたことになる．そうでないときには，帰納法の仮定により，$n \in \omega$, $h \in {}^{[\kappa]^n}M \cap M$, および $\gamma_1 < \cdots < \gamma_n < \alpha$ を $g = i_{0\alpha}(h)(\kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n})$ となるようにとれる．ここで $\mathrm{ran}(h)$ は関数からなるとしてよい．$f \in {}^{[\kappa]^{n+1}}M \cap M$ を $f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}) = h(\xi_1, \ldots, \xi_n)(\xi_{n+1})$ により定義すると，

$$\begin{aligned} i_{0,\alpha+1}(f)(\kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n}, \kappa_\alpha) &= i_{0,\alpha+1}(h)(\kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n})(\kappa_\alpha) \\ &= i_{\alpha,\alpha+1}(i_{0\alpha}(h)(\kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n}))(\kappa_\alpha) \\ &= i_{\alpha,\alpha+1}(g)(\kappa_\alpha) \\ &= x \end{aligned}$$

となる．

$\delta < \tau$ が極限順序数で，$x \in M_\delta$ のときには，ある $\alpha < \delta$ と $\overline{x} \in M_\alpha$ により，$x = i_{\alpha\delta}(\overline{x})$ とできるから，帰納法の仮定により，ある $n \in \omega$, $f \in {}^{[\kappa]^n}M \cap M$, $\gamma_1 < \cdots < \gamma_n < \alpha$ に対し，$\overline{x} = i_{0\alpha}(f)(\kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n})$ とできる．よって，$i_{\alpha\delta}(\kappa_{\gamma_i}) = \kappa_{\gamma_i}$ が $1 \leq i \leq n$ に対し成り立つことから，$x = i_{0\delta}(f)(\kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n})$ となる．　$\dashv$

したがって，M_α は $\mathrm{ran}(i_{0\alpha})$ と $\{\kappa_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$ から具体的な方法によって構成することができる．このことから，$i_{0\alpha}$ の順序数での振る舞いに関する次の系が得られる：ここでは基数は，普通のように，V での意味での基数である．

19.7 系

(a) $\xi \in \mathrm{On} \cap M$ で $\alpha \in \tau$ なら，$i_{0\alpha}(\xi) < (|{}^\kappa\xi \cap M| \cdot |\alpha|)^+$ となる．

(b) ν を $|{}^\kappa\kappa \cap M| < \nu \in \tau$ となる基数とするとき，$\kappa_\nu = i_{0\nu}(\kappa_0) = \nu$ となる．

(c) θ は $M \models$「ZFC $\wedge$ θ は共終数 $> \kappa$ を持つ強極限」となる基数で，$\alpha < \min(\theta, \tau)$ となっているとする．このとき，$i_{0\alpha}(\theta) = \theta$ が成り立つ．

証明　(a) は，19.6 から $\eta < i_{0\alpha}(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad \eta = i_{0\alpha}(f)(\kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n})$ が，ある $n \in \omega$, $f \in {}^{[\kappa]^n}\xi \cap M$, および $\gamma_1 < \cdots < \gamma_n < \alpha$ に対し成り立つことから，濃度の計算により得られる．

(b) は，

$$\nu \leq \kappa_\nu = \sup(\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \nu\}) \leq \sup(\{(|{}^\kappa\kappa \cap M| \cdot |\alpha|)^+ \mid \alpha < \nu\}) \leq \nu$$

によりよい．ここで，等号は，19.4(c) により，中ほどの不等式は上の (a) により得られる．

(c) $\eta < i_{0\alpha}(\theta)$ として，$\eta < \theta$ を示せばよい．19.6 により，ある $n \in \omega$, $f \in {}^{[\kappa]^n}\theta \cap M$, および $\gamma_1 < \cdots < \gamma_n < \alpha$ により，$\eta = i_{0\alpha}(f)(\kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n})$ とできる．$\mathrm{cf}(\theta) > \kappa$ だから，$\xi < \theta$ で，$f \in {}^{[\kappa]^n}\xi$ となるものがある．したがって，

$$\eta < i_{0\alpha}(\xi) < (|{}^\kappa\xi \cap M| \cdot |\alpha|)^+ \leq \theta$$

となる．二番目の不等式は，(a) から，三番目の不等式は θ に関する仮定から得られる．⊣

19.6 はクーネンによる超巾の反復のもとの定式化へ向かうものとなっている；そこでの定式化の初めの部分は，ここでの展開の一部を定義として述べるものとなっている：$n \in \omega$ に対し，

$$U^n = \{X \in \mathcal{P}([\kappa]^n) \cap M \mid \exists H \in U([H]^n \subseteq X)\}$$

とおく．したがって，U^n は $\langle M, \in, U\rangle$ での意味で（定義可能な）クラスとなっている．U の正規性と弱従順性により，これは n-重積の妥当な定義を与えるものとなっている：

19.8 演習

(a) $n \in \omega$ と $X \in \mathcal{P}([\kappa]^{n+1}) \cap M$ に対し，

$$X \in U^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \{s \in [\kappa]^n \mid \{\xi < \kappa \mid s \cup \{\xi\} \in X\} \in U\} \in U^n$$

となる．

(b) $0 < n \in \omega$ に対し，

$$\langle M, \in, U\rangle \models U^n \text{ は } [\kappa]^n \text{ 上の } \kappa\text{-完備超フィルターである．}$$

ヒント　(a) を示し，これを用いて (b) を証明する．⊣

暫定的に記法を拡大解釈して，$0 < n \in \omega$ に対し，超巾

$${}^{[\kappa]^n}M/U^n = \{(f)^0_{U^n} \mid f \in {}^{[\kappa]^n}M \cap M\}$$

を構成し，これに対応し，$x \in M$ に対して，

$$k_n(x) = (f_x)^0_{U^n}$$

によって与えられる埋め込み

$$k_n \colon \langle M, \in, U\rangle \prec^- \langle {}^{[\kappa]^n}M/U^n, E_{U^n}, \dot{A}_{U^n}\rangle$$

を考える．ここに，f_x は定値関数：$[\kappa]^n \to \{x\}$ である．

次の結果と 19.6 での表現を用いることにより，反復子での充足関係が $\langle M, \in, U\rangle$ での充足関係に還元できることが分かる．特に，このことから，上で定義した超巾が $\langle M, \in, U\rangle$ の有限番目の反復子と同型になることが分かる．定義から $U^0 = \{0\}$ となることに注意する．M が真のクラスである場合には，以下の (a) とこれに続く系は各々のクラスと論理式に対する定理をまとめた図式と解釈する．

19.9 補題

(a) 任意の $\mathcal{L}_\in$ 論理式 $\varphi(v_0,\ldots,v_n)$ と，$x \in M$ および，$\gamma_1 < \cdots < \gamma_n < \alpha \in \tau$ に対し，

$$\langle M_\alpha, \in\rangle \models \varphi[i_{0\alpha}(x), \kappa_{\gamma_1},\ldots,\kappa_{\gamma_n}]$$
$$\Leftrightarrow \quad \langle M, \in, U\rangle \models \{\{\xi_1,\ldots,\xi_n\} \in [\kappa]^n \mid \varphi[x,\xi_1,\ldots,\xi_n]\} \in U^n .$$

(b) $n \in \omega$, $0 < n \in \tau$ に対し，π_n: $\langle {}^{[\kappa]^n}M/U^n, E_{U^n}, \dot{A}_{U^n}\rangle \to \langle M_n, \in, U_n\rangle$ は

$$\pi_n((f)^0_{U^n}) = i_{0n}(f)(\kappa_0,\ldots,\kappa_{n-1})$$

によりうまく定義できて，同型写像となる．したがって，これは推移的崩壊への崩壊の同型写像となっている．さらに $i_{0n} = \pi_n \circ k_n$ が成り立つ．

証明　(a) n に関する帰納法により示す；$n = 0$ の場合は明らかである．一般には，

$$\begin{aligned}
\langle M_\alpha, \in\rangle &\models \varphi[i_{0\alpha}(x), \kappa_{\gamma_1},\ldots,\kappa_{\gamma_n}] \\
\Leftrightarrow \quad & \langle M_{\gamma_n+1}, \in\rangle \models \varphi[i_{0,\gamma_n+1}(x), \kappa_{\gamma_1},\ldots,\kappa_{\gamma_n}] \\
\Leftrightarrow \quad & \langle M_{\gamma_n}, \in, U_{\gamma_n}\rangle \models \{\xi < \bigcup U_{\gamma_n} \mid \varphi[i_{0\gamma_n}(x), \kappa_{\gamma_1},\ldots,\kappa_{\gamma_{n-1}},\xi]\} \in U_{\gamma_n} \\
\Leftrightarrow \quad & \langle M, \in, U\rangle \models \{\{\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}\} \in [\kappa]^{n-1} \mid \\
& \qquad\qquad \{\xi < \bigcup U \mid \varphi[x,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},\xi]\} \in U\} \in U^{n-1} \\
\Leftrightarrow \quad & \langle M, \in, U\rangle \models \{\{\xi_1,\ldots,\xi_n\} \in [\kappa]^n \mid \varphi[x,\xi_1,\ldots,\xi_n]\} \in U^n
\end{aligned}$$

となる（もちろん，$\bigcup U_{\gamma_n}$ は κ_{γ_n} で，$\bigcup U$ は κ である）．最後の同値は 19.8(a) による．

(b) は (a) と 19.6 で $\alpha = n$ としたものから帰結できる．　⊣

19.8(a) は超フィルターの積の一般化された概念の可能性を示唆している．一般的なモデル理論の枠組で，超巾の有限回の反復が単一の超巾の構成に帰着できることは，Frayne-Morel-Scott [62] で示されている．正規超フィルターでは表現定理 19.6 によって技術的な制約がさらに解かれるため，クーネンは同様の分析を超限回の反復に拡張して，すべての反復子が同様の形の単一の超巾で得られることを示している．これとは独立にキースラーも同じような表現を得ている（Chang-Keisler [90: 6.5] を参照）．

次は 19.9(a) の直接的な帰結であり，超巾の反復から，記述不可能集合がいかにして得られるかを示している．このクーネンによる洞察からは，$0^\#$ の，より深い構造的な理解が得られることになる（21.1 を参照）．

19.10 系　(Kunen [68, 70]). $\mathcal{L}_\in$ の論理式 $\varphi(v_0,\ldots,v_n)$, $x \in M$, $\gamma_1 < \cdots < \gamma_n < \alpha \in \tau$, および $\delta_1 < \cdots < \delta_n < \beta \in \tau$ に対し，

$$\langle M_\alpha, \in\rangle \models \varphi[i_{0\alpha}(x), \kappa_{\gamma_1},\ldots,\kappa_{\gamma_n}] \quad\Leftrightarrow\quad \langle M_\beta, \in\rangle \models \varphi[i_{0\beta}(x), \kappa_{\delta_1},\ldots,\kappa_{\delta_n}]$$

となる．特に $\{\kappa_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$ は $\langle M_\alpha, \in, i_{0\alpha}(x)\rangle_{x\in M}$ の識別不可能集合である．　⊣

反復可能性

$\langle M, \in, U\rangle$ とこの反復 $\langle M_\alpha, U_\alpha,\ \kappa_\alpha, i_{\alpha\beta}\rangle_{\alpha\le\beta\in\tau}$ で話を続けることにする．以下で反復可能性のいくつかの特徴付けを確立する．簡単のために，On は**反復の長さの議論ではあたかも順序数であるかのような扱いをする**ことにする．例えば，$\tau \geq \omega_1$ は $\tau = \mathrm{On}$ である可能性も含めることにする．実際，反復可能性に関する歴史的に最初の結果はガイフマンによるものであるが，これは $\tau \geq \omega_1$ となることと $\tau = \mathrm{On}$ となることとは同値である，というものであった．ここでは，これをもっと一般的な枠組の中で，クーネンによる結果の一部となる，次のような十分条件に関する命題として証明する：

U は**可算完備** $\Leftrightarrow$ 任意の $\{X_n \mid n \in \omega\} \subseteq U$ に対し，$\bigcap_n X_n \neq \emptyset$ となる．

この条件は 5.3 の順方向の証明のために十分なものとなっている；$\{X_n \mid n \in \omega\}$ は M の元とは限らないら，ω_1-完備性でのように，$\bigcap_n X_n \in U$ を要求することはできない．クーネンはこの外的な完備性が反復可能性を導くことを示した．後で述べる特徴付けのために，この結果を，Dodd [82: 65] で暗に用いられている，イェンセンによる次の概念で補完する：

$\langle M, \in, U\rangle$ は**可算反復可能** $\Leftrightarrow$ 任意の N-超フィルター W と $\langle M, \in, U\rangle$ に $\prec^-$ で埋め込み可能で，可算な $\langle N, \in, W\rangle$ に対し，$\langle N, \in, W\rangle$ の反復の長さは常に $\geq \omega_1$ となる．

19.11 補題 (Jensen). U が可算完備なら，$\langle M, \in, U\rangle$ は可算反復可能となる．

証明 W を N-超フィルターとして，$\langle N, \in, W\rangle$ は可算，また，

$$e\colon \langle N, \in, W\rangle \prec^- \langle M, \in, U\rangle$$

とする．$\langle N_\alpha, W_\alpha, \lambda_\alpha, j_{\alpha\beta}\rangle_{\alpha\le\beta\in\sigma}$ を $\langle N, \in, W\rangle$ の反復として，$\sigma \geq \omega_1$ を示したい．このために，$\alpha < \omega_1$ に関して帰納的に以下を示す：

(i) $\langle N_\alpha, \in, W_\alpha\rangle$ は定義でき，
(ii) すべての $\gamma < \alpha$ に対し，$e_\gamma = e_\alpha \circ j_{\gamma\alpha}$ となるような $e_\alpha\colon \langle N_\alpha, \in, W_\alpha\rangle \prec^- \langle M, \in, U\rangle$ が存在する．

(ii) は帰納法証明を先に進めるために必要となる．最初に，$e_0 = e$ とおく．$\alpha+1$ での帰納法での議論には，(i) と (ii) が $\leq \alpha$ で成り立つことが示せていると仮定する．特に任意の $X \in W_\alpha$ に対し $e_\alpha(X) \in U$ である．また，N は可算で，$\alpha < \omega_1$ だから，19.4(d) により，N_α も可算となる．したがって，U の可算完備性から，$\eta \in \bigcap\{e_\alpha(X) \mid X \in W_\alpha\}$ となるものが存在する．ここで η を用いて，$\langle N_\alpha, \in, W_\alpha\rangle$ の超巾 $\langle {}^{\lambda_\alpha}N_\alpha/W_\alpha, E_{W_\alpha}, \dot{A}_{W_\alpha}\rangle$ の $\langle M, \in, U\rangle$ への埋め込みが $j(((f)^0_{W_\alpha}) = e_\alpha(f)(\eta)$ により定義できる．さらに，j は，$\prec^-$ に関する初等的埋め込みとなっている． 簡単のために 1 つの変数を持つ論理式 $\varphi(v_0)$ でこれを見ることにする：

$$\begin{aligned}\langle {}^{\lambda_\alpha}N_\alpha/W_\alpha, E_{W_\alpha}\rangle \models \varphi[(f)^0_{W_\alpha}] & \\ \Leftrightarrow\quad & \{\xi < \lambda_\alpha \mid \langle N_\alpha, \in\rangle \models \varphi[f(\xi)]\} \in W_\alpha \\ \Leftrightarrow\quad & \eta \in \{\xi < \kappa \mid \langle M, \in\rangle \models \varphi[e_\alpha(f)(\xi)]\} \\ \Leftrightarrow\quad & \langle M, \in\rangle \models \varphi[e_\alpha(f)(\eta)]\,.\end{aligned}$$

ところが，$\langle {}^{\lambda_\alpha}N_\alpha/W_\alpha, E_{W_\alpha}, \dot{A}_{W_\alpha}\rangle$ は推移的な構造に埋め込めるから，整順的である．したがって，$\langle N_{\alpha+1}, \in, W_{\alpha+1}\rangle$ は実際に上の超巾の推移的崩壊として定義することができる．したがって，j を崩壊の写像で調節したものは初等的埋め込み

$$e_{\alpha+1}\colon \langle N_{\alpha+1}, \in, W_{\alpha+1}\rangle \prec^- \langle M, \in, U\rangle$$

を与える．さらに，$e_\alpha = e_{\alpha+1} \circ j_{\alpha,\alpha+1}$ となることも容易に確かめられるから，任意の $\gamma < \alpha$ に対し，$e_\gamma = e_\alpha \circ j_{\gamma\alpha} = e_{\alpha+1} \circ j_{\gamma,\alpha+1}$ である．

次に，$\delta < \omega_1$ を極限順序数として，(i) と (ii) は $< \delta$ で成り立っているとする．特に，e_α, $\alpha < \delta$ の存在から，0.7 により，

$$\langle\langle\langle N_\alpha, \in, W_\alpha\rangle \mid \alpha < \delta\rangle, \langle j_{\alpha\beta} \mid \alpha \leq \beta\rangle\rangle$$

の順極限は $\langle M, \in, U\rangle$ に初等的に埋め込むことができる．したがってこの順極限は整順的となり，$\langle N_\delta, \in, W_\delta\rangle$ をこの推移的崩壊として定義することができる．さらに，この順極限の $\langle M, \in, U\rangle$ への埋め込みを崩壊の写像で調節したもは，埋め込み

$$e_\delta\colon \langle N_\delta, \in, W_\delta\rangle \prec^- \langle M, \in, W\rangle$$

で $\gamma < \delta$ に対し $e_\gamma = e_\delta \circ j_{\gamma\delta}$ となるようなものとなる．　⊣

19.12 補題　$\langle M, \in, U\rangle$ は可算反復可能なら，反復可能である．

証明　そうでないとして，$\tau \in \mathrm{On}$ と仮定してみる．τ が非極限順序数のときには，例えば $\tau = \gamma + 1$ とする．暫定的に $\langle M_\tau, E_\tau, U_\tau\rangle$ を超巾 $\langle {}^{\kappa_\gamma}M_\gamma/U_\gamma, E_{U_\gamma}, \dot{A}_{U_\gamma}\rangle$ として，

$$i_\tau\colon \langle M, \in, U\rangle \prec^- \langle M_\tau, E_\tau, U_\tau\rangle$$

を $i_{0\gamma}$ に，この超巾への自然な埋め込みを合成してできる写像とする．τ が極限順序数のときには $\langle M_\tau, E_\tau, U_\tau\rangle$ を $\langle M, \in, U\rangle$ の反復の順極限として，

$$i_\tau\colon \langle M, \in, U\rangle \prec^- \langle M_\tau, E_\tau, U_\tau\rangle$$

を対応する埋め込みとする．いずれの場合にも仮定により $\langle M_\tau, E_\tau, U_\tau\rangle$ は整順的ではない．しかし，19.6 と 19.9(a) の証明を見ると，これらの命題は，“τ で”，つまり，$\alpha = \tau$ として，$\langle M_\alpha, \in, U_\alpha\rangle$ を $\langle M_\tau, E_\tau, U_\tau\rangle$ で置き換え，$\tau = \gamma + 1$ の場合には，$i_{0\alpha}$ を i_τ で置き換え，κ_γ を恒等写像 : $\kappa_\gamma \to \kappa_\gamma$ に対し，$[\mathrm{id}]_{U_\gamma}$ で置き換えたときにも成り立つことが分かる．以下で τ での 19.6 と 19.9(a) といったときには，このような形の命題とする．

$\{x_k \mid k \in \omega\} \subseteq M_\tau$ を $x_{k+1}\ E_\tau\ x_k$ がすべての $k \in \omega$ に対し成り立つようなものとする．τ での 19,6 により，$n(k) \in \omega$, $f_k \in {}^{[\kappa]^{n(k)}}M \cap M$, および $\gamma^k_1 < \cdots < \gamma^k_{n(k)} < \tau$ をとって，$x_k = i_\tau(f_k)(\kappa_{\gamma^k_1}, \ldots, \kappa_{\gamma^k_{n(k)}})$ となるようにできる．$\{f_k \mid k \in \omega\}$ の $\langle M, \in, U\rangle$ で

のスコーレム閉包を考え，これの推移的崩壊をとる．これにより，可算な，$\langle N,\in,W\rangle$ で，W は N-超フィルターとなり，崩壊の写像の逆写像が埋め込み

$$e\colon \langle N,\in W\rangle \prec^{-} \langle M,\in,U\rangle$$

となるようなものが得られる．各 $k\in\omega$ に対し，$\overline{f}_k$ を $e(\overline{f}_k)=f_k$ となるものとする．仮定により，$\langle N,\in,W\rangle$ の反復 $\langle N_\alpha,W_\alpha,\lambda_\alpha,j_{\alpha\beta}\rangle_{\alpha\le\beta\in\sigma}$ は $\sigma\ge\omega_1$ を満たす．

$\zeta<\omega_1$ を集合 $Z=\{\gamma_m^k \mid k\in\omega\ \wedge\ 1\le m\le n(k)\}$ の順序型として，$h\colon Z\to\zeta$ を一意に決まる順序同型とする．各 $k\in\omega$ で，$1\le m\le n(k)$ に対し，$\delta_m^k=h(\gamma_m^k)$ として，

$$\overline{x}_k j_{0\zeta}(\overline{f}_k)(\lambda_{\delta_1^k},\ldots,\lambda_{\delta_{n(k)}^k})$$

とする．ここで論理式 $\varphi_k(v_0,v_1,\ldots)$ を，$\varphi_k[i_\tau(f_k),i_\tau(f_{k+1}),\ldots]$ が $\langle M_\tau,E_\tau,U_\tau\rangle$ で，$x_{k+1}\,E_\tau\,x_k$ の成り立つことを主張するものとする．ここに，"$\ldots$" は，集合 $\{\kappa_{\gamma_1^k},\ldots,\kappa_{\gamma_{n(k)}^k},\kappa_{\gamma_1^{k+1}},\ldots,\kappa_{\gamma_{n(k+1)}^{k+1}}\}$ の昇順の枚挙とする．最後に，$\varphi_k^*(v_0,v_1)$ を，τ での 19.9(a) を φ_k に適用したとき，"$\langle M,\in,U\rangle\models$" の右側に現れる式とする．このとき，各 $k\in\omega$ に対し，

$$\begin{aligned} x_{k+1}\ E_\tau\ x_k &\Leftrightarrow \langle M,\in,U\rangle\models\varphi_k^*[f_k,f_{k+1}]\\ &\Leftrightarrow \langle N,\in,W\rangle\models\varphi_k^*[\overline{f}_k,\overline{f}_{k+1}]\\ &\Leftrightarrow \overline{x}_{k+1}\in\overline{x}_k \end{aligned}$$

となる，最後の同値性は φ_k を $\langle N_\zeta,\in,W_\zeta\rangle$ で用いて得られる．もちろんこれは矛盾であるから，証明が完了した． ⊣

19.13 系 (Kunen [68, 70]). U が可算完備なら，$\langle M,\in,U\rangle$ は反復可能である． ⊣

これの逆は正しくない．なぜなら，反復可能な $\langle N,\in,W\rangle$ で可算なものがあるが（19.15(e) を参照），このときには W は可算完備ではあり得ないからである．しかし，次が成立する：

19.14 補題 $\langle M,\in,U\rangle$ が反復可能なら，これの反復子 $\langle M_\alpha,\in,U_\alpha\rangle$ で，U_α が可算完備となるものがある．

証明 この命題は $\alpha=\omega_1$ として示せる：$\{X_n \mid n\in\omega\}\subseteq U_{\omega_1}$ とする．19.5 により，各 $n\in\omega$ に対し，$\alpha_n<\omega_1$ で，$\{\kappa_\gamma \mid \alpha_n\le\gamma<\omega_1\}\subseteq X_n$ となるものがある．$\beta=\sup(\{\alpha_n \mid n\in\omega\})$ とすれば，$\kappa_\beta\in\bigcap_n X_n$ である． ⊣

上で示したいくつかの補題での議論をくみあわせると，反復可能性のいくつかの特徴付けを与える同値命題の雛菊の花輪を作ることができる：

19.15 定理 （(b) は Gaifman による，Jensen, Dodd [82]）．次は同値である：

(a) $\langle M,\in,U\rangle$ は反復可能である，つまり，$\tau=\mathrm{On}$ となる．
(b) $\tau\ge\omega_1$.
(c) 反復子 $\langle M_\alpha,\in,U_\alpha\rangle$ で，U_α が可算完備となるものがある．
(d) $\langle M,\in,U\rangle$ は可算反復可能である．
(e) 任意の $\langle M,\in,U\rangle$ に初等的に埋め込み可能な $\langle N,\in,W\rangle$ は反復可能となる．

証明　(a) → (b) は明らかである．(b) → (c) は，まず $\tau \geq \omega_1$ なら，$\tau > \omega_1$ となる，つまり ω_1-番目の反復子が存在することに注意する．これは対応する順極限が整順的となることが容易に示せることから，明らかである．したがって，(c) は 19.14 での論法により導ける．(c) → (d) については，19.11 により，$\langle M_\alpha, \in, U_\alpha \rangle$ は可算反復可能であるから，$\langle M_\alpha, \in, U_\alpha \rangle$ に初等的に埋め込める $\langle M, \in, U \rangle$ も可算反復可能であることが分かる．(d) → (e) は，$\langle N, \in, W \rangle$ が可算反復可能であることに注意して，19.12 を用いればよい．(e) → (a) は明らかである．　⊣

次の絶対性に関する結果は，上の補題からの帰結の一つである：

19.16 命題　S を ZFC の推移的な $\in$-モデルで，$\omega_1 \subseteq S$ となっているとする．$M, U \subseteq S$ が S での意味でのクラスで，$S \models$「U は M-超フィルター」とする．このとき，

$$\langle M, \in, U \rangle \text{ は反復可能} \quad \Leftrightarrow \quad S \models \langle M, \in, U \rangle \text{ は反復可能}$$

となる．特に，U が M-超フィルターで，$M \models \mathrm{ZFC}$ かつ $\omega_1 \cup \{U\} \subseteq M$ なら，$\langle M, \in, U \rangle$ は反復可能である．

証明　明らかに U は本当に M-超フィルターとなっている，特に，このことから，M は本当に ZFC^- のモデルとなっている．仮定と，充足関係の絶対性から，すべての $\alpha < \omega_1$ に対し，$(\langle M_\alpha, \in, U_\alpha \rangle)^S = \langle M_\alpha, \in, U_\alpha \rangle$ が，この両辺が定義されている限りにおいて成り立つ．さらに，S の意味でのクラス構造に対し，整順性は絶対的である (0.3)．したがって，$S \models$「$\langle M, \in, U \rangle$ は反復可能である」なら，$\langle M, \in, U \rangle$ の（本当の）反復も長さ $\geq \omega_1$ を持つ．したがって，19.15 により，これは反復可能である．これの逆は明らかである．

最後の主張は $S = M$ として $M \models$「U は可算完備」となっていることに注意すればよい．　⊣

可測基数に関する補題

次は，クーネンによる，彼の導入した超巾の反復から得られる驚くべき結果を述べる番である．チャング Chang [71] は基数 κ に対し，(§4 で述べた）無限言語 $L_{\kappa\kappa}$ を用いて構成可能な集合のクラス C^κ を定式化して $L = C^\omega$ の性質の様々な一般化を得ている．例えば，$M = C^\kappa$ は任意の $< \kappa$-列をとることに対して閉じている，つまり ${}^{<\kappa}M \subseteq M$ となるもののうち，最小の内部モデルになっている．スコットの結果 5.5 もこれに対して拡張することができ，κ が可測基数のときには $V \neq C^{\kappa^+}$ となることが示せる．スレソン Sureson [86] はこのようなモデルの超越性を識別不可能性の言葉でとらえて研究しているが，特に，そこで，C^{ω_1} の超越性と可測基数の存在が無矛盾等価となることを示している．クーネンは Kunen [73] で超巾の反復を用いて，このようなモデルは L とは違い，内在的な整列順序を持っていないことを示している：**κ が正則基数で κ^+ 個の可測基数が存在するとき，C^{κ^+} では選択公理が成り立たない．** この結果を得る過程で，彼は ZFC において，可測基数に対し大域的な制約を果たす予期されなかった内容の補題を確立している．ここでは，フライスナー William Fleissner による超巾の反復を用いない証明を与える．いつものように，κ が可測基数で U が κ 上の κ-完備な超フィルターなら，$j_U \colon V \prec M_U \cong \mathrm{Ult}(V, U)$

として，$[f]_U \in M_U$ を $f\colon \kappa \to V$ に対応させる．

19.17 定理 (Kunen [73]). すべての ξ に対し，次の集合は有限である：

$$\{\kappa > \omega \mid \kappa \text{ 上の } \kappa\text{-完備な超フィルター } U \text{ で } \xi < j_U(\xi) \text{ となるものが存在する}\}$$

証明 (Fleissner [75]). まず，U を $\kappa > \omega$ 上の κ-完備超フィルターとして，順序数の半開区間 $[\alpha, \beta) = \{\xi \mid \alpha \leq \xi < \beta\}$ に対し，j_U は α の，ある共終集合のすべての元と β を動かさないが，$[\alpha, \beta)$ のすべての元を動かすようになっているとき，$[\alpha, \beta)$ を U の**移動区間**と呼ぶことにする．この条件が満たされているときには，

(i) $\mathrm{cf}(\alpha) = \kappa$ かつ
(ii) すべての $\xi \in [\alpha, \beta)$ に対し，$\beta = \sup(\{j_U^n(\xi) \mid n \in \omega\})$ となる．

ここに，j_U^n は j_U の n 回繰り返しの適用を表す（(i) を示すには，α 未満の共終個の順序数が j_U で動かないから，$\sup(\{j_U(\eta) \mid \eta < \alpha\}) = \alpha$ となり，したがって標準的な議論により，$j_U(\alpha) > \alpha$ となるためには $\mathrm{cf}(\alpha) = \kappa$ とならなければならないことが分かる）．

次に，U が $\kappa > \omega$ 上の κ-完備な超フィルターで，W は $\lambda > \kappa$ 上の λ-完備な超フィルターのとき，j_U と j_W は可換であることに注意する：任意の集合 x に対し，$j_U(x) = \{[f]_U \mid f \in {}^{\kappa}x\}$ で j_W は κ と U を動かさないから，

$$j_W(j_U(x)) = \{[f]_U \mid f \in {}^{\kappa}j_W(x)\} = j_U(j_W(x))$$

となる．したがって，U と W が上のようなもので，$[\alpha, \beta)$ は U の移動区間，$[\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ は W の移動区間であるとき，これらは共通部分を持たないか，入れ子になっている，つまり $\alpha < \overline{\alpha} < \beta$ なら，$\overline{\beta} < \beta$ となる．これを示すために，η を $\alpha \leq \eta < \overline{\alpha}$ かつ，$j_W(\eta) = \eta$ となるようにとる．これは $\overline{\alpha}$ に対する仮定により可能である．(ii) により，$n \in \omega$ で，$\overline{\alpha} < j_U^n(\eta) < \beta$ となるものがある．j_U と j_W は可換だから，

$$j_W(j_U^n(\eta)) = j_U^n(j_W(\eta)) = j_U^n(\eta)$$

となり，したがって，$[\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ が W の移動区間であることから，$\overline{\beta} \leq j_U^n(\eta)$ となる．よって，$\overline{\beta} < \beta$ である．

ここで以下のようにして証明を完了できる：ある ξ に対し，可測基数の上昇列 $\xi_i, i \in \omega$ で，各 $i \in \omega$ に対し，κ_i 上の κ_i-完備超フィルター U_i で $\xi < j_{U_i}(\xi)$ となるものがあったとしてみる．$\mathrm{cf}(\xi) \neq \kappa_i$ がすべての $i \in \omega$ に対し成り立っているとしてよい．このとき，すべての $i \in \omega$ に対し，ξ は U_i の移動区間 $[\alpha_i, \beta_i)$ に含まれる．上の (i) により，$i \neq j$ なら，$\alpha_i \neq \alpha_j$ となるから，部分列をとることにより，$i < j$ なら $\alpha_i < \alpha_j$ となるとしてよい．ところが，このとき，$[\alpha_i, \beta_i), i \in \omega$ はすべて ξ を含んでいるので，これらは入れ子になっている．したがって，$\beta_0 > \beta_1 > \beta_2 \ldots$ となり，矛盾である． ⊣

ヴェールンク Friedrich Wehrung [89] はこのクーネンの結果のもう一つの別証を与えて，関連したいくつかの結果を確立している．

プリクリ強制との関係

超巾の反復とプリクリ強制との興味深い関係について述べて，この節を終えることにする．M を ZFC の内部モデルとし，$U \in M$ で，$M \models$「U は κ 上の正規超フィルター」とする．このとき，19.16 により，$\langle M, \in, U\rangle$ は反復可能となるから，$\langle M_\alpha, U_\alpha, \kappa_\alpha, i_{\alpha\beta}\rangle_{\alpha\le\beta\in\mathrm{On}}$ をその反復とする．このとき，すべての γ に対し，$i_{0\gamma}(U) = U_\gamma \in M_\gamma$ となり，充足関係の絶対性から，$\langle\langle M_\alpha, \in, U_\alpha\rangle \mid \gamma \le \alpha \in \mathrm{On}\rangle$ は $\langle M_\gamma, \in, U_\gamma\rangle$ で，これの超巾の反復として定義可能となる．特に，$\alpha \le \beta$ なら，$M_\beta \subseteq M_\alpha$ となる．

極限順序数 $\delta > 0$ に対し，

$$M_\delta^+ = \bigcap\nolimits_{\alpha<\delta} M_\alpha$$

とおく．このとき $M_\delta \subseteq M_\delta^+$ で，M_δ^+ **は内部モデルとなる**: 3.1 の前の記述の意味で，

$$\bigcup M_\delta^+ \subseteq M_\delta^+ \quad \text{かつ} \quad \forall\xi(\mathrm{def}(M_\delta^+ \cap V_\xi) \subseteq M_\delta^+)$$

となる．後の方については，ある ξ に対し $x \in \mathrm{def}(M_\delta^+ \cap V_\xi)$ なら，任意の $\alpha < \delta$ に対し M_δ^+ と M_α でのランクの定義可能性と絶対性から，$x \in M_\alpha$ となり，したがって，$x \in \bigcap_{\alpha<\delta} M_\alpha = M_\delta^+$ となることからよい．

$\delta = \omega$ の場合に注目することにして，$\{\kappa_n \mid n \in \omega\} \in M_\omega^+ - M_\omega$ となっていることに注意する：各 $i \in \omega$ に対し，M_i から先の反復の M_i での定義可能性から，$\{\kappa_n \mid i \le n \in \omega\} \in M_i$ となっている．ところが，$\kappa_\omega = \sup(\{\kappa_n \mid n \in \omega\})$ は M_ω で可測基数となるから，$\{\kappa_n \mid n \in \omega\} \notin M_\omega$ である．ソロヴェイは，$\{\kappa_n \mid n \in \omega\}$ が M_ω 上プリクリ強制の P_{U_ω}-generic となることを発見している；ブコウスキー Bukovský [73] は一般的な議論により M_ω^+ が M_ω の generic 拡大であることを示したが，この後デオルノワとブコウスキーは，M_ω と M_ω^+ 関係の厳密な記述を得ている：

19.18 定理

(a) (Solovay) $\{\kappa_n \mid n \in \omega\}$ は M_ω 上プリクリ強制の P_{U_ω}-generic となる．

(b) (Dehornoy [75, 78]; Bukovský) $M_\omega[\{\kappa_n \mid n \in \omega\}] = M_\omega^+$.

証明　(a) これは 18.7 と 19.5 から直ちに得られる．

(b) $g = \{\kappa_n \mid n \in \omega\}$ とおく．$M_\omega^+ \subseteq M_\omega[g]$ を示せばよい．まず，

(∗)　$x \in M_\omega$ なら，十分に大きな $n \in \omega$ に対し，$i_{n\omega}(x) = i_{\omega,\omega 2}(x)$ となる

ことを示す．これは十分に大きな $n \in \omega$ に対する以下の議論から導かれる：$x_n \in M_n$ で，$i_{n\omega}(x_n) = x$ となるものがとれる．つまり，$\langle M_n, \in, U_n\rangle \models$「$x_n$ の ω 番目の反復子への埋め込みによる像は x である」が成り立つ．$i_{n\omega}$ をこれに適用して，$\langle M_\omega, \in, U_\omega\rangle \models$「$i_{n\omega}(x_n)$ のω 番目の反復子への埋め込みによる像は $i_{n\omega}(x)$ である」となる．ところがここで問題となる埋め込みは $i_{\omega,\omega 2}$ だから，$i_{n\omega}(x) = i_{\omega,\omega 2}(i_{n\omega}(x_n)) = i_{\omega,\omega 2}(x)$ となる．

次に，M_ω^+ での順序数の集合はすべて $M_\omega[g]$ の元となることを示す：$x \in \mathcal{P}(\gamma) \cap M_\omega^+$ とする．19.6 と反復の定義可能性から，列 $\langle f_n \mid n \in \omega\rangle \in M$ で，各 $n \in \omega$ に対し，f_n: $[\kappa]^n \to M$ かつ，$x = i_{0n}(f_n)(\kappa_0, \ldots, \kappa_{n-1})$ となるものがある．したがって，$i_{n\omega}(\kappa_i) = \kappa_i$ だから，$i_{n\omega}(x) = i_{0\omega}(f_n)(\kappa_0, \ldots, \kappa_{n-1})$ となる．

$$\langle i_{0\omega}(f_n) \mid n \in \omega \rangle = i_{0\omega}(\langle f_n \mid n \in \omega \rangle) \in M_\omega$$

だから，g からの定義可能性により，$\langle i_{n\omega}(x) \mid n \in \omega \rangle \in M_\omega[g]$ となる．ここで，任意の $\xi < \gamma$ に対し，$\xi \in x \iff$ 十分に大きな $n \in \omega$ に対し $i_{n\omega}(\xi) \in i_{n\omega}(x)$, となる，ということが上の (*) から言えるから，$i_{\omega,\omega 2}$ の M_ω での定義可能性から，$x \in M_\omega[g]$ となる．

最後に，$M_\omega^+ \subseteq M_\omega[g]$ はランクに関する帰納法により示すことができる：$x \in M_\omega^+$ として，帰納法の仮定から，$x \subseteq M_\omega[g]$ となっているとする．このとき，$x \subseteq (V_{\mathrm{rank}(x)})^{M_\omega[g]}$ となる．$M_\omega[g]$ は，(a) によりACのモデルのgeneric拡大となっており，特にACを満たすから，単射 $f:\ (V_{\mathrm{rank}(x)})^{M_\omega[g]} \to \mathrm{On}$ を $f \in M_\omega[g]$ となるようにとる．このとき，$f \in M_\omega^+ \supseteq M_\omega[g]$ で $f``x$ は $M_\omega^+$ での順序数の集合となっている．したがって，前の段落により，$f``x \in M_\omega[g]$ となるから，$x = f^{-1}(f``x) \in M_\omega[g]$ である． ⊣

上の証明の最後は，もし2つの推移的なZFの $\in$-モデル N_1, N_2 で順序数の集合の全体が同じになり，少なくとも，これらの片方がACを満たせば，$N_1 = N_2$ となる（Jech [78:127] を参照），という命題の一部を示すものとなっている．

デオルノワ Dehornoy [76, 78] は内部モデル M_δ^+ の M_α, $\alpha \in \mathrm{On}$ による次のような完全な記述を得ている：(i) ある $\alpha < \delta$ に対し，$\delta = \alpha + \omega$ となる場合．このときには，19.18 と同じように $\{\kappa_{\alpha+n} \mid n \in \omega\}$ は M_δ 上プリクリ強制での P_{U_δ}-generic となり，$M_\delta^+ = M_\delta[\{\kappa_{\alpha+n} \mid n \in \omega\}]$ である．(ii) ある $\alpha < \delta$ で，$\langle M_\alpha, \in, U_\alpha \rangle \models \mathrm{cf}(\delta) > \omega$ となる．このときには $M_\delta^+ = M_\delta$ となる．例えば，$\langle M_\omega, \in, U_\omega \rangle \models$「$\kappa_\omega$ は正則基数」だから，$M_{\kappa_\omega}^+ = M_{\kappa_\omega}$ である．(iii) (i) も (ii) も成り立たない場合．この場合には，プリクリ強制でgenericな対象の集まり G_δ で，M_δ^+ では整列不可能となっているものによって，$M_\delta^+ = M_\delta[G_\delta]$ とできる．特に，このときには M_δ^+ ではACは成り立たない．Dehornoy [83] では，この結果はもっと強い仮定の内部モデルと非可算共終数を変化させる強制法に対する図式として拡張されている．

この節で述べた基礎理論は次の節で拡張され，可測性の内部モデルに関する基本構造定理が，それを用いて導かれる．

§20 可測性の内部モデル

1960年代後半になって考察され始める巨大基数の理論のテーマの一つに，巨大基数を定義する性質を保存する最小の内部モデルの研究がある．L がGCHに対してそうだったように，これらの標準的な内部モデルは，対応する理論からの必然的な帰結の範囲を明瞭にする役割を果たすのみでなく，GCHのような極小原理の相対的無矛盾性を確立するための手段ともなる．シルバーとクーネンは彼等の可測性の内部モデルの構造理論によって，この方向の研究の糸口をつけた．この節では彼等の結果について述べる．後にもっと強い仮説に注意が向けられるようになるとき，内部モデルの理論のこの方向の研究のプログラムは大きく飛躍することになる．単に巨大基数の組合せ論というだけでなく構造的な指導原理が導入されることになり，これは強制法と内部モデルという相補的な手法により，注目すべき無矛盾等価性の結果をいくつも導くことになる．

内部モデルの理論は，もちろんゲーデルの L に関する基本的な仕事によって始まったのであった．到達不可能基数，マーロ基数，弱コンパクト基数といった，それほど大きくない巨大基数に対しては L 自身が対応する内部モデルになっている (3.1, 6.7)．1960 年代の後半に始まるイェンセンの組織的研究は L の細部構造を明らかにしたが，これは，したがって，このような基数と両立するものであり，さらに，より先鋭な文脈における，示唆に富む特徴付けを導くことになる．彼はまた L で得られる組合せ論的原理を抽出したが，これらの原理の否定は，上のような L での巨大基数と関連することがわかってくる（第II巻を参照）．このようにして，L を注意深く研究することにより，これらのあまり大きくない巨大基数の構造的理解も深まったのであった．

これらの展開が起こるより前に，スコットによって得られたされた，可測基数の存在が $V = L$ と矛盾する，という相対性を示す結果が，ソロヴェイによって考察されることになる可測性の内部モデルの研究の発展のための下準備となった．U を $\kappa > \omega$ 上の κ-完備超フィルターとする．κ の可測性は U が存在するという存在命題の仮定となっていることから，ソロヴェイは，レヴィの U から相対的に構成可能な集合の全体による内部モデル $L[U]$ (§3) に着目する．$\overline{U} = U \cap L[U] \in L[U]$ で，したがって，$L[\overline{U}] = L[U]$ となる．次も簡単に確かめられる：

20.1 演習

$$L[U] \models \overline{U} \text{ は } \kappa \text{ 上の } \kappa\text{-完備超フィルターとなる}$$

また，U が正規超フィルターのときには，$L[U] \models$「$\overline{U}$ は正規」となる．　$\dashv$

したがって，κ は $L[U]$ で可測となり，L の ZF への関係と同じように，$V = L[U]$ となることは，κ が可測基数であることと矛盾しないことが分かり，U は最初から，$\overline{U}$ ととってよい．このような**可測性の内部モデル**に注目して，

$$\langle L[U], \in, U\rangle \text{ が } \kappa\text{-モデル} \iff \langle L[U], \in, U\rangle \models U \text{ は } \kappa \text{ 上の正規超フィルター}$$

とする．このように，$U \in L[U]$ は最初から 1 変数の関係として組みこまれているものとする．$U \in L[U]$ から，3.2(b) により，$L[U]^{L[U]} = L[U]$ となるので，$L[U] \models$「$V = L[U]$」である．**κ は必ずしも V での基数ではないとする**（この節でもふたたび $\kappa, \lambda, \ldots$ を拡大解釈して用いて，これらはある推移的な $\in$-モデルでの意味の基数を記すものとする）．これに関する最初のいくつかの結果はすでに豊かな実りを予期させるものだった：

20.2 補題 (Solovay). $\langle L[U], \in, U\rangle$ を κ-モデルとする．このとき $L[U]$ で以下が成り立つ：

(a) $\forall\lambda \geq \kappa(2^\lambda = \lambda^+)$.

(b) κ は唯一の可測基数である．

証明　(a) ゲーデルの L での GCH の証明の論法は，任意の $L[A]$ でも十分に大きな基数に対して有効である；ここでは $U \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ だから，任意の $\lambda \geq \kappa$ に対してこのような議論ができる：$\lambda \geq \kappa$ に対し，$\mathcal{P}(\lambda) \cap L[U] \subseteq L_{\lambda^+}[U]$ が示せれば，$|L_{\lambda^+}[U]| = \lambda^+$ により証明が完了する．$L[U] \models V = L[U]$ により，この議論を $L[U]$ の中で行うことで，(a) が

得られるからである．

$x \in \mathcal{P}(\lambda) \cap L[U]$ として，$\gamma > \lambda$ を x, $U \in L_\gamma[U]$ となるような極限順序数する．$\langle H, \in, U \cap H \rangle \prec \langle L_\gamma[U], \in, U \rangle$ を $\lambda \cup \{x, U\} \subseteq H$ で $|H| = \lambda$ となるものとする．$\langle N, \in, W \rangle$ を $\langle H, \in, U \cap H \rangle$ の推移的崩壊として，π を崩壊の同型写像とする．$\lambda \subseteq H$ だから，$\pi(y) = y$ がすべての $y \in \mathcal{P}(\lambda) \cap H$ に対して成り立つ．特に，$\pi(x) = x$ で，$W = \pi``(U \cap H) = U \cap N$ である．初等的埋め込みにより，$\langle N, \in, U \cap N \rangle$ は 3.3(b) の文 σ_1 を満たすから，ある δ に対し，$N = L_\delta[U]$ となる．一方，$|N| = \lambda$ だから，$\delta < \lambda^+$ となり，$x \in L_\delta[U] \subseteq L_{\lambda^+}[U]$ となり，このことから，上の命題が得られる．

(b) 以下では常に $V = L[U]$ と仮定する．可測基数 $\lambda \neq \kappa$ が存在したとして矛盾を導く．W を λ 上の λ-完備な超フィルターとして，

$$j \colon V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V, W)$$

とする．V は $L[U]$ で U から定義できるクラスとなるから，初等的埋め込みと 3.2(b) により，$M = L[j(U)]^M = L[j(U)]$ となる．以下で，実際には $M = L[U]$ となることを示すが，5.7(e) により $W \notin M$ だから，これは矛盾である．

$\lambda > \kappa$ なら $j(U) = U$ だからよい．そこで $\lambda < \kappa$ と仮定する．U は正規超フィルターだから，

$$E = \{\alpha < \kappa \mid \alpha > \lambda \ \wedge\ \alpha \text{ は到達不可能基数}\} \in U\ ,$$

となっている．また，5.7(c) により，すべての $\alpha \in E$ に対し $j(\alpha) = \alpha$ となる．このことから，$j(U) = U \cap M$ が分かる：まず $X \in j(U)$ としてみる．例えば $f \in {}^\lambda U$ に対して $X = [f]_W$ となっているとする．このとき，U の κ-完備性から，$Y = \bigcap_{\xi < \lambda} f(\xi) \in U$ となる．明らかに，$j(Y) \subseteq X$ である．ところが，j は E 上恒等写像だから，$j(Y) \supseteq j``(Y \cap E) = Y \cap E \in U$ となり，したがって $X \in U \cap M$ である．これで $j(U) \subseteq U \cap M$ が確かめられたわけだが，$j(U)$ は M で超フィルターだから，$j(U) = U \cap M$ が分かる．ここで，3.2(b) により，

$$M = L[j(U)] = L[U \cap M] = L[U]$$

が示せる． ⊣

シルバーは 20.2(a) を拡張して，κ-モデルで GCH が成り立つ，という κ-モデルに関する最初の重要な結果を得ている：

20.3 定理 (Silver [66a, 71a]). $\langle L[U], \in, U \rangle$ を κ-モデルとするとき，$L[U] \models \mathrm{GCH}$ が成り立つ．

証明 $L[U] \models V = L[U]$ となることに注意して，$L[U]$ で議論を進めて GCH が，そこでは κ 以下で成り立つことを示す：$\lambda < \kappa$ とする．3.3(b) での論理式 $\varphi_1(v_0, v_1)$ によって与えられた $L[U]$ の整列順序 $<_{L[U]}$ を思い出そう．λ の部分集合で，階層 $L[U] = \bigcup_\alpha L_\alpha[U]$ の後の方で現れるものがあり得ることが問題となるわけであるが，$<_{L[U]} |(\mathcal{P}(\lambda) \times \mathcal{P}(\lambda))$ が順序型 $\leq \lambda^+$ を持つことを示せば十分である．つまり，任意の $y \in \mathcal{P}(\lambda) \cap L[U]$ に対し，

$$|\{x \in \mathcal{P}(\lambda) \cap L[U] \mid x <_{L[U]} y\}| \ \leq\ \lambda$$

となることを示せばよい.

これが成り立たないとしてみる．このときには，$y \in \mathcal{P}(\lambda) \cap L[U]$ で，

$$R = \{x \in \mathcal{P}(\lambda) \cap L[U] \mid x <_{L[U]} y\}$$

としたときに，$|R| = \lambda^+$ となるものがある.

$\gamma > \kappa$ を極限順序数で $y, U \in L_\gamma[U]$ となるものとして，構造

$$\mathcal{A} = \langle L_\gamma[U], \in, U, R, \{y\}\rangle$$

を考える．U は（16.10の前で定義したような意味で）λ^+-ローボトムとなるから，8.4(b) での論法を λ より小さい順序数の各々に対して定数記号を付加した言語に対して適用することにより，

$$\mathcal{B} = \langle B, \in, U \cap B, R \cap B, \{y\}\rangle \prec \mathcal{A}$$

で $|R \cap B| \leq \lambda$, $\lambda \subseteq B$, $B \cap \kappa \in U$ となるものがとれる．$\langle N, \in, W\rangle$ を $\langle B, \in, U \cap B\rangle$ の推移的崩壊として，π を崩壊の同型写像とする．$\lambda \subseteq B$ だから，任意の $x \in \mathcal{P}(\lambda) \cap B$ に対し $\pi(x) = x$ となる．特に，$y \in N$ で，$R \cap N = R \cap B$ である．以下で $W = U \cap N$ となることを確かめるが，初等的埋め込みと 3.3(b) により，このことから，ある極限順序数 ρ に対し，$N = L_\rho[U]$ となり，$y \in N$ だから，3.3(a) での $<_{L[U]}$ の性質から，$R \subseteq N$ となる．したがって，$|N| = |R \cap N| = |R \cap B| \leq \lambda$ となり矛盾である.

$W = U \cap N$ を確かめるには，$B \cap \kappa \in U$ で，すべての $\xi \in B$ に対し $\pi(\xi) \leq \xi$ となり，π は単射であることに注意する．このことから，U の正規性により，

$$E = \{\xi \in B \cap \kappa \mid \pi(\xi) = \xi\} \in U$$

となることが分かる．任意の $S \in N$ に対し，$S = \pi(\overline{S})$ がある $\overline{S} \in B$ に対し成り立っているとすれば，$S \in W \ \Leftrightarrow\ \exists D \in U(D \cap E \subseteq \overline{S})$（順方向は $W = \pi``(U \cap B)$ だから $D = \overline{S}$ ととればよい）$\ \Leftrightarrow\ \exists D \in U(D \cap E \subseteq S)$（$\pi$ は $D \cap E$ 上で恒等写像だから）$\Leftrightarrow\ S \in U$, となる．したがって $W = U \cap N$ が言えて証明が完了した.　⊣

イェンセンは，Jensen [74] で，内部モデルに移行するかわりに強制法を用いることによって，GCH の可測基数との無矛盾性を示している．組合せ論での偶発的な事実を用いて，イェンセンは基礎モデルの可測基数が，崩壊の p.o. のイーストン積で保存されることを示した．この方法により，ラムズィー基数の GCH との，最初の無矛盾性証明が与えられている．これに対する内部モデルの理論ができあがるのはずっと後になってからである.

少し本題からそれるが，以下で，実数値可測基数が内部モデルでは可測基数になる，という命題 16.1(b) のソロヴェイによって与えられた最初の証明のスケッチを示す.

20.4 演習　(Solovay [71]). $\lambda < \kappa$ として，I を κ 上の λ-飽和的な正規イデアルとする．このとき，

$$L[I] \models \kappa \text{ は可測基数}$$

となる.

ヒント $\overline{I} = I \cap L[I]$ として，$L[I] \models$「$\overline{I}$ は κ 上の正規な λ-飽和的イデアルとなる」が成立することを確かめる．$L[I]$ で議論して，16.3 により，$\lambda^+ < \kappa$ となり，16.11 により，$\overline{I}^*$ は，λ^+-ローボトムである．したがって，20.3 での論法により，ここでも $2^\lambda = \lambda^+$ が帰結できることを確かめて，これに 16.4(a) を適用すればよい． ⊣

これまでの $L[U]$ に関する結果は U が述語として推移的な部分構造で保存される，つまり N をそのような部分構造の領域とするとき，U に対応するものが $U \cap N$ となる，ということに依存していた．これより先の結果では，相対的構成可能性の，もっと精密な分析が必要となる．20.3 の GCH の結果で必要となっていたのは，正規超フィルターのローボトムの性質のみであった．ラムズィーの性質により識別不可能集合から生成される部分構造が得られるが，シルバーは，これにより $L[U]$ での実数の全体に Δ^1_3 整列順序が与えられる，という，より強い L との類似性が得られることを発見している．クーネンは，κ-モデル $\langle L[U], \in, U \rangle$ は κ のみに依存する，という事実を確立している．実際，W を κ 上の任意の κ-完備な超フィルターとするとき，$L[U] = L[W]$ となる．さらにクーネンは，すべての異なる κ に対し κ-モデルは超巾の反復により得られることを示している! したがって，これらの可測性の内部モデルはすべて同一の理論を持つ．

§19 で準備したことを用いて，上に述べた構造定理やその他の諸定理を，歴史的には後になって導入されることになる記法とアプローチを用いて確立することにする．特に，シルバーの GCH と実数の Δ^1_3 整列順序に関する結果には超巾の反復による証明を与える．これらの結果によって明らかになる可測性の内部モデルの明快な内部構造と驚くべき一貫性は，ZFC に可測基数の存在を加えた理論の**無矛盾性**を示唆する強い論拠を供することになる．

まず κ-モデルを近似する構造を考察して，§19 での表現をより先鋭な文脈で考える：

$\langle M, \in, U \rangle$ は（κ での）ZFC$^-$ **プリマウス** $\Leftrightarrow$
U は κ 上 M-超フィルターで
ある ζ に対し $M = L_\zeta[U]$ ($M = L[U]$ の場合も許す)．

この用語は歴史的な発展の中で出てきたもので，より洗練された文脈における齧歯類の跳梁の前兆を示すものとなっている[4]（核モデル —— 第 II 巻を参照）．ZFC$^-$ は M-超フィルターという用語に暗に含まれている仮定 $M \models$ ZFC$^-$ からきているが，ここでは手短に表現するために，

この節では**プリマウス**といったときには ZFC$^-$ プリマウスのこととする．

ただし，この用語は第 II 巻では異なった意味を持つことになることに注意しておく．いくつかの自明な事実を指摘しておく：

---

[4] ［訳注］ここで齧歯類云々と言っているのは，プリマウスとう用語が「前・鼠」を意味する造語であることをからかっているわけである．

(i) M-超フィルター U の弱従順性の条件は $M = L_\zeta[U]$ では自動的に出てくる．
(ii) 3.3(b) と初等的埋め込みにより，プリマウスの任意の反復子は再びプリマウスである．
(iii) κ-モデル $\langle L[U], \in, U\rangle$ はプリマウスで $U \in L[U]$ となる．

この最後の内部モデルの場合を議論に含められるように，ここでは，

$L_\zeta[U]$ といったときには $\zeta = \mathrm{On}$, つまり，$L_\zeta[U] = L[U]$ となる場合も含める

ことにする．この場合での反復可能性は 19.16 の帰結として直ちに得られる：

20.5 補題　$\langle L_\zeta[U], \in, U\rangle$ をプリマウスとして，$L_\zeta[U] \models \mathrm{ZFC}$ で $\omega_1 \cup \{U\} \subseteq L_\zeta[U]$ とする．このとき，$\langle L_\zeta[U], \in, U\rangle$ は反復可能である．　$\dashv$

特に，任意の κ-モデルは反復可能で，その反復子はそこで定義可能である．

次は，プリマウスのある反復子の定義可能性に関する決定的な事実である．$\nu > \omega$ が正則基数のとき $\mathcal{C}_\nu$ で ν 上の閉非有界フィルターを表していたことを思い出そう．

20.6 補題　$\langle M, \in, U\rangle$ を κ でのプリマウスとして，$\langle M_\alpha, U_\alpha, \kappa_\alpha, i_{\alpha\beta}\rangle_{\alpha\leq\beta\in\tau}$ をその反復とし，$\nu \in \tau$ を正則基数 $> |{}^\kappa\kappa \cap M|$ とする．このとき，ある ζ に対し，

$$M_\nu = L_\zeta[\mathcal{C}_\nu] \text{ かつ } U_\nu = \mathcal{C}_\nu \cap L_\zeta[\mathcal{C}_\nu]$$

となる．

証明　19.7(b) により，$\kappa_\nu = \nu$ となり，19.5 により，$U_\nu \subseteq \mathcal{C}_\nu \cap M_\nu$ である．U_ν は $\mathcal{P}(\nu)\cap M_\nu$ の超フィルターだから，このことから $U_\nu = \mathcal{C}_\nu \cap M_\nu$ が分かる．$\langle M_\nu, \in, \mathcal{C}_\nu \cap M_\nu\rangle$ は 3.3.(b) での σ_1 を満たすから，補題の主張が示せる．　$\dashv$

20.7 系　(Kunen [68, 70])．κ-モデルが存在するとして，ν は κ^+ より大きな正則基数とする．このとき，$\overline{\mathcal{C}}_\nu = \mathcal{C}_\nu \cap L[\mathcal{C}_\nu]$ とおくと，$\langle L[\overline{\mathcal{C}_\nu}], \in, \overline{\mathcal{C}}_\nu\rangle$ は ν-モデルとなる．つまり，

$$\langle L[\overline{\mathcal{C}_\nu}], \in, \overline{\mathcal{C}}_\nu\rangle \models \overline{\mathcal{C}_\nu} \text{ は } \nu \text{ 上の正規超フィルター}$$

となる．

証明　$\langle L[U], \in, U\rangle$ を κ-モデルとする．20.5 により，$\langle L[U], \in, U\rangle$ は反復可能で，20.2(a) により，$\kappa^+ \geq |{}^\kappa\kappa \cap L[U]|$ である．したがって，20.6 により $L[\mathcal{C}_\nu] = L[\overline{\mathcal{C}_\nu}]$ は $L[U]$ の ν 番目の反復子となる．　$\dashv$

このように，ZFC で定義可能なフィルターで相対化した構成可能集合をとることにより内的な可測性が得られるわけである！ このクーネンによる強烈な洞察は内部モデルで繰り返し現れるテーマとなり，ウラムによる可測性の概念をさらに密接に集合論に結びつけることになる．

次の結果は主要な技術的な補題であり，これから諸々の構造定理が導かれる．M と N をプリマウスとして，

$$\langle M, \in, U\rangle \text{ と } \langle N, \in, W\rangle \text{ は \textbf{比較可能}} \quad \Leftrightarrow \quad U = W \cap M \text{ または } W = U \cap N$$

とする．つまり，ある F に対し，$U = F \cap M$ かつ $W = F \cap N$ で，ある ζ と η に対し，$M = L_\zeta[F]$ $N = L_\eta[F]$ となっており，M と N は同一の相対的構成可能集合の階層の始片となっている，ということである．もちろん M と N が共に内部モデルであるときには，$M = N$ となる．次の 20.6 からの直接の帰結は，ZFC$^-$ **プリマウスの比較の補題**である．

20.8 補題 $\langle M, \in, U\rangle$ と $\langle N, \in, W\rangle$ を反復可能なプリマウスとする．このとき，$\langle M, \in, U\rangle$ の反復子と $\langle N, \in, W\rangle$ の反復子で比較可能なものが存在する． ⊣

定義可能性に関して，もう一つの結果が準備として必要になる．3.3(b) の $\mathcal{L}_\in(\dot{A})$ の論理式 $\varphi_1(v_0, v_1)$ は任意の $\langle L[A], \in, A \cap L[A]\rangle$ に対し $L[A]$ の整列順序 $<_{L[A]}$ を，任意の $\delta > \omega$ と $x, y \in L_\delta[A]$ に対し，

$$x <_{L[A]} y \quad \Leftrightarrow \quad \langle L_\delta[A], \in, A \cap L_\delta[A]\rangle \models \varphi_1[x, y]$$

となるものとして定義したのだった．9.3 の後での議論を思い出すと，任意の $\mathcal{L}_\in(\dot{A})$ の論理 $\varphi(v_0, \ldots, v_m)$ に対し，v_0 が存在するときには，それを例示する元で φ_1 に関して最小のものを選ぶ φ の**標準的スコーレム項** t_φ が定義できる．したがって，すべての極限順序数 $\delta > \omega$ と $X \subseteq L_\delta[A]$ に対し，X の $\langle L_\delta[A], \in, A \cap L_\delta[A]\rangle$ でのスコーレム閉包が，これの領域を

$$\{t_\varphi^{\langle L_\delta[A], \in, A \cap L_\delta[A]\rangle}(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi \text{ は } \mathcal{L}_\in(\dot{A}) \text{ の論理式 } \wedge\ x_1, \ldots, x_n \in X\}$$

として，一意に定義できる．これは，$\{x\}$ が $\langle L_\delta[A], \in, A \cap L_\delta[A]\rangle$ 上で X からのパラメタを用いて定義可能な $x \in L_\delta[A]$ の全体と一致する．

この節では**スコーレム項**とはこれらの t_φ を意味することにする．

20.9 補題 $\langle L[U], \in, U\rangle$ を κ-モデルとして，$B \subseteq \mathrm{On}$ を $|B| \geq \kappa^+$ となるものとし，δ は極限順序数で，$B \subseteq L_\delta[U]$ となるものとする．このとき，$\mathcal{P}(\kappa) \cap L[U]$ は $\kappa \cup B$ の $\langle L_\delta[U], \in, U\rangle$ でのスコーレム閉包の部分集合になり，したがって任意の $X \in \mathcal{P}(\kappa) \cap L[U]$ に対し，あるスコーレム項 t と，$\xi_1, \ldots, \xi_m \in \kappa$ と $\eta_1, \ldots, \eta_n \in B$ によって

$$X = t^{\langle L_\delta[U], \in, U\rangle}(\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_n)$$

となるようにできる．

証明 $\langle H, \in, U \cap H\rangle$ を上のようなスコーレム閉包として，$\langle N, \in, W\rangle$ をその推移的崩壊とし，π を崩壊の同型写像とする．このとき，すべての $\alpha < \kappa$ に対し $\pi(\alpha) = \alpha$ となる．したがって，すべての $X \in \mathcal{P}(\kappa) \cap H$ に対し，$\pi(X) = X$ である．よって，$W = U \cap N$ となることが分かるから，3.3(b) の文 σ_1 を用いると，ある ζ に対し $N = L_\zeta[U]$ となる．$|B| \geq \kappa^+$ だから，$\zeta \geq \kappa^+$ である．したがって，20.2(a) の証明により，$\mathcal{P}(\kappa) \cap L[U] \subseteq N$ となる．よって，π は κ の部分集合を動かさないことから，$\mathcal{P}(\kappa) \cap L[U] \subseteq H$ が言える． ⊣

主要な諸結果

これで κ-モデルに関する諸々の主要な構造定理の証明の準備ができた.

20.10 定理　(Kunen [68, 70]). $\langle L[U], \in, U\rangle$ と $\langle L[W], \in, W\rangle$ を両方とも κ-モデルとする. このとき, $U = W$ となり, したがって, $L[U] = L[W]$ である.

証明　20.5 により, $\langle L[U], \in, U\rangle$ も $\langle L[W], \in, W\rangle$ も反復可能である. したがって, 20.8 により, これらの比較可能な反復子が存在するが, $L[U]$ と $L[W]$ は内部モデルだから, これは共通の反復子 $\langle L[F], \in, F\rangle$ となることが分かる.

$$i \colon \langle L[U], \in, U\rangle \prec \langle L[F], \in, F\rangle \text{ および}$$
$$j \colon \langle L[W], \in, W\rangle \prec \langle L[F], \in, F\rangle$$

を対応する埋め込みとする. 19.7(c) により,

$$\{\theta > \kappa \mid \theta = |\theta| = i(\theta) = j(\theta)\}$$

は真のクラスとなるから, $B \cup \{\delta\}$ をこのクラスの元からなる集合で, $|B| = \kappa^+$ かつ $\delta > \sup(B)$ となるようなものとする.

任意の $X \in U$ に対し, 20.9 により, あるスコーレム項 t, および, ある $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \kappa$, $\eta_1, \ldots, \eta_n \in B$ により,

$$X = t^{\langle L_\delta[U], \in, U\rangle}(\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_n)$$

とできる.

$$Y = t^{\langle L_\delta[W], \in, W\rangle}(\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_n)$$

とおく. スコーレム項は定義可能だから, ここで現れるパラメタはすべて i と j で動かないことに注意すると,

$$i(X) = t^{\langle L_\delta[F], \in, F\rangle}(\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_n) = j(Y)$$

となることが分かる. $X \in U$ だから, $i(X) = j(Y) \in F$ となり, したがって $Y \in W$ となる. ところがまた

$$X = i(X) \cap \kappa = i(Y) \cap \kappa = Y$$

である. この議論により, $U \subseteq W$ が分かるが, U と W を入れかえて議論することで, 逆も同様に示せる. ⊣

20.11 系　$\langle L[U], \in, U\rangle$ が κ-モデルなら, U は $L[U]$ で唯一の κ 上の正規超フィルターとなる.

証明　W を $L[U]$ での κ 上の正規超フィルターとする. $\overline{W} = W \cap L[W]$ とすると $L[\overline{W}]$ は κ-モデルとなる. したがって $\overline{W} = U$ となるが, W は $L[U]$ で超フィルターだから, $W = U$ となっていることが分かる. ⊣

したがって, κ-モデル $\langle L[U], \in, U\rangle$ が存在するときには, これは一意に決まり, 20.2(b)

により，この κ は $L[U]$ で唯一の可測基数で，U は $L[U]$ で唯一の κ 上の正規超フィルターである．この最後の命題は，可能な数のうちで最大の 2^{2^κ} 個の正規超フィルターが存在することの無矛盾性 (17.8) と対照的なものとなる（正規超フィルターの数の可能な値については，22.13 の前でさらに議論される）．

次の定理は，異なる κ に対する κ-モデルはすべて $\bar{\kappa}$-モデルの反復により得られるとを示している．ここに $\bar{\kappa}$ は κ-モデルの存在するような κ のうち最小のものである．したがって，異なる κ に対する κ-モデルは，すべてこの $\bar{\kappa}$-モデルの定義可能な部分クラスとなり，互いに初等的同値になる．

20.12 定理 (Kunen [70]). $\langle L[U], \in, U\rangle$ を κ-モデルとして，$\langle L[W], \in, W\rangle$ を，$\kappa < \lambda$ となる λ に対して λ-モデルとなっているとする．このとき，$\langle L[W], \in, W\rangle$ は $\langle L[U], \in, U\rangle$ の反復子となる．特に，$L[W] \subseteq L[U]$ で，$\langle L[W], \in, W\rangle$ は $\langle L[U], \in, U\rangle$ で λ から定義可能となる．

証明 $\langle L[U_\alpha], U_\alpha, \kappa_\alpha, i_{\alpha\beta}\rangle_{\alpha\le\beta\in\mathrm{On}}$ を $\langle L[U], \in, U\rangle$ の反復とする．特に各 $\langle L[U_\alpha], \in, U_\alpha\rangle$ は $\langle L[U], \in, U\rangle$ で定義可能である．κ_α, $\alpha \in \mathrm{On}$ は閉非有界な順序数のクラスをなすから，$\kappa_\beta \le \lambda < \kappa_{\beta+1}$ となる β が一意に決まる．$\kappa_\beta = \lambda$ なら 20.10 により証明は完了する．したがって，$\kappa_\beta < \lambda < \kappa_{\beta+1}$ と仮定して，矛盾を導く：

$\langle L[F], \in, F\rangle$ を $\langle L[U], \in, U\rangle$ と $\langle L[W], \in, W\rangle$ の共通の反復子として，

$$i\colon \langle L[U], \in, U\rangle \prec \langle L[F], \in, F\rangle\,,$$
$$j\colon \langle L[W], \in, W\rangle \prec \langle L[F], \in, F\rangle$$

を対応する埋め込みとする．したがって，ある $\gamma > \beta$ に対し，$i = i_{0\gamma}$ となっている．20.10 でと同じように議論して，$B \cup \{\delta\}$ を $i_{\beta\gamma}$ でも j でも動かないような λ より大きな基数からなる集合で，$|B| = \kappa_\beta^+$ かつ $\delta > \sup(B)$ となるものとする．

5.13(a) により，$f \in {}^{\kappa_\beta}\kappa_\beta \cap L[U_\beta]$ で $\lambda = i_{\beta,\beta+1}(f)(\kappa_\beta)$ となるものがある．20.9 により，スコーレム項 t と，$\xi_1, \ldots, \xi_m \in \kappa_\beta$ および，$\eta_1, \ldots, \eta_n \in B$ により，

$$f = t^{\langle L_\delta[U_\beta], \in, U_\beta\rangle}(\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_n)$$

とできる．したがって，あるスコーレム項 u により，

$$\lambda = i_{\beta,\beta+1}(f)(\kappa_\beta) = u^{\langle L_\delta[U_{\beta+1}], \in, U_{\beta+1}\rangle}(\xi_1, \ldots, \xi_m, \kappa_\beta, \eta_1, \ldots, \eta_n)$$

となる．スコーレム項の定義可能性から，$\lambda < \kappa_{\beta+1}$ で，すべてのパラメタと λ は $i_{\beta+1,\gamma}$ で動かないから，

$$\lambda = u^{\langle L_\delta[F], \in, F\rangle}(\xi_1, \ldots, \xi_m, \kappa_\beta, \eta_1, \ldots, \eta_n)$$

となる．ところが，$\kappa_\beta < \lambda$ だからこの表現の右辺は同様に

$$j(u^{\langle L_\delta[W], \in, W\rangle}(\xi_1, \ldots, \xi_m, \kappa_\beta, \eta_1, \ldots, \eta_n))$$

とも等しくなる．したがって，$\lambda \in \mathrm{ran}(j)$ となるが，これは $\lambda = \mathrm{crit}(j)$ に矛盾である．⊣

これらの結果は正規超フィルターであることを強調するものとなっているが，クーネンは，任意の κ 上の κ-完備超フィルターに相対的な構成的集合をとったときにも κ-モデルが得られることを示している．これは次の技術的な結果から得られる：

20.13 演習　(Kunen [70]). W を $\kappa > \omega$ 上の任意の κ-完備超フィルターとして，$j\colon V \prec M_W \cong \mathrm{Ult}(V, W)$ とする．$\langle L[U], \in, U\rangle$ を κ-モデルとして，$\langle L[U_\alpha], U_\alpha, \kappa_\alpha, i_{\alpha\beta}\rangle_{\alpha\leq\beta\in\mathrm{On}}$ をその反復とするとき，j と $i_{0\beta}$ が $\mathcal{P}(\kappa)\cap L[U]$ 上で一致するような β が存在する．

ヒント　$L[j(U)]^{M_W} = L[j(U)]$ は $j(\kappa)$-モデルだから，20.12 により，$\kappa_\beta = j(\kappa)$ かつ $U_\beta = j(U)$ となるような β が存在する．20.9 をうまく応用して，この β が求めるものであることを示せばよい．　⊣

20.14 系　上の仮定のもとで，$L[W] = L[U]$ が成り立つ．

証明　κ は $L[W]$ で可測基数だから，$L[W]$ の部分クラスとなる κ-モデルが存在する．したがって，20.10 により，$L[U] \subseteq L[W]$ である．反対方向の証明には，$W \cap L[U] \in L[U]$ を示せばよい．これから，3.2(b) により，$L[U] \supseteq L[W \cap L[U]] = L[W]$ が言えるからである．このために，$\rho = [\mathrm{id}]_W$ とする．ここに $\mathrm{id}\colon \kappa \to \kappa$ は恒等写像である．したがって，すべての $X \subseteq \kappa$ に対し，$X \in W \iff \rho \in j(X)$ となる．20.13 を用いて

$$\begin{aligned} W \cap L[U] &= \{X \in \mathcal{P}(\kappa)\cap L[U] \mid \rho \in j(X)\} \\ &= \{X \in \mathcal{P}(\kappa)\cap L[U] \mid \rho \in i_{0\beta}(X)\} \end{aligned}$$

となるが，$i_{0\beta}$ は $\langle L[U], \in, U\rangle$ で定義可能だから，これは $L[U]$ の元となる．　⊣

κ-モデルでの κ 上の κ-完備超フィルターの記述を得るために，次で超フィルターの構造理論の基礎を考察する．これについては第 II 巻でさらに議論される：

S と T を集合として $f\colon S \to T$ とし，D は S 上の超フィルターとする．このとき

$$f_*(D) = \{Y \subseteq T \mid f^{-1}(Y) \in D\}$$

とする．単項フィルターも許すことにすれば，$f_*(D)$ は常に T 上の超フィルターとなることが容易に確かめられ，これは D の f による自然な射影と考えられる．$X \in D$ なら $f``X \in f_*(D)$ となることに注意する．さらに E が T 上の超フィルターのとき，

D と E は**同値**　$\iff$　全単射 $f\colon S \to T$ で $E = f_*(D)$ となるものが存在する

とする．したがって，同値な超フィルターは，そのベースとなっている集合の元の呼びかえを除いて同一なものである．次はよく知られている：

20.15 命題　D を S 上の超フィルターとして $f\colon S \to T$ とする．このとき

(a) $g\colon S \to T$ で $\{i \in S \mid f(i) = g(i)\} \in D$ なら，$g_*(D) = f_*(D)$ となる．

(b) $h\colon S \to S$ で，$h_*(D) = D$ なら，$\{i \in S \mid h(i) = i\} \in D$ となる．

(c) E を T 上の超フィルターとして，$|T| = |S|$, $f_*(D) = E$ かつ，$g_*(E) = D$ となる $g\colon T \to S$ があるとする．このとき，D と E は同値である．

証明 (a) は明らかである．

(b) $<$ を S 上の任意の線型順序とする．$\{i \in S \mid h(i) > i\} \in D$ だったとして矛盾を導く；$<$ の場合も同様である．(a) により，$h(i) > i$ がすべての $i \in S$ に対し成り立っているとしてよい．$h^0(i) = i$ として，$n \in \omega$ に対し $h^{n+1}(i) = h(h^n(i))$ とする．S 上の関係 $\sim$ を

$$i \sim j \quad \Leftrightarrow \quad \exists m \exists n (h^m(i) = h^n(j))$$

で定義する．$\sim$ が同値関係になることは容易に確かめられるから，各々の同値類の代表元を固定しておく．$S_0 \subseteq S$ を，$i \in S$ で，r が i の同値類の代表元で，$h^m(i) = h^n(r)$ なら，$|m-n|$ が偶数になるようなものとする（h に対する仮定から，これは m と n に依存しないものとなっていることに注意する）．$S_1 = S - S_0$ とおく．このとき $e < 2$ で $S_e \in D$ となるものがとれる．したがって，$h``S_e \in h_*(D) = D$ となるが，$h``S_e \subseteq S_{1-e}$ となることが容易に分かるから，$S_e \cap h``S_e = \emptyset \in D$ となり矛盾である．

(c) $(g \circ f)_*(D) = D$ だから，(b) により，$\{i \in S \mid g(f(i)) = i\} \in D$ となり，f はこの集合上で単射である．$|S| = |T|$ だから，全単射 $\overline{f}$: $S \to T$ で $\{i \in S \mid f(i) = \overline{f}(i)\} \in D$ となるものがある．したがって (a) により証明が完了する． ⊣

$\langle L[U], \in, U \rangle$ を κ-モデルとすると，$L[U]$ で U は唯一の κ 上の正規超フィルターとなり，U から $n \in \omega$ に対し，超フィルターの積 U^n が $[\kappa]^n$ 上の超フィルターとして（19.7 の後でのように）定義された．以下の (b) は，$L[U]$ で，κ 上の κ-完備超フィルターはすべて本質的にはこのようなもののみであることを主張している．

20.16 定理 (Kunen [70]; (a) については，Paris [69] でも結果が得られている)．$V = L[U]$ で $\langle L[U], \in, U \rangle$ は κ-モデルとし，$\langle L[U_\alpha], U_\alpha, \kappa_\alpha, i_{\alpha\beta} \rangle_{\alpha \le \beta \in \mathrm{On}}$ をこの反復とする．W を κ 上の任意の κ-完備超フィルターとするとき：

(a) ある $\rho < \kappa_\omega$ に対し，$W = \{X \subseteq \kappa \mid \rho \in i_{0\omega}(X)\}$ となる．

(b) ある $0 < n \in \omega$ に対し W は U^n と同値になる．

証明 $V = L[U]$ から，20.13 でのような β は有限となる：20.14 により，$V = L[W]$ となり，$j(\kappa)$-モデルの一意性から，$M_W = L[j(W)] = L[j(U)] = L[U_\beta]$ となる．もし $\beta \ge \omega$ だったとすれば，κ_ω は $L[U_\omega]$ で可測基数で，$\mathcal{P}(\kappa_\omega) \cap L[U_\omega] = \mathcal{P}(\kappa_\omega) \cap L[U_\beta]$ だから，κ_ω は $L[U_\beta]$ で到達不可能基数となる．ところが，M_W は 5.7(d) により，すべての順序数の可算列を含むから，ここで κ_ω の共終数は ω となる．これは矛盾である．したがって，ある $0 < n \in \omega$ に対し $\beta = n$ となっていることが分かった．

ここで，すべての $\rho < j(\kappa) = i_{0n}(\kappa)$ に対し，$i_{n\omega}(\rho) = \rho$ となるから，(a) は 20.14 の証明を用いて示せる．

(b) については，e_n: $V \prec M_{U^n} \cong {}^{[\kappa]^n}V/U^n$ とすると，19.9(b) により，$M_{U^n} = L[U_n]$ で，$e_n = i_{0n}$ となる．id: $\kappa \to \kappa$ と $\overline{\mathrm{id}}$: $[\kappa]^n \to [\kappa]^n$ をそれぞれの定義域上の恒等写像として，f: $\kappa \to [\kappa]^n$ と g: $[\kappa]^n \to \kappa$ を $[f]_W = [\overline{\mathrm{id}}]_{U^n}$ かつ $[g]_{U^n} = [\mathrm{id}]_W$ となるようにとる．j と e_n は $\mathcal{P}(\kappa)$ 上で一致するから，$\mathcal{P}([\kappa]^n)$ でも一致する．したがって，任意の $X \subseteq [\kappa]^n$ に対し，

$$
\begin{aligned}
X \in U^n \quad &\Leftrightarrow \quad [\overline{\mathrm{id}}]_{U^n} \in e_n(X) \\
&\Leftrightarrow \quad [f]_W \in j(X) \\
&\Leftrightarrow \quad f^{-1}(X) \in W
\end{aligned}
$$

となる．したがって，$f_*(W) = U^n$ である．同様にして $g_*(U^n) = W$ も示せるから，20.15(c) により証明が完了する． ⊣

次の目標は $L[U]$ の実数の全体に対し Δ^1_3 整列順序が存在するというシルバーの結果である．証明にはプリマウスを用いるが，動機付けのために，まず GCH に関する結果 20.3 のシルバーによる別証を与える．この証明は，もっと強い仮定の内部モデルに対するものに一般化できるという長所を持つものとなっている．

20.3 の二番目の証明　前と同じように，$\lambda < \kappa$ とするとき，任意の $y \in \mathcal{P}(\lambda) \cap L[U]$ に対し

$$|\{x \in \mathcal{P}(\lambda) \cap L[U] \mid x <_{L[U]} y\}| \;\leq\; \lambda$$

となることを示す．そこで，$y \in \mathcal{P}(\lambda) \cap L[U]$ として，$x \in \mathcal{P}(\lambda) \cap L[U]$ を $x <_{L[U]} y$ となるものとする．つまり，3.3(b) でのような $\varphi_1(v_0, v_1)$ に対し，$\langle L[U], \in, U\rangle \models \varphi_1[x, y]$ となっているとする．このとき：

(∗)　$\langle N, \in, W\rangle$ をある $\nu > \lambda$ での反復可能なプリマウスとして $y \in N$ とするとき，$x \in N$ となる

ことが示せる：20.8 により，$\langle L[F], \in, F\rangle$ と $\langle L_\zeta[F], \in, F \cap L_\zeta[F]\rangle$ をそれぞれ $\langle L[U], \in, U\rangle$ と $\langle N, \in, W\rangle$ の反復子で比較可能なものとする．このとき，19.4(b) により，$y \in V_\nu \cap N = V_\nu \cap L_\zeta[F]$ である．$\lambda < \kappa$ だったことを思い出すと，初等的埋め込みにより，$\langle L[F], \in, F\rangle \models \varphi_1[x, y]$ となっているから，3.3(b) により $y \in L_\zeta[F]$ から $x \in L_\zeta[F]$ が導かれる（ここで，次の定理のために，再び初等的埋め込から $\langle N, \in, W\rangle \models \varphi_1[x, y]$ となっていることに注意しておく）．

(∗) により，ある $\nu > \lambda$ での反復可能なプリマウス $\langle N, \in, W\rangle$ で $|N| \leq \lambda$ となるものが見つかれば定理が証明されるが，これは容易である：θ を $y, U \in L_\theta[U]$ となるように十分に大きくとる．19.16 での絶対性を $S = L[U]$ に適用すると，$\langle L_\theta[U], \in, U\rangle$ が反復可能なプリマウスであることが分かる．$\lambda \cup \{y\}$ の $\langle L_\theta[U], \in, U\rangle$ でのスコーレム閉包の推移的崩壊をとれば，これが求めるようなプリマウスとなっている．反復可能性は 19.15(e) から帰結できる． ⊣

次のいくつかの結果は κ-モデルでの実数の集合に関するものである．この集合が κ からさえも独立であることは，核モデル（第 II 巻を参照）の到来を示唆するものであったが，この事実は，上の議論を簡略化した，20.12 のみに依存する議論により得られる：

20.17 演習　ある κ と λ に対し，$\langle L[U], \in, U\rangle$ を κ-モデル，$\langle L[W], \in, W\rangle$ を λ-モデルとする．このとき，

$${}^\omega\omega \cap L[U] = {}^\omega\omega \cap L[W] \quad \text{かつ} \quad {}^2({}^\omega\omega) \cap <_{L[U]} = {}^2({}^\omega\omega) \cap <_{L[W]}$$

となる． ⊣

これらの集合を考えるときには，$L[U]$ は特定の選択に依存しないから そのようなときには，“$L[U]$” は包括的な意味で用いることにする．13.8 の前により，任意の $z \in {}^{\omega}\omega$ は二項関係 $E_z = \{\langle m,n\rangle \mid z(\langle m,n\rangle) = 0\}$ をコードしており，したがって，集合論の言語 $\mathcal{L}_{\in}$ の構造 $M_z = \langle \omega, E_z\rangle$ をコードすることになることを思い出そう．$A_z = \{n \mid z(n) = 1\}$ と定義することにより，z は拡張された言語構造 $\mathcal{L}_{\in}(\dot{A})$ の構造

$$N_z = \langle \omega, E_z, A_z\rangle$$

もコードしているとみなせる．前と同じように，N_z が整順的かつ外延的なら，これの推移的崩壊 $\mathrm{tr}(N_z)$ と同型写像 π_z: $N_z \to \mathrm{tr}(N_z)$ が存在する．

次の結果は，L に対するゲーデルの結果 13.9 と類似のものである：

20.18 定理 (Silver [71b]). ${}^2({}^{\omega}\omega) \cap L[U]$ かつ，${}^2({}^{\omega}\omega) \cap <_{L[U]}$ はともに Σ^1_3 である．

証明 整列順序を直接扱うことにして，任意の $x, y \in {}^{\omega}\omega \cap L[U]$ に対し，

(**) $x <_{L[U]} y \Leftrightarrow$ 可算な反復可能なプリマウス $\langle N, \in, W\rangle$ で，$x, y \in N$ かつ $\langle N, \in, W\rangle \models \varphi_1[x,y]$ となるものが存在する

ことが言える．これは，20.16 での (*) に関する議論と 20.16 の終わりのスコーレム閉包による議論からでる．あとは，これが Σ^1_3 の記述を与えていることをチェックすればよい：

3.3(b) と 13.8(a)(c) を用いると，

$$Z = \{z \in {}^{\omega}\omega \mid N_z \text{ は整順的かつ外延的 } \wedge\ \mathrm{tr}(N_z) \text{ はプリマウス}\}$$

は Π^1_1 であることが分かる．したがって，$(z \in Z \wedge \mathrm{tr}(N_z)$ は反復可能$)$ が Π^1_2 であることがわかれば，(**) は $\exists z(\Pi^1_2)$ という形に表現できるから，証明が完了する．

19.15(b) により，プリマウスが反復可能なのは，その反復が ω_1 以上の長さを持つ，ちょうどそのときである．14.11 での $0^{\#}$ の分析を思い出すと，このことは，可算な整列順序のコードを用いて表現することができる．まず，$\prec^-$ を 19.3 の前でのようにとり，$R \subseteq {}^3({}^{\omega}\omega)$ を，$R(a,b,z)$ となるのは，

(i) $E_a = \{\langle m,n\rangle \mid a(\langle m,n\rangle) = 0\}$ は ω 上の整列順序で，

(ii) b はある集合 $\{z^b_n \mid n \in \omega\} \subseteq Z$ と $\langle m,n\rangle \in E_a$ に対する i_{mn}: $\mathrm{tr}(N_{z^b_m}) \prec^- \mathrm{tr}(N_{z^b_n})$ をコードしており，

(iii) n が E_a に関して最小なら，$z^b_n = z$ となり，

(iv) n が E_a に関して m の直後の元となっているなら，$\mathrm{tr}(N_{z^b_n})$ は $\mathrm{tr}(N_{z^b_m})$ の超巾で，i_{mn} は対応する埋め込みとなっている．また

(v) n が E_a の極限点なら，$\mathrm{tr}(N_{z^b_n})$ は対応する構造と埋め込みの系の極限となっており，$\langle m,n\rangle \in E_a$ となる m に対し，i_{mn} はこの順極限への対応する埋め込みとなる，

として定義する．

Z は Π^1_1 で N_{z_n} での充足関係は Δ^1_1 だから（13.8(b)(c) を参照），R が Π^1_1 となることをチェックするのは手間はかかるが，素直にやればできる．

次に，$S \subseteq {}^2({}^{\omega}\omega)$ を，$S(a,b)$ となるのは，

上の (i), (ii), (iv) および (v) が成り立ち，

(vi) E_a が最大元 n を持つなら，$\mathrm{tr}(N_{z_n})$ の超巾は整順的となり，

(vii) E_a が最大元を持たないなら，b でコードされる構造と埋め込みの系の順極限は整順的

となることとして定義する．このとき S も Π^1_1 となる．

ここで，

$$(z \in Z \ \wedge\ \mathrm{tr}(N_z)\ \text{は反復可能}) \quad \Leftrightarrow \quad z \in Z \ \wedge\ \forall^1 a \forall^1 b(R(a,b,z) \to S(a,b)) ,$$

となるが，これは $\Pi^1_1 \wedge \forall^1 a \forall^1 b(\Pi^1_1 \to \Pi^1_1)$ という形をしており，したがって，Π^1_2 である．
⊣

20.19 系　${}^\omega\omega \subseteq L[U]$ なら，${}^2({}^\omega\omega) \cap <_{L[U]}$ は Δ^1_3 集合となり，これはルベーグ可測ではなく，ベールの性質も持たない．

証明　13.10 と同様．　⊣

L での場合と同じように（13.11 を参照），20.19 はさらに改良することができて，そこでの言い回しで言うと，$L[U]$ で ${}^2({}^\omega\omega) \cap <_{L[U]}$ は Σ^1_3-善良な整列順序となる：

20.20 演習　(Silver [71b: 440]).

$$\mathrm{IS}_{L[U]}(x,y) \ \leftrightarrow\ \{(x)_i \mid i \in \omega\} = \{z \in {}^\omega\omega \mid z <_{L[U]} y\}$$

で与えられる関係 $\mathrm{IS}_{L[U]} \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ は Σ^1_3 である．　⊣

完全集合の性質については，13.12 の L での議論を適用することができる．このために，まず，反復可能なプリマウスには次のような自然な順序が定義できることに注意する：

$$\begin{aligned}\langle M,\in,U\rangle <_{\mathrm{ip}} \langle N,\in,W\rangle \ \Leftrightarrow\ & \langle L_\zeta[F],\in,F\cap L_\zeta[F]\rangle\ \text{は}\ \langle M,\in,U\rangle\ \text{の反復子で} \\ & \langle L_\eta[F],\in,F\cap L_\eta[F]\rangle\ \text{は}\ \langle N,\in,W\rangle\ \text{の反復子と} \\ & \text{なっているような}\ \zeta<\eta\ \text{が存在する}.\end{aligned}$$

比較の補題 20.8 を用いて $<_{\mathrm{ip}}$ が反復可能な集合のプリマウスの整列順序となっていることは容易に証明できる．次に，このような $\langle M,\in,U\rangle$ と $\langle N,\in,W\rangle$ で可算なものは，可算な反復子で比較可能なものを持つことを示す：

$$\begin{aligned}&\langle M_\alpha, U_\alpha, \kappa_\alpha, i_{\alpha\beta}\rangle_{\alpha\le\beta\in\mathrm{On}}\ \text{は}\ \langle M,\in,U\rangle\ \text{の反復で} \\ &\langle N_\alpha, W_\alpha, \lambda_\alpha, j_{\alpha\beta}\rangle_{\alpha\le\beta\in\mathrm{On}}\ \text{は}\ \langle N,\in,W\rangle\ \text{の反復}\end{aligned}$$

であるとする．19.7(c) により $\kappa_{\omega_1} = \omega_1 = \lambda_{\omega_1}$ だから，$\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ と $\{\lambda_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ はともに ω_1 で閉非有界である，ということに注意して，$\langle \gamma_n \mid n \in \omega\rangle$ をこれらの共通部分の中の順序数の上昇列とし，$\gamma = \sup(\{\gamma_n \mid n \in \omega\})$ とおく．このとき，ある $\alpha, \beta < \omega_1$ に対し，$\gamma = \kappa_\alpha = \lambda_\beta$ となり，$\langle \gamma_n \mid n \in \omega\rangle$ から生成されたフィルター F がとれて（つまり，$X \in F \ \Leftrightarrow\ \exists m \in \omega(\{\gamma_n \mid m \le n \in \omega\} \subseteq X \subseteq \gamma))$ とする），ある ζ と η に対し，

$$\langle M_\alpha, \in, U_\alpha\rangle = \langle L_\zeta[F], \in, F\cap L_\zeta[F]\rangle,$$
$$\langle N_\beta, \in, W_\beta\rangle = \langle L_\eta[F], \in, F\cap L_\eta[F]\rangle$$

となる．

20.21 定理 (Silver [71b: 440]; Solovay). $\omega_1^{L[U]} = \omega_1$ なら，Π^1_2 集合で完全集合の性質を持たないものが存在する．

証明 13.12での論法を用いて，$\omega_1^{L[U]}$ 未満の順序数 α に対し，一意に決まるコードを与える Π^1_2 集合を定義する，というのが証明のアイデアである．このような順序数 α に対しては $M_{x_0} = \langle\omega, E_{x_0}\rangle$ が順序型 α の整列集合になるような $x_0 \in {}^\omega\omega\cap L[U]$ がとれる．このような x_0 のうち $<_{L[U]}$ に関して最小のものをとることは，Π^1_2 にはならない，しかし，ある $x_1 \in {}^\omega\omega\cap L[U]$ に対し，$N_{x_1} \cong \langle N, \in, W\rangle$ となり後者は可算で反復可能なプリマウスで，ある $x_0 \in N$ が上のようなもののうち $<_{L[U]}|(N\times N)$ に関し最小なものになっている，という性質を持つもののうち $<_{\mathrm{ip}}$ に関し最小になっている．という命題は Π^1_2 であることが分かる．このような x_1 のうち $<_{L[U]}$ で最小のものを同定することは Π^1_2 ではできないが，同様にある N_{x_2} を用いて行うことができる，等々．これを続けてゆくことで得られる $\langle x_i \mid i\in\omega\rangle$ を α の一意に決まるコードとして用いることができる．

任意の $x, y \in {}^\omega\omega$ に対し，$\mathrm{tr}(N_y)$ が（定義されている場合には）x を含むような反復可能なプリマウスのうち $<_{\mathrm{ip}}$ に関し最小のものになっている，という主張は，この定理の前での注意により，$\forall^1 z\big(\mathrm{tr}(N_z)$ は定義されており，これはプリマウスで，その可算な反復子で $\mathrm{tr}(N_y)$ の可算な反復子の真の始片と同型になるものが存在する $\to x\notin \mathrm{tr}(N_z)\big)$ ということとして，表せる．上の含意の前提は，$\mathrm{tr}(N_z)$ が反復可能であることを帰結することに注意する．

13.12の証明での関係 A を思い出して，20.18の証明で用いた Π^1_1 集合 Z と R を用いると，${}^\omega\omega$ 上の次の関係を考えることができる：

$$\begin{aligned}
A(x) \quad\leftrightarrow\quad & M_{(x)_0} \text{ は整列集合 } \wedge\ \forall^0 i[(x)_{i+1}\in Z\\
& \wedge\ \mathrm{tr}(N_{(x)_{i+1}}) \text{ は反復可能 } \wedge\ (x)_i \in \mathrm{tr}(N_{(x)_{i+1}})\\
& \wedge\ \forall^1 z\forall^1 a\forall^1 b\forall^1 c\forall^1 d[z\in Z\ \wedge\ R(a,b,z)\ \wedge\ R(c,d,(x)_{i+1})\\
& \wedge\ m \text{ は } E_a \text{ の極大元 } \wedge\ n \text{ は } E_c \text{ の極大元}\\
& \wedge\ \exists^1 f(f \text{ は } N_{z^b_m} \text{ から } N_{z^d_n} \text{ の真の始片への同型写像を}\\
& \text{コードする}) \to\ (x)_i \notin\ \mathrm{tr}(N_{z^d_n})]\\
& \wedge\ \forall^1 y\forall^0 p\forall^0 q[\pi_{(x)_{i+1}}(p) = y\ \wedge\ \pi_{(x)_{i+1}}(q) = (x)_i\\
& \wedge\ (N_{(x)_{i+1}} \models \varphi_1[p,q]\ \to\ (i=0\ \to\ M_y \ncong M_{(x)_0})\\
& \wedge\ (i>0\ \to\ N_y \ncong N_{(x)_i}))]]
\end{aligned}$$

ここに，$\varphi_1(v_0, v_1)$ は3.3(b)での整列順序の論理式である．ここで，もとに戻り13.13の議論をなぞると，A が濃度 $|\omega_1^{L[U]}|$ の Π^1_2 集合であり，A が完全な部分集合を持たないことは容易に確かめられる（実は非可算な $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 部分集合を持たない）． ⊣

これらの結果は射影的階層で最良のものとなっている．可測基数が存在するときには，す

べての Σ^1_2 集合はルベーグ可測で，ベールの性質と完全集合の性質を持つこと (14.3, 14.10) がソロヴェイによって示されているからである．シルバーは，この結果にも触発されたわけだが，彼の結果は Δ^1_3 での新しい分界を示している．さらに今度はこの結果から，より強力な巨大基数の，射影的階層でのさらに高いところでの正則性に同じように関係してくることの可能性の研究が触発されている．ゲーデルの連続体問題に対する期待 (§3) とは違う方向ではあったが，射影的階層というかなり具体的な対象を扱うことで，系統的な研究が可能になり，このことが1980年代後半の目ざましい成功を導いたのである（§32を参照）.

比較的大きな巨大基数に関するいくつかの結果を見てこの節を終えることにする．勿論，可測基数が存在する場合には，前出の反映に関する結果により，もっと小さな巨大基数も大量に存在することになる．そのようなもののうちジョンソン基数やローボトム基数 (§8) は，それらの無矛盾性の強さは強いのにこれらの基数自身はそれほど大きくないものであり得る (21.4) という意味で変則的であった．一方クーネンは κ-モデルではこれらの基数は見かけ上もっと強いラムズィー基数と一致することを示している．したがって，ZFC に可測基数の存在を加えた理論では，例えば，特異基数となるようなジョンソン基数の存在は証明できない．8.13 から示唆される明らかな制約について最初に述べておこう：

20.22 演習　$\langle L[U], \in, U\rangle$ を κ-モデルとして，ジョンソン基数 $\lambda > \kappa$ が存在するものとする．このとき，$V \neq L[U]$ となる．

ヒント　$L[U]$ での議論して，背理法により証明する．λ を κ より真に大きなジョンソン基数のうち最小のものとする．8.14(c) と 8.15(a)(b) により，$\kappa < \nu < \lambda$ となる正則基数 ν で $\lambda \to [\lambda]^{<\omega}_{\nu, <\nu}$ を満たすものがある．8.4(b) により，

$$\langle H, \in, U \cap H, \nu \cap H\rangle \prec \langle L_\lambda[U], \in, U, \nu\rangle$$

を $|H| = \lambda$, $\kappa + 1 \subseteq H$ かつ，$|\nu \cap H| < \nu$ となるようにとる．$\langle H, \in, U \cap H\rangle$ の推移的崩壊は再び $\langle L_\lambda[U], \in, U\rangle$ となるから，$i\colon \langle L_\lambda[U], \in, U\rangle \prec \langle L_\lambda[U], \in, U\rangle$ を崩壊の写像の逆写像とすれば，$\mathrm{crit}(i)$ は κ より大きな $L[U]$ での可測基数となってしまうが，これは矛盾である．　⊣

この結果は 21.23 でさらに拡張されることになる．

20.23 定理　(Kunen [70])．ある κ に対し，$\langle L[U], \in, U\rangle$ は κ-モデルになっているとする．このとき，

$$L[U] \models \forall\lambda(\lambda \text{ はジョンソン基数} \ \leftrightarrow\ \lambda \text{ はラムズィー基数})$$

が成り立つ．

証明　$L[U]$ で議論する．λ をジョンソン基数として，$f\colon [\lambda]^{<\omega} \to 2$ とする．$[\lambda]^\lambda$ の元で f に関し一様であるものが見つかればよい．まず，これを次のような付加的な条件のもとで証明する：

(∗)　$\delta < \lambda$ と $x \subseteq \delta$ で $f <_{L[U]} x$ となるものが存在する．

これのためには GCH の証明のときの議論を用いる：20.22 により $\lambda < \kappa$ となっていることに注意すると，ある $\rho > \delta$ での反復可能なプリマウス $\langle N, \in, W\rangle$ で $x \in N$ かつ $|N| = |\delta|$ となるようなものが存在する．このとき，$\langle N_\lambda, \in, W_\lambda\rangle$ を $\langle N, \in, W\rangle$ の λ 番目の反復子とし，$j_{0\lambda}$ を対応する埋め込みとすれば，$j_{0\lambda}(\rho) = \lambda$ で $x \in N_\lambda$ となる．比較の補題により，$\langle L[F], \in, F\rangle$ と $\langle L_\varsigma[F], \in, F \cap L_\varsigma[F]\rangle$ を，それぞれ $\langle L[U], \in, U\rangle$ と $\langle N_\lambda, \in, W_\lambda\rangle$ の比較可能な反復子とする．$f <_{L[U]} x$ だから，初等的埋め込みであることにより，$f <_{L[F]} x$ である．また，$\mathcal{P}(\lambda) \cap N_\lambda = \mathcal{P}(\lambda) \cap L_\varsigma[F]$ となるから，$x \in N_\lambda$ により，$f \in N_\lambda$ となる．ところが，λ は N_λ で可測基数だから，f は一様な集合を持つが，これが示したいことであった．

一般の場合の証明も同様の議論により得られる．まず，ある $\sigma > \lambda$ での反復可能なプリマウス $\langle M, \in, Y\rangle$ で $f \in M$ かつ $|M| = \lambda$ となるものがある．$g\colon \lambda \to M$ を全単射とする．λ はジョンソン基数だから，真の部分構造

$$\langle H, \in, Y \cap H, g|H, \{f\}\rangle \prec \langle M, \in, Y, g, \{f\}\rangle$$

で，$|H| = \lambda$ となるものがある．$\langle T, \in, Z, \overline{g}, \{\overline{f}\}\rangle$ をこの推移的崩壊として，

$$j\colon \langle T, \in, Z, \overline{g}, \{\overline{f}\}\rangle \prec \langle M, \in, Y, g, \{f\}\rangle$$

を崩壊の写像の逆写像とする．g により，$|H \cap \lambda| = \lambda$ だが，$H \cap \lambda \neq \lambda$ となっている．したがって $j(\lambda) = \lambda$ だが j は臨界点 $\delta < \lambda$ を持つ．このとき，いつものように，

$$\{X \in \mathcal{P}(\delta) \cap T \mid \delta \in j(X)\}$$

は $L[U]$ で δ の可測性を示すものとはなり得ないから，特にある，$x \in \mathcal{P}(\delta) - T$ が存在しなくてはならない．

明らかに，$\langle T, \in, Z\rangle$ は，λ での，反復可能なプリマウスで，$\overline{f} \in T$ となっている．したがって前出のものと同様な比較の補題の適用により，$\overline{f} <_{L[U]} x$ となることが分かる．最後に，(∗) での議論により，f に関し一様な $S \in [\lambda]^\lambda$ が存在するから，証明が完了した．⊣

クーネンは，Kunen [68] で彼の構造に関する結果をモデル $M = L[\langle U_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle]$ に拡張している．ここに，U_α，は M での，ある λ_α 上の超フィルターで，$\alpha < \beta < \gamma$ なら $\lambda_\alpha < \lambda_\beta$ となっており，$\gamma < \lambda_0$ であるという意味で，この列は短いものになっているとする．例えば，M では $U_\alpha, \alpha < \gamma$ は任意の基数上の正規超フィルターのすべてとなっていることが示されている．シルバーは Silver [71b] で M は GCH を満たすこと，また，実数の Δ^1_3 整列順序が存在することなどを示している．この最初の一般化のさらにはるか先で，ミッチェル，イェンセン，ドッドやその他の人々の手によって，内部モデルの理論は，洗練された集合論の一分野として発展をとげ，次第により強い仮定をとり込んでゆき，それらの無矛盾性に対する強固な論拠を提供することになる．

§21　埋め込み，$0^{\#}$ と $0^{\dagger}$

98.09.05(土) 最終校正結果の記入超巾の反復は個々の内部モデルだけでなはく，それら

の間の埋め込みを調べるときに有効となるテクニックである．このテクニックにより，クーネンは，$0^\#$ が存在するのは，初等的埋め込み $L \prec L$ が存在する，ちょうどそのときである，という $0^\#$ のエレガントな特徴付けを与えている．$0^\#$ の抽出は，可測基数の初等的埋め込みによる特徴付けとの類推から，クーネンの結果によって促進されたのであった．また，この結果は，内部モデル上の超越性をその**非剛性**，つまり，初等的埋め込み $M \prec M$ の存在によって表現するという明快なパラダイムを供することになった．可測性の内部モデルに対しては，ソロヴェイがすでに，L に対する $0^\#$ と同様な実数 $0^\dagger$ を抽出していた．$0^\dagger$ の存在は，すべての可測性の内部モデル上の超越性を示す標準的な原理で，やはり，このような内部モデルの非剛性によって特徴付けられる．この節では L の埋め込みを調べ，$0^\dagger$ の理論を子細に展開することにする．

次の定理は L の非剛性に関するクーネンの結果をいくつかの同値命題を通じて分析するものとなっている．厳密に言うと，$\exists j(j\colon L \prec L)$ という量化は定式化することができないから，(b) が命題の実際の内容を言い表していることになる．

21.1 定理　(Kunen). 次は同値である：

(a) 初等的埋め込み $L \prec L$ が存在する．

(b) ある α と β に対し初等的埋め込み：$L_\alpha \prec L_\beta$ で $|\alpha|$ より真に小さい臨界点を持つようなものが存在する．

(c) L-超フィルター U で U による L の超巾が整順的となるようなものが存在する．

(d) 反復可能な L-超フィルターが存在する．

(e) $0^\#$ が存在する．

証明　(d) → (e) 初等的埋め込みにより，各反復子の領域もふたたび L になるから，19.10 を用いると，ある L_α で非可算な識別不可能集合がとれる．

(e) → (a) これは 9.17(a) である．

(a) → (b) $k\colon L \prec L$ が臨界点 κ を持つとする．任意の $\kappa < |\alpha|$ となる α に対し，L_α での充足関係を用いると，$k|L_\alpha$ が (b) を満たすことが分かる．

(b) → (c) j を仮定でのような初等的埋め込みとして，これの臨界点を κ とする．いつものように

$$U = \{X \in \mathcal{P}(\kappa) \cap L_\alpha \mid \kappa \in j(X)\}$$

を考える．$\alpha \geq \kappa^{+L}$ だから，$\mathcal{P}(\kappa) \cap L \subseteq L_\alpha$ である．したがって，U は L-超フィルターとなる（19.2 を参照）．あとは，L の U による超巾が整順的であることを示せばよい．

そうでないと仮定して，各 $n \in \omega$ に対し，κ を領域に持つ関数 $f_n \in L$ があって，

$$X_n = \{\xi < \kappa \mid f_{n+1}(\xi) \in f_n(\xi)\} \in U$$

となっているとする．$\gamma > \kappa$ を極限順序数で $\{f_n \mid n \in \omega\} \subseteq L_\gamma$ となるものとし，$H \prec L_\gamma$ を $\kappa \cup \{f_n \mid n \in \omega\}$ のスコーレム閉包，N をその推移的崩壊として，$\pi\colon H \to N$ を崩壊の写像とする．このとき，ある $\delta < \alpha$ に対し，$N = L_\delta$ となる（ここで $\alpha \geq \kappa^{+L}$ であるだけではなく $\alpha \geq \kappa^+$ となっていることがきいてきている）．$n \in \omega$ に対し，$\pi(f_n) = \overline{f}_n$ として，$\xi < \kappa$ なら $\pi(\xi) = \xi$ となっていることに注意すると．

$$X_n = \{\xi < \kappa \mid \overline{f}_{n+1}(\xi) \in \overline{f}_n(\xi)\} \in U$$

となることが分かる．$\{\overline{f}_n \mid n \in \omega\} \subseteq L_\alpha$ であるから，U の定義から，

$$j(\overline{f}_{n+1})(\kappa) \in j(\overline{f}_n)(\kappa)$$

がすべての $n \in \omega$ に対し成り立つが，これは矛盾である．

(c) → (d) U を L-超フィルターとして，対応する反復を

$$\langle M_\alpha, U_\alpha, \kappa_\alpha, i_{\alpha\beta} \rangle_{\alpha \le \beta \in \tau}$$

とする．ここに $\tau > 1$ である．$M_\alpha = L$ であることに注意する．実際には $\tau = \mathrm{On}$ となることを後で示すが，これは非常に重要な点であり，L の規範性を用いて，最初の超巾の整順性のみから完全な反復可能性を導き出している．τ は非極限順序数でも極限順序数でもないことを示す次の二つの補題により，証明が完了される．

21.2 補題 τ は非極限順序数ではない．

証明 $\alpha < \tau$ と仮定して，$\alpha + 1 < \tau$ を示す．つまり，M_α の U_α による超巾が整順的であることを示せばよい．19.6 により，

$$(*) \qquad M_\alpha = L = \{i_{0\alpha}(g)(\kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n}) \mid \text{ある } n \in \omega \text{ に対し } g \in {}^{[\kappa]^n}L \cap L \text{ かつ } \gamma_1 < \cdots < \gamma_n < \alpha\}$$

となる．$\tau > 1$ だから，$M_1 \cong {}^{\kappa}L/U$ は再び L となる．したがって $(*)$ での g は $g = [f]_U$ という形に書ける．ここで，すべての $\xi < \kappa$ に対し，$f(\xi)$ は定義域 $[\xi]^n$ を持つ関数となっているとしてよい．このような f に対し，$\overline{f}$: $[\kappa]^n \to {}^{\kappa}L$ を，

$$\overline{f}(\xi_1, \ldots, \xi_n)(\xi) = \begin{cases} f(\xi)(\xi_1, \ldots, \xi_n) & \xi_1 < \cdots < \xi_n < \xi \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

で定義する．これを L の表現 $(*)$ と組み合せると，

$$e(i_{0\alpha}([f]_U)(\kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n})) = (i_{0\alpha}(\overline{f})(\kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n}))^0_{U_\alpha}$$

で与えられる写像 e: $\langle L, \in \rangle \to \langle {}^{\kappa_\alpha}M_\alpha/U_\alpha, E_{U_\alpha} \rangle$ は，うまく定義された同型写像となるが，このことから後の方の構造が整順的であることが確かめられる：

簡単のために $\mathcal{L}_\in$ の 1 変数論理式 $\varphi(v_0)$ をとると，

$$\begin{aligned} &\langle L, \in \rangle \models \varphi[i_{0\alpha}([f]_U)(\kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n})] \\ &\Leftrightarrow \ \langle L, \in, U \rangle \models \{\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \in [\kappa]^n \mid \varphi[[f]_U(\xi_1, \ldots, \xi_n)]\} \in U^n \ (19.9(\mathrm{a}) \text{ による}) \\ &\Leftrightarrow \ \langle L, \in, U \rangle \models \{\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \in [\kappa]^n \mid \{\xi < \kappa \mid \varphi[\overline{f}(\xi_1, \ldots, \xi_n)(\xi)]\} \in U\} \in U^n \\ &\Leftrightarrow \ \langle M_\alpha, \in, U_\alpha \rangle \models \{\xi < \kappa_\alpha \mid \varphi[i_{0\alpha}(\overline{f})(\kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n})(\xi)]\} \in U^\alpha \ (19.9(\mathrm{a}) \text{ による}) \\ &\Leftrightarrow \ \langle {M_\alpha}^{\kappa_\alpha}/U_\alpha, E_{U_\alpha} \rangle \models \varphi[(i_{0\alpha}(\overline{f})(\kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n}))^0_{U_\alpha}] \end{aligned}$$

という図式が成立することに注意する．ここで，適当な原子論理式 φ を用いると，e が

うまく定義でき（つまり，$x \in L$ に対し，$e(x)$ は x の表現に依存しない），e は単射で，要素関係を保存することが容易に示せる．${M_\alpha}^{\kappa_\alpha}/U_\alpha$ の任意の要素は，ある適当な f と $\gamma_1 < \cdots < \gamma_n < \alpha$ に対し $(i_{0\alpha}(\overline{f})(\kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n}))^0_{U_\alpha}$ と表されるから，e は上射でもある．したがって，e は同型写像であることが分かるが，これが示すべきことであった．　$\dashv$

21.3 補題　τ は極限順序数ではない．

証明　$\delta \leq \tau$ を極限順序数として，$\delta < \tau$ となることを示したい．つまり，

$$\langle\langle\langle M_\alpha, \in, U_\alpha\rangle \mid \alpha < \delta\rangle, \langle i_{\alpha\beta} \mid \alpha \leq \beta < \delta\rangle\rangle$$

の順極限が整順的であることが示せればよい．このために，L で一様に構成できるスコーレム閉包に基づく反復の新しい表現を導入する．これを ZFC で定式化するために，Σ_1-初等的部分構造を用いる．ここでは，5.1(c) でのように，真のクラスの間の初等的埋め込みは Σ_1-初等的埋め込みのことである．

$\mathcal{L}_\in$ の論理式 φ の標準的なスコーレム項 t_φ は 9.3 の後でのように定義されていたことを思い出そう．T を Σ_1 論理式 φ に対する t_φ の全体の，項の合成に関する閉包とする．L での充足関係を Σ_1 論理式に制限した $\models^1_L$ は ZFC で定義可能 (§0) だから，L での解釈 $\{t^L \mid t \in T\}$ はうまくコードされれば，ZFC で定義可能である．したがって，任意の $X \subseteq L$ に対し X の L での **Σ_1-スコーレム閉包**を一様なやりかたで定義することができるが，これを $H^L_1(X)$ と書くことにする．$H^L_1(X)$ は L の $\in$-部分構造で，

$$\{t^L(x_1, \ldots, x_m) \mid t \in T \text{ は } m\text{-変数で } x_1, \ldots, x_m \in X\}$$

を領域に持つものとなる．$a, b \in H^L_1(X)$ で $\exists x(x \in a \triangle b)$ なら，$\exists x \in H^L_1(X)(x \in a \triangle b)$ となるから，$H^L_1(X)$ は外延的である．したがって，(0.4) により $H^L_1(X)$ は推移的崩壊 $N(X)$ を持ち，T の定義から，崩壊の同型写像の逆写像は $e_X\colon N(X) \prec_1 L$ となり，5.1(c) により，これは，各 n に対し $e_X\colon N(X) \prec_n L$ を満たす．$N(X)$ は 3.3(a) の文 σ_0 を満たすから，真のクラス X に対しては $N(X) = L$ が成り立つことが分かる．

証明を先に進めることにして，

$$H = \{x \in L \mid \forall\alpha < \delta(i_{0\alpha}(x) = x)\}$$

とおくと，$\kappa \subseteq H$ で H は真のクラスとなる．$\alpha \leq \delta$ に対し，

$H_\alpha = H^L_1(H \cup \{\kappa_\gamma \mid \gamma < \alpha\})$ として，

N_α は H_α の推移的崩壊であるとし，

$e_\alpha\colon N_\alpha \prec L$ は崩壊の同型写像の逆写像である

とする．このとき $H_0 = H$ となることは容易に分かる．また前の注意により，各 N_α は L と等しくなる．$\alpha \leq \beta < \delta$ に対し，$H_\alpha \subseteq H_\beta$ であることに留意して，

$$e_{\alpha\beta} = e_\beta^{-1} \circ e_\alpha\colon L \prec_1 L$$

とおく．このとき，埋め込みの体系 $\langle e_{\alpha\beta} \mid \alpha \leq \beta < \delta\rangle$ は順系を形成する．さらに，任意

の極限順序数 γ で $0<\gamma\le\delta$ となるものに対し，$H_\gamma=\bigcup_{\alpha<\gamma}H_\alpha$ となり，したがって，$N_\gamma=L$ は $\langle e_{\alpha\beta}\mid\alpha\le\beta<\gamma\rangle$ の順極限となる．これは $\gamma=\delta$ に対しても成り立つから，証明を完了するには，$i_{\alpha\beta}=e_{\alpha\beta}$ が $\alpha\le\beta<\delta$ に対し成り立つことを示せばよい．

まず，$\alpha\le\beta<\delta$ に対し，

(i) $\kappa_\alpha\subseteq H_\alpha$,

(ii) 任意の $X\in\mathcal{P}(\kappa_\alpha)\cap L$ に対し，$i_{\alpha\beta}(X)=e_{\alpha\beta}(X)\cap\kappa_\beta$,

(iii) $\mathrm{crit}(e_{\alpha\beta})\ge\kappa_\alpha$ かつ $e_{\alpha\beta}(\kappa_\alpha)=\kappa_\beta$

となることを示す．(i) については，$\xi<\kappa_\alpha$ を任意にとる．このとき，19.6 により，ある $f\colon[\kappa]^n\to\kappa$ で $f\in L$ となるものと，$\gamma_1<\cdots<\gamma_n<\alpha$ をとり，$\xi=i_{0\alpha}(f)(\kappa_{\gamma_1},\ldots,\kappa_{\gamma_n})$ とできる．ところが，$\kappa\subseteq H$ により，$f=e_0(f)|[\kappa]^n$ となり，したがって $e_0(f)\in H$ から，$i_{0\alpha}(f)=e_0(f)|[\kappa]^n$ となる．よって $\xi=e_0(f)(\kappa_{\gamma_1},\ldots,\kappa_{\gamma_n})\in H_\alpha$ である．

(ii) については，まず，(i) により，e_α が κ_α のすべての元を動かさないことから，$X=e_\alpha(X)\cap\kappa_\alpha$ となることに注意する．したがって，

$$i_{\alpha\beta}(X)=i_{\alpha\beta}(e_\alpha(X)\cap\kappa_\alpha)=e_\alpha(X)\cap\kappa_\beta=e_{\alpha\beta}(X)\cap\kappa_\beta$$

となる．二番目の等式は，$i_{\alpha\beta}$ が $H\cup\{\kappa_\eta\mid\eta<\alpha\}$ のすべての元を動かさず，したがって，H_α の元もすべて動かさないことから導かれ，三番目の等式は，(i) により，各 β に対し，e_β が κ_β のすべての元を動かさないことからよい．

(iii) は，(i) と $X=\kappa_\alpha$ としたときの (ii) から出る．

ここで β に関する帰納法により，$i_{\alpha\beta}=e_{\alpha\beta}$ が $\alpha\le\beta<\delta$ に対し成り立つことを示すことができる：極限順序数の場合は順極限がとられていることから，明らかである．$\beta=\alpha+1$ なら，$i_{\alpha,\alpha+1}=e_{\alpha,\alpha+1}$ となることを確かめられればよい．このために，

$$M_{\alpha+1}=L=\{i_{\alpha,\alpha+1}(f)(\kappa_\alpha)\mid f\in{}^{\kappa_\alpha}L\cap L\}$$

が，いつもの超巾の表現により成り立つことに注意する．

$$k(i_{\alpha,\alpha+1}(f)(\kappa_\alpha))=e_{\alpha,\alpha+1}(f)(\kappa_\alpha)$$

で与えられる写像 $k\colon M_{\alpha+1}\to N_{\alpha+1}$ が $M_{\alpha+1}=L$ から $N_{\alpha+1}=L$ への同型写像となることを示すが，これで十分である．このことから k は恒等写像でなければならなくなるから，任意の $x\in L$ に対し，

$$i_{\alpha,\alpha+1}(x)=i_{\alpha,\alpha+1}(f_x)(\kappa_\alpha)=e_{\alpha,\alpha+1}(f_x)(\kappa_\alpha)=e_{\alpha,\alpha+1}(x)$$

となるからである．ここに f_x は定値関数 $\kappa_\alpha\to\{x\}$ である．

(ii) により，k はうまく定義されて単射になっていることが分かる：

$$\begin{aligned}i_{\alpha,\alpha+1}(f)(\kappa_\alpha)=i_{\alpha,\alpha+1}(g)(\kappa_\alpha)\ &\Leftrightarrow\ \kappa_\alpha\in i_{\alpha,\alpha+1}(\{\xi<\kappa_\alpha\mid f(\xi)=g(\xi)\})\\&\Leftrightarrow\ \kappa_\alpha\in e_{\alpha,\alpha+1}(\{\xi<\kappa_\alpha\mid f(\xi)=g(\xi)\})\\&\Leftrightarrow\ e_{\alpha,\alpha+1}(f)(\kappa_\alpha)=e_{\alpha,\alpha+1}(g)(\kappa_\alpha).\end{aligned}$$

明らかに，$=$ をすべて $\in$ で置き換えても上の同値式は成り立つ．

あとは，k が上射であることを示せばよい．$y \in N_{\alpha+1}$ とする．このとき，$e_{\alpha+1}(y) \in H_{\alpha+1}$ だから，ある（証明の初めに定義したような） $t \in T$ と，$x_1, \ldots, x_m \in H$，$\gamma_1 < \cdots < \gamma_n < \alpha$ により，

$$e_{\alpha+1}(y) = t^L(x_1, \ldots, x_m, \kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n}, \kappa_\alpha)$$

とできる．$f \in {}^{\kappa_\alpha}L \cap L$ を，

$$f(\xi) = t^L(x_1, \ldots, x_m, \kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n}, \xi)$$

で定義する．このとき，

$$\begin{aligned} e_{\alpha,\alpha+1}(f)(\kappa_\alpha) &= e_{\alpha+1}^{-1}(e_\alpha(f)(\kappa_\alpha)) \\ &= e_{\alpha+1}^{-1}(t^L(x_1, \ldots, x_m, \kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n}, \kappa_\alpha)) \\ &= y \end{aligned}$$

となる．真中の等式は Σ_1-初等的埋め込みによる定式化を用いて証明する：

ある $k > 0$ に対し，3.3(a) での整列順序を与える論理式 $\varphi_0(v_0, v_1)$ が Σ_k であると仮定しよう（実際には，φ_0 は Σ_1 となるようにとることができる；Devlin [84: 75] を参照）．このとき，任意の $t(v_1, \ldots, v_m) \in T$ に対し，$v_0 = t(v_1, \ldots, v_m)$ は Σ_{k+1} 論理式で定義することができる：項の構成の複雑さに関する帰納法により，t が標準的スコーレム項 t_φ で φ は Σ_1 のとき，9.3 の後の定義はブール演算の組合せ $(\Sigma_1 \wedge \Pi_k) \wedge \Pi_1$ の形になり，したがって，Σ_{k+1} である．ここで，$t \in T$ が $t_\varphi(t_1(v_1, \ldots, v_m), \ldots, t_r(v_1, \ldots, v_m))$ の形をしているとしよう．ここに，φ は Σ_1 で，帰納法の仮定から，各 $v_0 = t_i(v_1, \ldots, v_m)$ は Σ_{k+1} での定義 $\varphi_i(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ を持つとする．このとき，$v_0 = t(v_1, \ldots, v_m) \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\exists w_1 \ldots \exists w_r (\varphi_1(w_1, v_1, \ldots, v_m) \ \wedge \ldots \\ &\qquad\qquad \wedge\ \varphi_r(w_r, v_1, \ldots, v_m) \ \wedge\ v_0 = t_\varphi(w_1, \ldots, w_r))\,. \end{aligned}$$

となる．最後の部分は前の議論により Σ_{k+1} での定義を持つから，存在量化子を左に“寄せる”ことにより全体の論理式は Σ_{k+1} とできる．

最後に，5.1(c) により，$e_{\alpha,\alpha+1}$ はこの k に対して Σ_{k+2}-初等的埋め込みとなっているから，このことを，

$$\forall \xi < \kappa_\alpha (f(\xi) = t^L(x_1, \ldots, x_m, \kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n}, \xi))$$

に適用すると，(iii) により $e_{\alpha,\alpha+1}(\kappa_\alpha) = \kappa_{\alpha+1}$ で，$x_1, \ldots, x_m, \kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n}$ はすべて $e_{\alpha,\alpha+1}$ で動かないことから，

$$\forall \xi < \kappa_{\alpha+1} (e_{\alpha,\alpha+1}(f)(\xi) = t^L(x_1, \ldots, x_m, \kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n}, \xi))$$

が得られる．特に，ここで得たかった

$$e_{\alpha,\alpha+1}(f)(\kappa_\alpha) = t^L(x_1, \ldots, x_m, \kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n}, \kappa_\alpha)$$

が帰結でき，これにより 21.3 の証明が完成し，定理の証明が得られた．　⊣

21.1 の証明は，シルバー（Devlin [84: V§4] を参照）とパリス（Kanamori-Magidor [78: §10] を参照）により，超巾の反復を用いずに識別不可能クラスを直接生成する形のものも与えられている．この定理で話が完結する場合には思考節約になってよいように思えるかもしれないが，第 II 巻ではこの定理の一般化が考察されることになり，そこではより豊かな超巾の反復の文脈での自然な表現が得られることが示される．

これの前ぶれとして，§8 で議論したモデル理論的仮定から，そこでより強い結論が得られるということが上の系として得られる：

21.4 系　チャングの仮説が成り立つか，ジョンソン基数があるなら，$0^\#$ が存在する．

証明　これらの仮定からは，それぞれ 8.9 と 8.15 により，21.1(b) を導くことができる．⊣

もう一つの帰結としては，閉非有界フィルターが制限された意味で超フィルターになっている，ということに関連した次の結果がある：

21.5 演習　次は正則基数 $\kappa > \omega$ に対し同値となる：

(a) $0^\#$ が存在する．

(b) すべての $X \in \mathcal{P}(\kappa) \cap L$ は κ の閉非有界な部分集合を含むか，ある閉非有界な部分集合と素になるかのどちらかである．

ヒント　(a) → (b) は，あるスコーレム項 t と $0^\#$ による識別不可能クラス I の元 $x_1 < \cdots < x_m < y_1 < \cdots < y_n$ で $x_m < \kappa \leq y_1$ となっているようなものにより $X = t^L(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ となるとして，X が $I \cap (\kappa - (x_m + 1))$ を含むか，あるいはこれと素になるかのどちらかであることを示せばよい．(b) → (a) には，k: $L \prec L$ を構成すればよい．　⊣

最後に，9.17(a) の証明の中でも注意したように，$0^\#$ により与えられる識別不可能クラスからそれ自身への，順序を保存する任意の単射は，スコーレム項を経由することで，初等的埋め込み $L \prec L$ を惹き起こすが，これが L から L への初等的埋め込みの生成のされ方のすべてとなっている：

21.6 命題　$0^\#$ が存在すると仮定して，j: $L \prec L$ とし，I を $0^\#$ により与えられる識別不可能クラスとする．このとき，$\mathrm{crit}(j) \in I$ となる．また，$j|I$: $I \to I$ となり，したがって，$j|I$ はスコーレム項を経由して j を惹き起こすものとなっている．

証明　まず，任意の k: $L \prec L$ に対し，$\mathrm{crit}(k) \in I$ となることに注意する：$\delta = \mathrm{crit}(k)$ として，反対に $\delta \notin I$ だったと仮定してみる．このときには，あるスコーレム項 t と $0^\#$ 識別不可能クラスの元 $x_1 < \cdots < x_m < y_1 \cdots < y_n$ で $x_m < \delta < y_1$ となっているものをとって，

$$\delta = t^L(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$$

とできる．k により動かないような基数は真のクラスをなすと仮定してよい（そうでなければ，U を $X \in U \;\Leftrightarrow\; X \in \mathcal{P}(\delta) \cap L \wedge \delta \in k(X)$ で定義される L-超フィルターとすると，

j_U も臨界点 δ を持つから，21.1 の証明でと同じように，k のかわりに $j_U\colon L \prec L \cong {}^{\delta}L/U$ を考えればよい）ところが，このとき，$0^{\#}$ の条件 (III) により，$y_1, \ldots, y_n$ はすべて k により動かないとしてよい．したがって，k で動かされないパラメタにより定義される δ についても $k(\delta) = \delta$ が言えるが，これは矛盾である．

あとは，j が与えられたとき，$\iota \in I$ なら，$j(\iota) \in I$ となることを示せばよい．このためには，上の考察から，$j(\iota)$ が，ある $k\colon L \prec L$ の臨界点となっていることが示せればよい．H を $j(\iota) \cup j``(I - (\iota+1))$ のスコーレム閉包とする（$0^{\#}$ が存在するときには L での充足関係は定義可能だから，このことは直接に定式化可能である）．H の推移的崩壊は L となるが，崩壊の同型写像の逆写像 k は，初等的埋め込み $k\colon L \prec L$ となる．$\mathrm{crit}(k) = j(\iota)$ を示す；$j(\iota) \subseteq H$ だから，このためには $j(\iota) \notin H$ を示せばよい：

そうでなかったとすると，$\eta_1 < \cdots < \eta_m < j(\iota)$ で，あるスコーレム項 t と I の元 $\iota < y_1 < \cdots < y_n$ で，

$$j(\iota) = t^L(\eta_1, \ldots, \eta_m, j(y_1), \ldots, j(y_n))$$

となるものがある．j が初等的埋め込みであることから，$\xi_1 < \cdots < \xi_m < \iota$ で，

$$\iota = t^L(\xi_1, \ldots \xi_m, y_1, \ldots, y_n)$$

となるものが存在する．ところが $0^{\#}$ の条件 (III) を用いることにより，各 ξ_i は $I - \{\iota\}$ の元により定義可能となっているから，ι 自身も他の識別不可能クラスの元から定義できるが，これは矛盾である．　⊣

集合 $0^{\dagger}$

L 上の超越性について詳しく考察してきたので，次に可測性の内部モデル上の超越性の自然な定式化について考察することにする．$\langle L[U], \in, U\rangle$ がある基数 κ に対し，κ-モデルになっているとき，§9 の終わり注意（を $U \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ となることを許すように，少し変更したもの）により，十分な条件のもとでは，$0^{\#}$ と同じように，$U^{\#} \subseteq \kappa$ で $\langle L[U], \in, U, \xi\rangle_{\xi \le \kappa}$ の閉非有界な識別不可能クラスを生成するようなものが存在する．ところが，異なる κ に対する κ-モデルは互いの反復子となっているから，統一的な超越性の原理があってもおかしくない．実際に，$0^{\#}$ が抽出された直後にソロヴェイはそのような原理を定式化している：自然数の集合 $0^{\dagger}$ （ゼロ・ダガー）の存在がそれである．$0^{\dagger}$ の理論を，細部にわたって展開するが，Kanamori-Awerbuch-Friedlander [90] でのように，最初は§9 の $0^{\#}$ にいたる分析をなぞる形で進め，後で非剛性や他の特徴付けを与える．

$0^{\dagger}$ の背後にあるアイデアは，構造

$$\langle L_\zeta[U], \in, U\rangle \models U \text{ は } \kappa \text{ 上の正規超フィルター}$$

に，合わせると構造全体が生成できるような，κ 上の識別不可能集合と，もっと上でのものの2つの識別不可能クラスの組みについての，標準的な理論を確立する，ということである．構造 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}$ の領域の部分クラス（または集合）X, Y で $X \cup Y$ はある関係 $<$ によって線型に順序づけられているものに対し，$\langle X, Y, <\rangle$（あるいは，明らかな場合には

単に $\langle X, Y\rangle$）が $\mathcal{M}$ の**二重識別不可能クラス**（または集合）であるとは，$\mathcal{M}$ の言語のすべての論理式 $\varphi(v_1,\ldots,v_{n+s})$ と X の元 $x_1 < \cdots < x_n, \overline{x}_1 < \cdots < \overline{x}_n$ および，Y の元 $y_1 < \cdots < y_s, \overline{y}_1 < \cdots < \overline{y}_s$ に対し，

$$\mathcal{M} \models \varphi[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n,\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_s]$$

となることとする．

$\mathcal{L}_\in(\dot{A})^{**}$ を $\mathcal{L}_\in(\dot{A})$ に定数記号 $\{c_k \mid k \in \omega\} \cup \{d_k \mid k \in \omega\}$ を加えて得られるものとする．EM^2 **青写真**とは，

$$\langle L_\zeta[U], \in, U, x_k, y_k\rangle_{k\in\omega}$$

という形の構造の言語 $\mathcal{L}_\in(\dot{A})^{**}$ での理論のこととする．ここに，ζ は ω より大きな極限順序数で，ある κ に対し $\langle L_\zeta[U], \in, U\rangle \models$「$U$ は κ 上の正規超フィルター」; また $\langle\{x_k \mid k \in \omega\}, \{y_k \mid k \in \omega\}\rangle$ は $\langle L_\zeta[U], \in, U\rangle$ での，順序数からなる二重識別不可能集合で，すべての $k \in \omega$ に対し，

$$x_k < x_{k+1} < \kappa < y_k < y_{k+1}$$

となっているものとする．

$\mathcal{L}_\in(\dot{A})$ の論理式 φ の標準スコーレム項 t_φ と対応するスコーレム閉包は 20.9 の前で記述されていた．

スコーレム項とは，この節では以降，これらの t_φ のうちの一つのこととする．

$\langle M, E, R\rangle$ が，ある極限順序数 $\delta > \omega$ に対して，$\langle L_\delta[A], \in, A\rangle$ の形をしたものの一つと初等的同値なら任意の $X \subseteq M$ に対し，X の $\langle M, E, R\rangle$ スコーレム閉包がこれらのスコーレム項によりうまく一意に定義されていると考えてよい．

次は 9.4 に対応するものである．$\mathcal{L}_\in(\dot{A})^{**}$ でのある理論 T に対し，ここでは T^- でこの理論の $\mathcal{L}_\in(\dot{A})$ への制限を表すこととする．これは後にも用いられることであるが，$\dot{A}$ がある構造での正規超フィルターと解釈されるとき，$\bigcup \dot{A}$ で対応する可測基数が表されることに注意する．

21.7 演習 T を EM^2 青写真とする．このとき，任意の α と γ に対し，T^- のモデル $\mathcal{M} = \mathcal{M}(T, \alpha, \gamma)$ で次を満たすものが一意に決まる：

(a) $\mathcal{M}$ の識別不可能集合 $\langle X, Y\rangle$; $X \cup Y \subseteq \mathrm{On}^{\mathcal{M}}$ で，X は $<^{\mathcal{M}}$ に関し，順序型 α を持ち，Y は順序型 γ を持ち，$x <^{\mathcal{M}} \bigcup \dot{A}^{\mathcal{M}} <^{\mathcal{M}} y$ がすべての $x \in X$ と $y \in Y$ に対し成り立つようなものが存在する．更に，任意の $\mathcal{L}_\in(\dot{A})$ の論理式 $\varphi(v_1,\ldots,v_{n+s})$ と，X の元 $x_1 <^{\mathcal{M}} \cdots <^{\mathcal{M}} x_n$ および Y の元 $y_1 <^{\mathcal{M}} \cdots <^{\mathcal{M}} y_s$ に対し，

$$\mathcal{M} \models \varphi[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s] \Leftrightarrow \varphi(c_0,\ldots,c_{n-1},d_0,\ldots,d_{s-1}) \in T$$

が成り立つ．

(b) $\mathcal{M}$ での $X \cup Y$ のスコーレム閉包は再び $\mathcal{M}$ となる． $\dashv$

$\mathcal{M}(T, \alpha, \gamma)$ が整順的なら，この推移的崩壊は，ある極限順序数 $\delta > \omega$ に対し，$\langle L_\delta[U], \in, U\rangle$ という形をしている．この場合には

$$\mathcal{M}(T,\alpha,\gamma) \text{ を } \langle L_\delta[U],\in,U\rangle \text{ と同一視する.}$$

次は 9.5 に対応するものとなっている．

21.8 演習　T を EM^2 青写真とする．このとき，$\mathcal{M}(T,\alpha,\gamma)$ がすべての α,γ に対し整順的であると，

(I)　$\mathcal{M}(T,\alpha,\gamma)$ はすべての $\alpha,\ \gamma<\omega_1$ に対し整順的である

ことは同値である．　$\dashv$

このような強い性質を持つ EM ^{2} 青写真は，次のような十分条件からすぐに得ることができる．これは 9.6 に対応する結果となっている．

21.9 補題　ある κ に対し，κ-モデルが存在し，κ より大きなラムズィー基数があるとする．このとき，EM^2 青写真で 21.8 を満たすものが存在する．

証明　$\langle L[U],\in,U\rangle$ を κ-モデルとして，$\langle L[U_\alpha],U_\alpha,\kappa_\alpha,i_{\alpha\beta}\rangle_{\alpha\le\beta\in\mathrm{On}}$ をその反復とする．また，ν を κ より大きなラムズィー基数とする．9.3 での議論により，構造 $\langle L_\nu[U],\in,U\rangle$ に対する識別不可能集合 $H\in[\nu-\kappa]^{\omega_1}$ が存在する．$X=\{\kappa_\alpha\mid\alpha<\omega_1\}$, $Y=i_{0\omega_1}``H$ とおく．このとき，$i_{0\omega_1}(\nu)=\nu$ をパラメタの一つとして 19.9(a) を自然に適用することにより，$\langle X,Y\rangle$ が $\langle L_\nu[U_{\omega_1}],\in,U_{\omega_1}\rangle$ の二重識別不可能集合となることが分かる．したがって，$\langle X,Y\rangle$ は EM^2 青写真を与える．また，X と Y は非可算だから，この EM^2 青写真は，(I) を満たすことが，9.6 での議論により分かる．　$\dashv$

20.22 により，21.9 の仮定からすでに V は κ-モデル $L[U]$ ではないことが帰結される．この仮定のもとで，$0^\#$ と全く同様の EM^2 青写真の存在が帰結できる．実際には，21.9 の証明ラムズィーより弱い分割の性質で十分である．ともあれ，この証明に基づいて，

(i) ρ,ζ は極限順序数で，$\rho<\zeta$, また $\langle L_\zeta[U],\in,U\rangle\models U$ は ρ 上の正規超フィルター；
(ii) $\langle X,Y\rangle$ は二重識別不可能集合で X と Y は両方とも順序型 ω_1 を持ち，$\sup(X)=\rho$;
(iii) ζ は (i) と (ii) を満たすような最小のものとなっている；
(iv) X と Y の ω 番目の元は可能なもののうち最小となっている，また
(v) T_0 は対応する EM^2 青写真となっている

とする．

21.10 演習　$T=T_0$ に対し，次の条件が成り立つ：

(IIa) 任意の $(n+s)$ 変数スコーレム項 t に対し，T は

$$t(c_0,\ldots,c_{n-1},d_0,\ldots,d_{s-1})\in\bigcup\dot{A}\rightarrow t(c_0,\ldots,c_{n-1},d_0,\ldots,d_{s-1})<c_n$$

という文を含んでいる．

(IIb) 任意の $(n+s)$ 変数スコーレム項 t に対し，T は

$$t(c_0,\ldots,c_{n-1},d_0,\ldots,d_{s-1})\in\mathrm{On}\rightarrow t(c_0,\ldots,c_{n-1},d_0,\ldots,d_{s-1})<d_s$$

という文を含んでいる．

(IIIa) 任意の $(m+n+s+1)$ 変数スコーレム項 t に対し，T は

$$t(c_0,\ldots,c_{m+n},d_0,\ldots,d_{s-1})<c_m\rightarrow t(c_0,\ldots,c_{m+n},d_0,\ldots,d_{s-1})=\\ t(c_0,\ldots,c_{m-1},c_{m+n+1},\ldots,c_{m+2n+1},d_0,\ldots,d_{s-1})$$

という文を含んでいる．

(IIIb) 任意の $(m+n+s+1)$ 変数スコーレム項 t に対し，T は

$$t(c_0,\ldots,c_{n-1},d_0,\ldots,d_{r+s})<d_r\rightarrow t(c_0,\ldots,c_{n-1},d_0,\ldots,d_{r+s})=\\ t(c_0,\ldots,c_{n-1},d_0,\ldots,d_{r-1},d_{r+s+1},\ldots,d_{r+2s+1})$$

という文を含んでいる．

ヒント (IIa) は背理法により，$\sup(X)=\rho$ を使うと容易に導けるまた，9.8 での論法により ζ の最小性を用いると (IIb) がでる．9.10 の論法を用いると，それぞれ X と Y の ω 番目の元の最小性から，(IIIa) と (IIIb) が導ける ⊣

(I) を満たす EM^2 青写真と，任意の α,γ に対して，ここでは，

$$\langle\langle\chi_\eta^{T,\alpha,\gamma}\mid\eta<\alpha\rangle,\langle\iota_\xi^{T,\alpha,\gamma}\mid\xi<\gamma\rangle\rangle\quad\text{および}\ \chi_\alpha^{T,\alpha,\gamma}$$

で，$\mathcal{M}(T,\alpha,\gamma)$ の二重識別不可能集合と可測基数を表すことにする．この χ の記法を用いて次が言える：

21.11 補題 T を (I)-(III) を満たす EM^2 青写真とする．このとき，任意の β,δ に対し：

(a) $\{\chi_\eta^{T,\beta,\delta}\mid\eta<\beta\}$ は順序数の閉集合で，β が極限順序数なら，$\chi_\beta^{T,\beta,\delta}$ で非有界になる．

(b) $\omega\leq\alpha\leq\beta$ かつ $\omega\leq\gamma\leq\delta$ で α と β は極限順序数なら，任意の $\eta\leq\alpha$ に対し，

$$\chi_\eta^{T,\alpha,\gamma}=\chi_\eta^{T,\beta,\delta}$$

となる．

証明 (a) (IIa) により，β が極限順序数のときには，$\chi_\beta^{T,\beta,\delta}$ でこの集合が非有界であることが分かる．(IIIa) から（9.11 での論法により —— この論法は以下でも用いる），この集合は閉じていることが分かる．

$\mathcal{H}$ を

$$\{\chi_\eta^{T,\beta,\delta}\mid\eta<\alpha\}\cup\{\iota_\xi^{T,\beta,\delta}\mid\xi<\gamma\}$$

の $\mathcal{M}(T,\beta,\delta)$ でのスコーレム閉包とする．この推移的崩壊は一意性により $\mathcal{M}(T,\alpha,\gamma)$ となる．$\chi_\alpha^{T,\beta,\delta}$ が $\mathcal{H}$ の領域の部分集合となっていることを示す．このことから，崩壊の同型写像は $\{\chi_\eta^{T,\beta,\delta}\mid\eta<\alpha\}$ の要素をすべて動かさないことが分かり，したがって，この集合は $\mathcal{M}(T,\alpha,\gamma)$ の二重識別不可能集合の下側の集合となるから，これを示せば十分であ

る（特にこのことから，α と β に関する (a) により，$\chi_\alpha^{T,\alpha,\gamma} = \chi_\alpha^{T,\beta,\delta}$ が成り立つことが分かる）．

$\chi_\alpha^{T,\beta,\delta}$ が $\mathcal{H}$ の領域の部分集合となっていることを示すために，$\sigma < \chi_\alpha^{T,\beta,\delta}$ を任意にとる．簡単のために識別不可能集合の上付き記号 ${}^{T,\beta,\delta}$ を略すことにして，あるスコーレム項 t と識別不可能集合の元 $\chi_{\eta_0}, \ldots, \chi_{\eta_{m-1}}, \chi_{\zeta_0}, \ldots, \chi_{\zeta_n}, \iota_{\xi_0}, \ldots, \iota_{\xi_{s-1}}$ を昇順にとって，

$$\sigma = t^{\mathcal{M}(T,\beta,\delta)}(\chi_{\eta_0}, \ldots, \chi_{\eta_{m-1}}, \chi_{\zeta_0}, \ldots, \chi_{\zeta_n}, \iota_{\xi_0}, \ldots, \iota_{\xi_{s-1}})$$

となるようにする．ここに $\eta_{m-1} < \alpha \le \zeta_0$ とする．$r = 0$ として，(IIIb) を適用すると，$i < s$ に対し ξ_i は i で置き換えてよい．α と γ は極限順序数だから，このようにして得られた表現により σ が $\mathcal{H}$ の領域の元であることが分かる．$\dashv$

21.12 補題　T を (I)-(III) を満たす EM^2 青写真として，γ と α は極限順序数とする（ $\alpha = 0$ の場合も許す）．このとき，$\mathcal{M}(T,\alpha,\delta) = \langle L_\zeta[D], \in, D\rangle$ となっているとして，

$$\{\chi_\eta^{T,\alpha,\delta} \mid \eta < \alpha\} \cup \{\iota_\xi^{T,\alpha,\delta} \mid \xi < \gamma\}$$

の $\mathcal{M}(T,\alpha,\delta)$ でのスコーレム閉包の推移的崩壊は，$\langle L_\iota[D], \in, D \cap L_\iota[D]\rangle$ になる．ここに，$\iota = \iota_\gamma^{T,\alpha,\delta}$ である．したがって，

$$\mathcal{M}(T,\alpha,\gamma) = \langle L_\iota[D], \in, D \cap L_\iota[D]\rangle \text{ かつ，すべての } \xi \le \gamma \text{ に対し，} \iota_\xi^{T,\alpha,\gamma} = \iota_\xi^{T,\alpha,\delta}$$

が成り立つ．

証明　$\mathcal{H}$ を上のようなスコーレム閉包とする．このとき，$\mathcal{H}$ の推移的崩壊は一意性から，$\mathcal{M}(T,\alpha,\gamma)$ になる．21.11(b) の議論で $\alpha = \beta$ として（また $\alpha = 0$ の場合にはもっと簡単な議論により），$\chi_\alpha^{T,\alpha,\delta}$ は $\mathcal{H}$ の領域の部分集合になっていることが分かるから，$\mathcal{M}(T,\alpha,\gamma)$ は，ある ι に対して $\langle L_\iota[D], \in, D \cap L_\iota[D]\rangle$ という形をしていなければならない．ここで，$\iota = \iota_\gamma^{T,\alpha,\delta}$ となっていることを 9.11 での議論を用いて確かめれば証明が完了する．$\dashv$

21.11 と 21.12 により，T が (I)-(III) を満たす EM^2 青写真なら，任意の η, ξ と極限順序数 α（α は 0 でもよい）に対し，曖昧さを生じることなく，

$$\begin{aligned} \chi_\eta^T &= \chi_\eta^{T,\beta,\gamma}, \ \beta \text{ と } \gamma \text{ は極限順序数で } \beta > \eta, \\ \iota_\xi^{T,\alpha} &= \iota_\xi^{T,\alpha,\gamma}, \ \gamma \text{ は極限順序数で } \gamma > \xi, \\ Y^{T,\alpha} &= \{\iota_\xi^{T,\alpha} \mid \xi \in \mathrm{On}\} \end{aligned}$$

とおくことができる．最後に，α が極限順序数のとき，

$$D_\alpha^T \text{ は } \mathcal{M}(T,\alpha,\omega) \text{ での } \chi_\alpha^T \text{ 上の正規超フィルター}$$

とする．

次は，9.12 と類似の結果である．

21.13 演習　T を (I)-(III) を満たす EM^2 青写真として，α は極限順序数だとする．このとき，

(a) $\langle L[D^T_\alpha], \in, D^T_\alpha\rangle$ は χ^T_α-モデルとなり，$\xi \le \zeta$ に対し，

$$\langle L_{\iota^{T,\alpha}_\xi}[D^T_\alpha], \in, D^T_\alpha\rangle \prec \langle L_{\iota^{T,\alpha}_\zeta}[D^T_\alpha], \in, D^T_\alpha\rangle$$

となっている．

(b) すべての η に対し，$|\chi^T_\eta| = |\eta| + \aleph_0$ となり，すべての ξ に対し，$|\iota^{T,\alpha}_\xi| = |\xi| + |\alpha|$ である．

(c) $\{\chi^T_\eta \mid \eta \in \mathrm{On}\}$ と，$Y^{T,\alpha}$ は順序数の閉非有界クラスである．

(d) すべての基数 $\lambda > \omega$ に対し，$\chi^T_\lambda = \lambda$ となり，$\lambda > \alpha$ なら，$\iota^{T,\alpha}_\lambda = \lambda$ となる．したがって，$\mathcal{M}(T, \alpha, \lambda) = \langle L_\lambda[D^T_\alpha], \in, D^T_\alpha\rangle$ である．

(e) $\overline{T}$ が (I)-(III) を満たす任意の EM^2 青写真のとき，$\overline{T} = T$ となる．

ヒント (a) は，21.12 により，すべての極限順序数 $\gamma \ge \omega$ に対し，

$$\mathcal{M}(T, \alpha, \gamma) = \langle L_{\iota^{T,\alpha}_\gamma}[D], \in, D \cap L_{\iota^{T,\alpha}_\gamma}[D]\rangle$$

となるような D があることに注意すると，$\langle L[D], \in, D\rangle$ が χ^T_α-モデルとなっていることが分かる．分別不可能性から，$(\chi^T_\alpha)^{+L[D]} < \iota^{T,\alpha}_\xi$ がすべての ξ に対し成り立つ．特に，20.2(a) により，$D \subseteq L_{\iota^{T,\alpha}_\omega}[D]$ となるから，$D = D^T_\alpha$ である．(a) の残りと，この演習の残りの部分は 9.12 と同じようにできる．$\dashv$

超フィルターを用いて，この図式での非極限順序数 α における χ^T_η と $\iota^{T,\alpha}_\xi$ の振る舞いについても，後でさらに詳しく調べる．$0^{\#}$ でと同じように，21.13 の仮定から，その (a) から (d) までにより，任意の無限の極限順序数 α に対し，

$\langle L[D^T_\alpha], \in, D^T_\alpha\rangle$ の充足関係は ZFC で定義可能である

ということが帰結できる．このことから，次の内部モデルに関するもののような様々な命題が直接に定式化可能となる．

21.14 補題 任意の極限順序数 α に対し，$\langle\{\chi^T_\eta \mid \eta < \alpha\}, Y^{T,\alpha}\rangle$ は χ^T_α-モデルの二重識別不可能クラスとなり，$\{\chi^T_\eta \mid \eta < \alpha\} \cup Y^{T,\alpha}$ のスコーレム閉包は再びこのモデルになる．$\dashv$

21.13(e) を念頭において，(I)-(III) を満たすような EM^2 青写真が存在するときには，

$0^{\dagger}$ を，(I)-(III) を満たすことで一意に決まる EM^2 青写真とする．

また，

$0^{\dagger}$ が存在する

という“間違った”言い方は，「(I)-(III) を満たすような EM^2 青写真が存在する」を意味することとする．$\mathcal{L}_\in(\dot{A})^{**}$ の帰納的算術化により，$0^{\dagger}$ は ω の部分集合と見なせる．次の総集編的な定理が，主な性質を列挙している（このうち (a) は 21.9 の証明により得られる）：

21.15 定理 (Solovay).

(a) $0^\dagger$ が存在するのは，ある順序数 κ に対し，最小元が κ より大きいような非可算な識別不可能集合を持つ κ-モデルが存在する，ちょうどそのときである．したがって，ある κ に対し κ-モデルが存在して，κ より真に大きなラムズィー基数が存在する（例えば可測基数が 2 つ存在するようなとき，これが成り立つ）なら，$0^\dagger$ は存在する．

(b) $0^\dagger$ が存在するのは，すべての非可算基数 λ に対し，λ-モデルと，それに対する二重識別不可能クラス $\langle X, Y\rangle$ が存在して，$X \subseteq \lambda$ は閉非有界で，$Y \subseteq \mathrm{On} - (\lambda+1)$ は閉非有界なクラスとなり，$X \cup \{\lambda\} \cup Y$ はすべての非可算基数を含み，$X \cup Y$ の λ-モデルでのスコーレム閉包は再びそのモデルになる，ちょうどそのときである．　⊣

上の最後の状況で，正則基数が存在し，強極限基数が存在するから，分別不可能性により，Y のすべての元は，この λ-モデルで到達不可能基数となり，したがって，ソロヴェイが早い時期からすでに気付いていたように，$0^\dagger$ から可測性の推移的な集合 $\in$-モデルの存在が帰結される．正確を期すために言っておくと，9.17 の方向で，識別不可能クラスの大きさについては，さらに色々なことが言える．

ソロヴェイは $0^\dagger$ の定義可能性に関する 14.11 の直接的な類推も得ている：

21.16 定理　(ZF)(Solovay).

$$R(x) \ \leftrightarrow\ 0^\dagger \text{ が存在する } \wedge\ x \in {}^{\omega}2\ \wedge\ \{m \mid x(m) = 1\} = 0^\dagger$$

で与えられる関係 $R \subseteq {}^{\omega}\omega$ は Π^1_2 である．　⊣

21.17 系

(a) $0^\dagger$ は推移的な ZF の $\in$-モデル M で $\omega_1 \subseteq M$ となるものに対し，次の意味で絶対的である：

$$M \models \ulcorner \mathrm{EM}^2 \text{青写真で (I)-(III) を満たすものが存在する} \urcorner \quad \Leftrightarrow \quad 0^\dagger \in M$$

で，ここでの命題が成り立つ場合には，$M \models \ulcorner 0^\dagger$ は (I)-(III) を満たす唯一の EM^2 青写真である$\urcorner$ となる．

(b) $0^\dagger$ は 任意の κ に対する κ-モデルに属さないような，ω の Δ^1_3 部分集合である．

証明　(b) については，もし反対に $0^\dagger$ がある κ-モデルの元だったとすると，超巾の反復により，κ は基数であると仮定してよい．ところがこれは，(a) と 21.15(b) に矛盾である．⊣

§9 での $0^\#$ の理論と類似の理論を確立したところで，今度は，超巾の反復に関した状況を，より詳しく見てゆくことにする．しかし，その前に，厳密な話から一休みして，よくあるように新しいレシピを紹介するというのも芸がないので，次のチェスの問題を出すことにする（M. Henneberger: “Revista de Sah” 1928 の第一と第二賞）：

白：キング b1, ルーク b7 と c7j, ビショップ b5.
黒：キング a8, ルーク a3, ポーン f2.
白は次の一手で勝つ．

著者に完全な答を送ってくれた方には，小額の賞をさしあげます．

この節の残りの部分では，

$$\langle L[U_\alpha], U_\alpha, \kappa_\alpha, i_{\alpha\beta}\rangle_{\alpha\le\beta\in\mathrm{On}} \text{ は可能なうち最小な } \kappa\text{-モデルの反復}$$

であるとする．さまざまな κ に対する，κ-モデルは，すべてこの反復に現れる (20.12)．次の結果は 21.7 の一意性の基本性質を $0^{\dagger}$ と κ-モデルに記述しなおすことで直ちに得られるものだが，ここでは強調するために述べておく．

21.18 補題　任意の α に対し，κ_α-モデルの二重識別不可能クラス $\langle X, Y\rangle$ で，$X \subseteq \kappa_\alpha$ は順序型 α を持ち，$Y \subseteq \mathrm{On} - (\kappa_\alpha + 1)$ で

(a) 任意の $\mathcal{L}_\in(\dot{A})$ の論理式 $\varphi(v_1, \ldots, v_{n+s})$ と，X の元 $x_1 < \ldots < x_n$ と，Y の元 $y_1 < \cdots < y_s$ に対し，

κ_α-モデルは $\varphi[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s]$ を満たす　$\Leftrightarrow$　$\varphi(c_0, \ldots, c_{n-1}, d_0, \ldots, d_{s-1}) \in 0^{\dagger}$

(b) $X \cup Y$ の κ_α-モデルでのスコーレム閉包は再びこの κ_α-モデルとなる

となるようなものは高々一つしか存在しない．

証明　$\langle X, Y\rangle$ と $\langle \overline{X}, \overline{Y}\rangle$ が 2 つのそのようなクラスだったとすると，順序を保存する単射: $X \cup Y \to \overline{X} \cup \overline{Y}$ は κ_α-モデルからそれ自身への同型写像へと拡張できるから，恒等写像でなければならない．　$\dashv$

この一意性により，上付きの添字 ^{T} を落すことにして，$0^{\dagger}$ が存在するときには，21.13 の前で定義され，そこでの性質に基づくような，対応するクラス

$$\{\chi_\eta \mid \eta \in \mathrm{On}\} \text{ かつ } Y^\alpha = \{\iota^\alpha_\xi \mid \xi \in \mathrm{On}\}$$

がすべての極限順序数 α に対し存在する．21.14 により，すべての極限順序数 α に対し，$\langle\{\chi_\eta \mid \eta < \alpha\}, Y^\alpha\rangle$ は χ_α-モデルで 21.18(a)(b) を満たす．特に，例えば $\langle\emptyset, Y^0\rangle$ が χ_0-モデルに対してそうであるように，X は有限である可能性もあるから，21.18 の $\langle X, Y\rangle$ は EM^2-青写真を決定するとは限らない．実際，$0^{\dagger}$ の一意性から考えると意外な感じのする次の補題は，この Y^0 に基づくものとなっている．

21.19 補題

(a) すべての α に対し，$\langle X, Y\rangle = \langle\{\kappa_\eta \mid \eta < \alpha\}, i_{0\alpha}``Y^0\rangle$ は κ_α-モデルに関する 21.18(a)(b) を満たす．

(b) すべての η に対し，$\chi_\eta = \kappa_\eta$ で，すべての極限順序数 α に対し，$i_{0\alpha}``Y^0 = Y^\alpha$ となる．

証明　まず $\chi_0 = \kappa_0$ を示す．κ_0 の定義から，明らかに，$\kappa_0 \le \chi_0$ である．逆は，後で引用できるようにもう少し一般的な形で示す：λ を $\kappa_\lambda = \lambda = \chi_\lambda$ となる正則基数とする；19.7(b) と 21.13(d) により，このような λ をいくらでも大きくとることができる．21.14 により，$\langle\{\chi_\eta \mid \eta < \lambda\}, Y^\lambda\rangle$ は λ-モデルに対する 21.18(a)(b) を満たすことを後のために

注意しておく．19.10 により，E を λ より大きな基数で $i_{0\lambda}$ で動かされないようなものの真のクラスとするとき，$\langle\{\kappa_\eta \mid \eta < \lambda\}, E\rangle$ は λ-モデルでの二重識別不可能クラスとなる．この対は λ-モデルで 21.18(a) を満たすことに注意する：集合 $\{\kappa_\eta \mid \eta < \lambda\}$ には無限個の χ_η が含まれており，Y^λ は λ より大きな基数のすべてを含んでいるから，$E \subseteq Y^\lambda$ である．$\mathcal{N}$ を $\{\kappa_\eta \mid \eta < \lambda\} \cup E$ の λ-モデルでのスコーレム閉包の推移的崩壊として，π を崩壊の同型写像とする．このとき $\pi(\lambda) = \lambda$ だから，$\mathcal{N}$ はふたたび λ-モデルとなる．したがって，21.18 により，すべての $\eta < \lambda$ に対し，$\pi(\kappa_\eta) = \chi_\eta$ である．よって，π が崩壊の写像であることから，$\chi_\eta \le \kappa_\eta$ がすべての $\eta < \lambda$ で成り立つ．

$\kappa_0 = \chi_0$ であることが示せたので，任意の α に対し，以下のように議論する：$\langle L[U_\alpha], \in, U_\alpha\rangle$ は κ_α-モデルだったことを思い出すと，19.6 により，任意の $x \in L[U_\alpha]$ はある関数 $f \in L[U_0]$ と $\gamma_1 < \cdots < \gamma_n < \alpha$ によって，$x = i_{0\alpha}(f)(\kappa_{\gamma_1}, \ldots, \kappa_{\gamma_n})$ という形に表せる．$\kappa_0 = \chi_0$ だから，f は κ_0-モデルで，Y^0 の元を用いて定義できる．したがって，$i_{0\alpha}(f)$ は κ_α-モデルで，$i_{0\alpha}$“Y^0 の元を用いて定義できる．したがって，$\langle\{\kappa_\eta \mid \eta < \alpha\}, i_{0\alpha}“Y^0\rangle$ は κ_α-モデルで 21.18(b) を満たす．

次に，$\kappa_\lambda = \lambda = \chi_\lambda$ となる任意の正則基数 $\lambda \ge \alpha$ をとる．前の注意により，$\langle\{\kappa_\eta \mid \eta < \lambda\}, i_{0\lambda}“Y^0\rangle$ は λ-モデルで 21.18(a) を満たすことが分かる．したがって，$i_{\alpha\lambda}$ が初等的埋め込みであることから，$\langle\{\kappa_\eta \mid \eta < \alpha\}, i_{0\alpha}“Y^0\rangle$ は κ_α で 21.18(a) を満たす．

補題の (b) はこれから 21.14 と 21.18 の直接の帰結として得られる．　⊣

ここで，非極限順序数 α に対して Y^α を：

$$Y^\alpha = i_{0\alpha}“Y^0$$

として定義することができる．これらの Y^α は，$0^\dagger$ の (IIb) と (IIIb) による，いつものような議論により，閉非有界なクラスになることが分かる．Y^α は初めの部分の若干の違いを除いて互いに等しくなる：

21.20 演習　任意の $\alpha \le \beta$ に対し，

(a) $Y^\beta = i_{\alpha\beta}“(Y^\alpha \cap (\beta+1)) \cup (Y^\alpha - (\beta+1))$ と，互いに素な和として表せる．

(b) $\beta < \min(Y^\alpha)$ なら，$Y^\beta = Y^\alpha$ となる．

ヒント　任意の $\iota \in Y^\alpha$ は κ_α-モデルで到達不可能基数となる．可測性の内部モデルの反復で κ_α-モデルより先のところは，U_α を用いることでこのモデルの中で定義できるから，19.7(c) をここで適用すると，任意の $\beta < \iota$ に対し，$i_{\alpha\beta}(\iota) = \iota$ となることが分かる．　⊣

次の総括的な定理は κ_α-モデル，および，それらの識別不可能クラスの大域的な一貫性を述べるものとなっている．

21.21 定理　$0^\dagger$ が存在すると仮定する．このときすべての α に対し，順序数のクラス Y^α で，次で特徴付けされるものが存在する：

(a) Y^α は閉非有界で，$\langle\{\kappa_\eta \mid \eta < \alpha\}, Y^\alpha\rangle$ は κ_α-モデルの二重識別不可能クラスとなっている．

(b) $\{\kappa_\eta \mid \eta < \alpha\} \cup Y^\alpha$ の κ_α-モデルでのスコーレム閉包は再びこのモデルとなる．

更に，任意の $\alpha \leq \beta$ に対し，$i_{\alpha\beta}$“$Y^{\alpha} = Y^{\beta}$ となり，π^{β}_{α} を $\{\kappa_\eta \mid \eta < \alpha\} \cup Y^{\beta}$ の κ_β-モデルでのスコーレム閉包から，これの推移的崩壊への崩壊の同型写像とするとき，$\pi^{\beta}_{\alpha}(\kappa_\eta) = \kappa_\eta$ が $\eta < \alpha$ に対し成り立ち，$\pi^{\beta}_{\alpha}(\kappa_\beta) = \kappa_\alpha$ かつ π^{β}_{α}“$Y^{\beta} = Y^{\alpha}$ となる．

証明 Y^{α} の特徴付けは 21.18 と 2 つの閉非有界クラスは多くの共通する元を持つことから導ける．

π^{β}_{α} に関する主張は，この推移的崩壊はある κ に対する κ-モデルとなっていなければならず，$\langle\{\pi^{\beta}_{\alpha}(\kappa_\eta) \mid \eta < \alpha\}, \pi^{\beta}_{\alpha}$“$Y^{\beta}\rangle$ がこの κ-モデルに対する，21.18(a)(b) を満たすものとなっている．この対の下の方の集合の順序型が α であることから，一意性により，$\kappa = \kappa_\alpha$ でなくてはならず，主張は再び一意性を用いることにより得られる． ⊣

このように $0^{\dagger}$ の存在は，可測性の内部モデルの生成と，それらの関係の簡明さに関する，驚くべき結論を持つことになる．21.17(a) の絶対性に関する結果により，各 α に対し，κ_α-モデルは $L[0^{\dagger}]$ の部分クラスになり，さらに，これは $L[0^{\dagger}]$ で，$\bigcup_\gamma \mathcal{M}(0^{\dagger}, \alpha, \gamma)$ として，つまり，順序型が α になっている識別不可能クラスの下の方のものをとり，上側のものを“引き延ばした”ものにより定義可能である．これにより得られる識別不可能クラスの体系は，21.21 で述べられているように超巾の反復とスコーレム閉包と密接に関連するものとなる．

予想されるように，非剛性による特徴付けが存在する：

21.22 演習 以下は同値である：

(a) $0^{\dagger}$ が存在する．

(b) ある κ に対し，κ-モデルが存在して，このモデルからそれ自身への初等的埋め込みで κ より大きな臨界点を持つようなものが存在する．

ヒント 順方向のためには，任意の α に対し，Y^{α} を $0^{\dagger}$ によって与えられる κ_α-モデルの閉非有界クラスとして，h を $\{\kappa_\eta \mid \eta < \alpha\} \cup Y^{\alpha}$ からそれ自身への順序を保存する写像で，$h(\kappa_\eta) = \kappa_\eta$ が すべての $\eta < \alpha$ に対し成り立ち，ある $\iota \in Y^{\alpha}$ に対し，$h(\iota) > \iota$ となっているようなものとする．このとき h によって κ_α-モデルからそれ自身への求めるような初等的埋め込みが得られる．

逆は 21.1 での議論をなぞることで確立できる：ある α に対し，k が κ_α-モデル $\langle L[U_\alpha], \in, U_\alpha\rangle$ からそれ自身への初等的埋め込みで，$\mathrm{crit}(k) = \rho > \kappa_\alpha$ となっているとする．k は ρ 上の $L[U_\alpha]$-超フィルター $W = \{X \in \mathcal{P}(\rho) \cap L[U_\alpha] \mid \rho \in k(X)\}$ を決定する．そこで，

(*) W は反復可能な $L[U_\alpha]$-超フィルターとなる

ことが示せればよい．このことから，W による非可算回の反復をおこなって 19.10 により $L[U_\alpha]$ での識別不可能クラスが得られ，21.9 の証明の議論とそれに続く分析により，$0^{\dagger}$ を得ることができる．

(*) を得るには，$L[U_\alpha]$ の W による超巾は整順的であることに注意して L に対する 21.2 と 21.3 での議論は，3.3(b) から得られる次の基本的な事実により，一般化することができることに注意すればよい：M と N が推移的で $j\colon M \prec N$, かつ $\xi \leq \kappa_\alpha$ に対し，$j(\xi) = \xi$ となるとき，$M = L[U_\alpha] \iff N = L[U_\alpha]$ となる．順方向は超巾の議論で必要

になり逆方向はスコーレム閉包の議論で必要となる． ⊣

21.1 に相当する同値命題がさらに存在する：これらのうちの一つは，21.4 に対応する，次のようなものとなっている．この結果は，μ が正則基数なら，μ^+ はジョンソン基数でない (8.17)，という事実を使えば，簡単な証明を与えることができる．

21.23 演習　ある κ に対し κ-モデルが存在してジョンソン基数 $\lambda > \kappa$ が存在するとする．また，$|\kappa|$ が特異基数のときには，$\lambda > \kappa^+$ となっているとする．このとき $0^\dagger$ が存在する．

ヒント　20.22 の筋にそって議論して，ここでの仮定と，正則基数の次の基数がジョンソン基数でない，という結果から，$V = L[U]$ を仮定せずに，正則基数 ν, $\kappa < \nu < \lambda$ で $\lambda \longrightarrow [\lambda]^{<\omega}_{\nu,<\nu}$ が成り立つものが存在することが示せる．したがって，埋め込み i が前と同じように定義できて，対応する $\mathrm{crit}(i) > \kappa$ 上の $L[U]$-超フィルター W は 21.1(b) → (c) の議論により整順的となる． ⊣

さらに洗練されたテクニックを用いると，$|\kappa|$ が特異基数であるときの条件を落すことができる (Donder-Koepke [83: 248])．21.4 との類推では，ジョンソン基数も非可算言語に対するチャングの仮説に類似の適当な命題により置き換えることができる．21.5 と直接の類似性を示す命題も，ここでの文脈で考えられる．さらに，21.6 での議論を採用することにより，21.22 でのようなすべての初等的埋め込みが，そこでの証明で述べられている h の形をしたものから惹き起こされることも示せる．

$0^\dagger$ は可測基数の存在を帰結するものではなく．単に可測性の内部モデルの存在を帰結するものである．次のものは，可測基数が存在する場合におけるクーネンによる指摘を，定式化を若干変えて述べたものである．

21.24 命題　(Kunen [70])．κ を可測基数として，$\langle L[U], \in, U\rangle$ を κ-モデルとする．このとき，次は同値である：

(a) $0^\dagger$ が存在する．

(b) $\kappa^{++L[U]} \leq 2^\kappa$.

証明　順方向は明らかである．すべての κ より大きい（本当の）基数は $0^\dagger$ で与えられる κ-モデルの識別不可能クラス Y^κ に含まれており，したがって，このモデルの中で巨大基数となっていることが分別不可能性の議論により容易に分かる．

逆方向については，まず，上の言い回しを続けて用いることにして，ある α に対し，$\kappa = \kappa_\alpha$ かつ $U = U_\alpha$ となっている．$\langle L[U], \in, U\rangle$ の反復は $L[U]$ の中で U を用いて定義できるから，19.7(a) をここで適用すると，$\kappa_{\alpha+\omega} < \kappa^{++L[U]}$ となることが分かる．また，F を $\{\kappa_{\alpha+n} \mid n \in \omega\}$ によって惹き起こされる $\kappa_{\alpha+\omega}$ 上のフィルターとするとき，つまり，

$$X \in F \quad \Leftrightarrow \quad \exists m \in \omega\ \{\kappa_{\alpha+n} \mid m \leq n \in \omega\} \subseteq X$$

とするとき，19.5 により $L[F]$ は $\kappa_{\alpha+\omega}$-モデルとなる．

ここで，W を任意の κ 上の κ-完備超フィルターとして，$j_W \colon V \prec M_W \cong \mathrm{Ult}(V, W)$ とする．このとき，仮定から，

$$\kappa_{\alpha+\omega} < \kappa^{++L[U]} \le 2^{\kappa} < j_W(\kappa)$$

となり，したがって，

$$M_W \models \text{ある } \rho < j_W \text{ に対し } \rho\text{-モデルが存在する } (\kappa)$$

となり，したがって初等的埋め込みにより，ある $\rho < \kappa$ に対し ρ-モデルが存在する．21.9 により，このことから $0^{\dagger}$ の存在が帰結できる． ⊣

クーネンが指摘しているように，このことから，**$\kappa^{+} < 2^{\kappa}$ となるような可測基数 κ が存在するなら，$0^{\dagger}$ が存在する**ことが分かる．これは，可測基数での強制法に対する本質的な障害の最初の徴候であった：5.17 での制限だけでなく，κ が可測基数であることは，$\mathcal{P}(\kappa)$ に対し，十分に大きな制約を果し，$\kappa^{+} < 2^{\kappa}$ を得るためには，より強い仮定が必要となり，おそらくは，強制法での新しいアプローチも必要である．そのようなアプローチの一つはシルバーによって発見されることになる（第 II 巻を参照）．

クーネンは彼の議論を精密化して，いくつかの仮定から，より強い結論を導き出している：

21.25 定理 (Kunen [71a]). κ に対し，次のうち少なくとも一つが成り立つと仮定する：

(a) κ は可測基数で $\kappa^{+} < 2^{\kappa}$ となる．

(b) すべての κ 上の κ-完備フィルターは κ 上の κ-完備超フィルターに拡張できる（つまり，κ は強コンパクトである）．

(c) κ^{+} 上に κ-完備超フィルター D で一様なもの，つまり，$X \in D$ なら常に $|X| = \kappa^{+}$ となるようなものが存在する．

このとき，任意の λ に対し，ZFC の内部モデルで λ が可測基数となるようなものが存在する．

このような結論が巨大基数の概念に対し帰結できるときには，この概念上のもっと本質的な超越性が獲得できることが経験的に予想される．このことは実際に内部モデルの理論の後の発展で 21.25(a) に対する無矛盾等価性の結果が確立されることにより立証されることになる（第 II 巻を参照）．

様々のダガー

$0^{\#}$ でと同じように，$0^{\dagger}$ の定式化は，自然なやり方で相対化できる．a を順序数の集合として，$\alpha = \cup a$ とする．a の **$\mathbf{EM}^2$ 青写真**とは，

$$\langle L_\zeta[U], \in, U, x_k, y_k, a, \xi \rangle_{k\in\omega, \xi\le\alpha}$$

という形の構造の理論のこととする．ここに ζ は極限順序数で，ある $\kappa > \alpha$ に対し，$\langle L_\zeta[U], \in, U, a, \xi \rangle_{\xi\le\alpha} \models$ 「U は κ 上の正規超フィルター」となっており，$\langle \{x_k \mid k \in \omega\}, \{y_k \mid k \in \omega\} \rangle$ は $\langle L_\zeta[U], \in, U, a, \xi \rangle_{\xi\le\alpha}$ の二重識別不可能集合で，すべての $k \in \omega$ に対し，

$$x_k < x_{k+1} < \kappa < y_k < y_{k+1}$$

となるものとする．$L[A,B]$ をここで予想されるような A と B から相対的に構成可能な内部モデル（つまり内部モデル M で $x \in M$ なら $A \cap x \in M$ かつ $B \cap x \in M$ となるもののうち最小のもの）で $L[A]$ と同じように (§3) 階層により定義されるものとする．§19で構築した可測性の内部モデルの理論は，内部モデル $\langle L[U,a], \in, U, a, \xi \rangle_{\xi \leq \alpha}$ で「U は κ 上の正規超フィルターで $\kappa > \alpha$」を満たすようなものの反復に適用できる．ここでもこのようなモデルは κ のみに依存するものとなる（つまり U には依存しない）．また，このようなモデルはすべて，互いに反復子となっている．$0^\dagger$ の理論は，多少の変更をほどこすことで，このようなものについて書き変えることができるから，十分な仮定のもとで，条件 (I)-(III) に対応する性質を満たすような，a に対する EM^2 青写真 $a^\dagger$ が一意に定められる．コーディングにより，$a^\dagger$ は $|\alpha|$ の部分集合と見なすことができる．これに関しては次のような 21.15(a) の類似の性質が典型的である：

21.26 定理　a は順序数の集合で $\alpha = \cup a$ とする．このとき $a^\dagger$ が存在するのは，内部モデル M で $a \in M$ となり，ある $U \in M$ に対し，$M \models$「U は $\kappa > \alpha$ 上の正規超フィルターで $\langle M, \in, U, a, \xi \rangle_{\xi \leq \alpha}$ は最小元が κ より大きな，非可算な識別不可能集合を持つ」となるものが存在するちょうどそのときである．

シャープのときと同じように，主に問題となるのは a が実数の場合である．議論の展開を $a \subseteq \omega$ から $a \in {}^\omega\omega$ に移行することで，上に述べたことは，実際にそのような a に対して適用できるようになる．

この節で見てきた諸結果は，クーネンの超巾の反復の方法の深さと豊かさを証明している．これらの結果が別のやり方でも証明されるかどうかにはかかわらず，超巾の反復の方法はこれらが最初に想起されたときの枠組として，大きく立ちはだかっている．内部モデルとそれらの埋め込みの強固な一様性は，可測性，$0^\#$ と $0^\dagger$ の一貫性と有効性をゆるぎない事実として示している．

広い意味で，この章では，ウラムによって確立された可測性の概念の，理論が急速に発展した 60 年代に開発された手法による，組織的な研究の第一歩について記述した．コーエンによる強制法の発明は飽和イデアル，実数値可測性，プリクリ強制による，相対的無矛盾性の研究をもたらし，スコットの結果 5.5 は超巾とその反復に対する関心に拍車をかけ，これが，初等的埋め込みを含む，より拡張された枠組での定義可能性の解析を誘発した：可測性の内部モデル，$0^\#$, $0^\dagger$ がそれである．この後者の研究の方向は，1970 年代中盤のイェンセンとドッドによる被覆定理と核モデルの研究（第 II 巻を参照）により精力的に押し進められることになる．それ以前では，巨大基数の強制法による解析が，強い仮説を含むシルバーとマギドア Magidor による決定的な無矛盾性の結果（これについても第 II 巻を参照）にむけて推進されることになる．次に，可測性のさらに細かな分析の先にある，これらの仮説を探究することになるが，そのなかでひときわ重要になるのは**超コンパクト性**である．

第 5 章　強い仮説

この章では，可測性を一般化するような強い仮説に対する基本的な理論を与える．§22 ではソロヴェイとラインハートによる超コンパクト性，大域的な反映の性質，超コンパクト性と強コンパクト性との関係について述べる．§23 ではラインハートの提唱から発展した，さらに強い仮説，つまり，拡張可能性と，一見拡張に見えるが実はクーネンの結果により矛盾であることが示されたものについて述べる．この後，§24 ではこの矛盾ぎりぎりに位置する仮定群を考察して，さらに n-膨大性とヴォピェンカの原理について述べる．§25 では，超コンパクト性の理論から派生した，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ の組合せ論的研究について述べ，§26 では，エクステンダーの基礎と，これに関連した，内部モデルの理論の主要な進展の突破口を与えることになる巨大基数について述べる．

§22　超コンパクト性

1960 年代終わりに，可測性が組織的に研究されていたころ，ソロヴェイと当時バークレイの大学院生だったラインハート William Reinhardt は可測性の自然なアイデアに導かれて，より強い仮説の研究に着手した．彼等は初等的埋め込みの概念を基礎にして，可測性の初等的埋め込みによる特徴付けの様々な一般化を考察した．これらの新しい仮説は簡明な記述を持ち，その動機も明白であり，ほどなく簡単だがエレガントな基本理論が確立されている．ここで目につくのは，これらの仮説は，無矛盾性の強さに関して線型の階層をなしていたことと，クーネンによる矛盾を示す結果が制約としての条件を与えたことであった．基本的な枠組からは，いくつもの興味深い問題と構造的な洗練により，いくつかの研究の方向が派生し，ほどなく，これらの新しい仮説による累積的階層での下の方での命題に関する無矛盾性の結果がいくつも確立されるようになる．これから後の 20 年に次々に得られてゆく附帯的な事実により，これらの仮説と可測性を通って上に延びる階層は可能なすべての無矛盾性の強さの測れる原理を枚挙する基準的なものさしとして広く認められるようになる．この節では，ソロヴェイとラインハートの超コンパクト性の概念について議論し，§§23, 24 ではラインハートの主要な提唱に起因する，より強い仮説について論じる．基礎的な理論は時期的には遅れて Solovay-Reinhardt-Kanamori [78] に現れるが，これがこれらの節での基本的な参考文献となる；Di Prisco-Marek [85a] も有用な情報源である．

強コンパクト性 (§4) がこの時期までに考察されたもののうちで可測性より強い概念で

あった．ソロヴェイとラインハートは独立に超コンパクト性を考案しているが，これは強コンパクト性をさらに強化するもので，超コンパクトという名称はそのことに由来する．κ が可測で，U が κ 上の κ-完備超フィルターであり，$j\colon V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V,U)$ なら，${}^{\kappa}M \subseteq M$ であったことを思い出そう．このことが，特に U が正規超フィルターである場合に，κ での反映の現象を呼び起すのであった (6.5)．これを一般化して，$\kappa \leq \gamma$ に対し，

κ は **γ-超コンパクト**　$\Leftrightarrow$　$j\colon V \prec M$ で
(a) $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ かつ $\gamma < j(\kappa)$,
(b) ${}^{\gamma}M \subseteq M$ となるものが存在する．

κ は**超コンパクト**　$\Leftrightarrow$　κ はすべての $\gamma \geq \kappa$ に対し γ-超コンパクト

とする．したがって，$\kappa \leq \gamma \leq \delta$ で κ が **δ-超コンパクトなら，κ は γ-超コンパクトである，また，κ が κ-超コンパクトであるのは κ が可測基数であるちょうどそのときである．** $j\colon V \prec M$ は，内部モデルの間の $\prec$ は $\prec_1$ のことであるという，5.1(c) での取りきめにより定式化されるわけだが，$\exists j$ はクラスを走る量化子となっているため上の定義は直接には定式化できない．理論を進めてゆくと超巾による特徴付けが得られ，これが後回しになった正しい定式化を与えることになる．とは言え，これらの概念の意味は初等的埋め込みによる定式化でより良く理解できるものとなっている．(b) が，M の元の γ-列は再び M の元になることを主張する決定的な閉包性の仮定となっている．特にこのことから $H_{\gamma^+} \subseteq M$ となることが帰結される．γ が基数のときだけ考察すれば十分であるが，このように一般的に定義しておくと，手続き上後で都合がよい．(a) では $\gamma < j(\kappa)$ は超コンパクト性の概念が強コンパクト性から進化した過程で継承されたものである．これを含めておくと具合がよいが，実は余分な条件となっていることが後で分かる：$j\colon V \prec M$ で，$\mathrm{crit}(j) = \kappa$ かつ ${}^{\gamma}M \subseteq M$ となるものに対しては，ある n に対し，n 番目の反復 j^n がこのような性質を持ち，さらに $\gamma < j^n(\kappa)$ となることが示せる (23.15 (a))．超コンパクト性と強コンパクト性の間の関係については後で詳しく議論することにして，まず超コンパクト性に関する基礎的な理論を確立することにする：

22.1 命題　κ を 2^{κ}-超コンパクトとする．このとき，κ 上の超フィルター U で，

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ は可測基数}\} \in U$$

となるものが存在する．特に，κ は κ 番目の可測基数である．

証明　$j\colon V \prec M$ を κ の 2^{κ}-超コンパクト性を例示するようなものとする．U を j から，

$$X \in U \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq \kappa \ \wedge\ \kappa \in j(X)$$

により定義されるものとすると，U は κ 上の超フィルターとなる．ところが，${}^{2^{\kappa}}M \subseteq M$ だから，κ 上の超フィルターはすべて M の元となることが容易に分かる．したがって，κ は M でも可測基数である．したがって，定義から $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ は可測基数}\} \in U$ となる．

⊣

22.2 命題 κ を γ-超コンパクトとして $2^\alpha = \alpha^+$ がすべての $\alpha < \kappa$ に対し成り立っているとする．このとき，$2^\beta = \beta^+$ がすべての $\beta \leq \gamma$ に対し成り立つ．

証明 $j\colon V \prec M$ を κ の γ-超コンパクト性を例示するようなものとする．5.8と同じように議論する．$\beta \leq \gamma < j(\kappa)$ と初等的埋め込みから，$(2^\beta)^M = \beta^{+M}$ が分かる．ところが，${}^\gamma M \subseteq M$ だから，$\mathcal{P}(\beta)^M = \mathcal{P}(\beta)$ となり，したがって，$2^\beta \leq (2^\beta)^M$ また $\beta^{+M} = \beta^+$ である． ⊣

超コンパクト性は大域的な反映の性質であるということを $A \prec_n V$ という概念，つまり，すべての Σ_n 論理式が A に対し絶対的であるということに関して表現することができる．よく知られたレヴィ Levy [65] による結果により，任意の $\kappa > \omega$ に対し，$H_\kappa \prec_1 V$ となる．

22.3 命題 κ が超コンパクトなら，$V_\kappa \prec_2 V$ となる．

証明 φ を Σ_2 論理式とする．例えば，簡単のために，φ は $\exists v_0 \psi(v_0, v_1)$ で，ψ は Π_1 とし，$x \in V_\kappa$ とする．$V_\kappa \models \varphi[x]$ なら，ある $y \in V_\kappa$ に対し，$V_\kappa \models \psi[y, x]$ となる．ところが κ は到達不可能基数だから，$V_\kappa = H_\kappa$ となり，上で述べたレヴィの結果により，$\psi[y, x]$ が成り立っていることが帰結できる．

逆に，$\varphi[x]$ が成り立っていると仮定する．z を $\psi[z, x]$ となるものとする．$\alpha > \mathrm{rank}(z)$ をとると，κ の $|V_\alpha|$-超コンパクト性から，$j\colon V \prec M$ で $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ かつ $z \in (V_{j(\kappa)})^M$ となるようなものがとれる．$j(x) = x \in V_\kappa = (V_\kappa)^M$ となることに注意する．ψ は Π_1 だから，$(V_{j(\kappa)} \models \varphi[x])^M$ となることがすぐに分かる．初等的埋め込みにより，このことから $V_\kappa \models \varphi[x]$ となるが，これが得たいことであった． ⊣

上の 3 つの補題は，κ に関する超コンパクト性より本質的にずっと弱い性質から導くことができる．これについては，26.6 を参照されたい．

次に，可測性での状況を一般化する形で，γ-超コンパクト性は超フィルターと超巾の言葉で特徴付けすることができる．これにより γ-超コンパクト性の概念，したがって，さらに超コンパクト性の概念の妥当な定式化が得られる．5.7 に関連した（そこでは $j``\kappa = \kappa$ だった）超巾の閉包性の性質に関する一般的な性質が後の結果の指針となっている．

22.4 命題 U を集合 S 上の ω_1-完備超フィルターとして，$j\colon V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V, U)$ とする．このとき：

(a) ある集合 X に対し，$j``X \in M$ となっていて，$Y \subseteq M$ が $|Y| \leq |X|$ を満たすなら，$Y \in M$ となる．

(b) すべての γ に対し，$j``\gamma \in M \quad \Leftrightarrow \quad {}^\gamma M \subseteq M$ となる．

(c) $j``(|S|^+) \notin M$.

(d) $U \notin M$.

証明 (a) 5.7(d) でのように議論する：Y を $\{[f_x] \mid x \in X\}$ と表す．$h\colon S \to \mathcal{P}(X)$ を $[h] = j``X$ となるようにとる．$g\colon S \to V$ を $i \in S$ に対し，$g(i)$ が領域 $h(i)$ を持つ関数で，$g(i)(x) = f_x(i)$ が成り立つものとする．このとき，すべての $x \in X$ に対し，

$[g](j(x)) = [f_x]$ となるから $\mathrm{ran}([g]) = Y$ となる．

(b) は (a) から帰結される．

(c) $[f] \in M$ を任意にとる．$A = \{i \in S \mid |f(i)| \leq |S|\} \in U$ なら，$\alpha \in |S|^+ - \bigcup\{f(i) \mid i \in A\}$ がとれるが，この場合には，$j(\alpha) \notin [f]$ となる．そうでなければ，$B = \{i \in S \mid |f(i)| > |S|\} \in U$ となるが，このときには，B 上の単射 h で，$h(i) \in f(i)$ がすべての $i \in B$ に対し成り立つものがある．したがって $[h] \in [f] - j``V$ となる．よって，いずれの場合にも，$[f] \neq j``(|S|^+)$ となる．

(d) 反対に $U \in M$ であると仮定してみると，$S = \bigcup U \in M$ だから，$\mathcal{P}(S) = U \cup \{S - X \mid X \in U\} \in M$ となる．したがって，$\mathcal{P}(S \times S) \in M$ となるが，この集合は S のすべての整列順序を含んでいるから，${}^S(|S|^+) \in M$ となることがすぐに分かる．ところが，任意の $\alpha < |S|^+$ に対し，$j(\alpha)$ は $\{[f] \mid f \in {}^S\alpha\}$ の順序型となるから，このような順序型の集合は U と ${}^S(|S|^+)$ から定義可能となる．つまり，$j``(|S|^+) \in M$ となるが，これは (c) に矛盾である．　⊣

(b) は超巾の閉包性を測るときの簡明な目安を与えることになる．(c) はこの方向の上限を確立し，(d) も，もう一つ別の上限を与える．

さて，$j\colon V \prec M$ を κ の γ-超コンパクト性を例示するものとする．このとき，$j``\gamma \in M$ となるから，(b) から（可測性に対する 5.6 を思い出すと）超フィルター U_j の以下のような定義の試みが示唆される：

$$X \in U_j \quad \Leftrightarrow \quad j``\gamma \in j(X)\,.$$

$\mathcal{P}_\nu S = \{x \subseteq S \mid |x| < \nu\}$ だったことを思い出そう．j と M の性質から，$|j``\gamma| < j(\kappa)$ が $M$ で成り立つことが分かるから，$j``\gamma \in (\mathcal{P}_{j(\kappa)} j(\gamma))^M$ となる．したがって，$\mathcal{P}_\kappa\gamma \in U_j$ となり，これを U_j のベースとなる添数集合としてとることができる．次の性質が成り立つ：

(i)　U_j は κ-完備超フィルターである．

(ii)　任意の $\alpha \in \gamma$ に対し，$\{x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma \mid \alpha \in x\} \in U_j$ である．

(iii)　任意の $\langle X_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle \in {}^\gamma U_j$ に対し，$\{x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma \mid x \in \bigcap_{\alpha\in x} X_\alpha\} \in U_j$ となる．

これらの性質から次の定義が動機付けられるが，後のために，任意の κ, 集合 S および $\mathcal{P}_\kappa S$ 上のフィルター F に対するものとして記述することにする．$\langle X_i \mid i \in S\rangle \in {}^S\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$ のとき，これの**対角共通部分**とは $\{x \in \mathcal{P}(S) \mid x \in \bigcap_{i\in x} X_i\}$ のことで，これを $\triangle_{i\in S} X_i$ で表す．

F は**良好**　⇔　F は κ-完備で，任意の $i \in S$ に対し，$\{x \in \mathcal{P}_\kappa S \mid i \in x\} \in F$

F は**正規**　⇔　F は良好で，任意の $\langle X_i \mid i \in S\rangle \in {}^S F$ に対し，$\triangle_{i\in S} X_i \in F$

とする．混乱しないためにあらかじめ注意しておくと，このような F の元はある集合 S の元ではなく，その部分集合を要素として持つものとなっている．また，多くの場合，S は順序数の集合であるが，このときには，$\mathcal{P}_\kappa S = [S]^{<\kappa}$ となる．しかし，前者の記法の方が，ここでの関連では標準的となっている．最後に，S が無限の順序数 γ のとき，

$\triangle_{\alpha\in\gamma}\{x\in\mathcal{P}_\omega\gamma \mid \alpha+1\in x\}$ は空集合となるから，$\mathcal{P}_\omega\gamma$ 上の正規フィルターは存在しない．

良好性は必要となる一般性を確保しているため，この新しい正規性の概念は，古いものの拡張となっている：

22.5 演習

(a) F を κ 上の正規フィルターとするとき，$\{X\subseteq\mathcal{P}_\kappa\kappa \mid X\cap\kappa\in F\}$ は $\mathcal{P}_\kappa\kappa$ 上の正規フィルターとなる．

(b) F を $\mathcal{P}_\kappa\kappa$ 上の正規フィルターとするとき，$F\cap\mathcal{P}(\kappa)$ は κ 上の正規フィルターとなる．

ヒント (b) では，$\alpha<\kappa$ に対し，$X_\alpha=\{x\in\mathcal{P}_\kappa\kappa \mid \alpha\subseteq x\}$ のとき，$\triangle_{\alpha<\kappa}X_\alpha=\kappa\in F$ となることに注意する． ⊣

集合 I 上のフィルター F と $X\subseteq I$ に対し，X が F-定常とは，$X\cap Z\neq\emptyset$ がすべての $Z\in F$ に対し成り立つことだったのを思い出そう．

22.6 演習 $\mathcal{P}_\kappa S$ 上の良好なフィルターが正規となるのは，X が F-定常で f が X 上の選択関数であるとき（つまり $f(x)\in x$ がすべての $x\in X-\{\emptyset\}$ に対し成り立つとき），$s\in S$ で $f^{-1}(\{s\})$ が F-定常となるようなものが常に存在する，ちょうどそのときである．

ヒント 5.10 でと同じように議論すればよい． ⊣

埋め込みから超フィルターが構成できたが，このプロセスはまず超フィルターをとることで逆転することができる．$\kappa\leq\gamma$ で U は $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターとする．特に $\kappa>\omega$ で，U は ω_1-完備だから，$j_U\colon V\prec M_U\cong\mathrm{Ult}(V,U)$ とする．id: $\mathcal{P}_\kappa\gamma\to\mathcal{P}_\kappa\gamma$ を恒等写像とするとき：

(i) $[\mathrm{id}]_U=j_U``\gamma$ で ${}^\gamma M_U\subseteq M_U$ となる．
(ii) $\mathrm{crit}(j_U)=\kappa$ で $\gamma<j_U(\kappa)$ である．

(i) は良好性から，$j_U``\gamma\subseteq[\mathrm{id}]_U$ となり，22.6 により，等式が成り立つことが分かる．${}^\gamma M_U\subseteq M_U$ となることは，このことから 22.4(b) により帰結できる．(ii) については，κ-完備性から，$\mathrm{crit}(j_U)\geq\kappa$ となる．一方 $\{x\subseteq\gamma \mid \mathrm{ot}(x)<\kappa\}\in U$ だから，$\mathrm{ot}([\mathrm{id}]_U)<j_U(\kappa)$ が M_U で成り立つが，$\gamma=\mathrm{ot}(j_U``\gamma)=\mathrm{ot}([\mathrm{id}]_U)$ である．

したがって次のような特徴付けが確立されたことになる：

22.7 定理 (Solovay, Reinhardt). $\kappa\leq\gamma$ のとき，κ が γ-超コンパクトとなるのは，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上に正規超フィルターの存在する，ちょうどそのときである． ⊣

すぐに指摘できることの一つは，超コンパクト性はそれより大きな巨大基数の存在を必要としない，ということである：

22.8 演習

(a) κ が超コンパクトで $\lambda>\kappa$ が到達不可能基数なら，$V_\lambda\models$「κ は超コンパクト」と

なる．

(b) Con(ZFC + $\exists\kappa$(κ は超コンパクト)) なら，Con(ZFC + $\exists\kappa$(κ は超コンパクト $\wedge\ \neg\exists\lambda(\lambda > \kappa\ \wedge\ \lambda$ は到達不可能))) が成り立つ． ⊣

22.7 により，「κ は γ-超コンパクト」は Δ_2^{ZF} であることも分かる：これが Σ_2^{ZF} であることは，$\exists x(x = V_{\gamma+5}\ \wedge\ \varphi(\kappa,\gamma,x))$ と表せることからよい．ただし，φ は，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターの存在を主張するものとする．「$y = V_\alpha$」は Π_1^{ZF} で (0.2) で φ はすべての量化子が $x = V_{\gamma+5}$ に制限された形の Σ_0 としてとることができる．これが Π_2^{ZF} であることは，φ を再び上のようなものとして，$\forall x(x = V_{\gamma+5} \rightarrow \varphi(\kappa,\gamma,x))$ とも表せることからよい．

このことから，γ-超コンパクト性の保存に関して便利な帰結が得られる：

22.9 演習　$\kappa \leq \lambda$ で κ は $\kappa \leq \gamma < \lambda$ となるすべての γ に対し，γ-超コンパクトとする．このとき，λ が超コンパクトなら κ は超コンパクトとなる．

ヒント　22.3 を用いて，$V_\lambda \models$「κ は超コンパクト」に留意すればよい．

あるいは，$\delta \geq \lambda$ に対して，$\mathcal{P}_\kappa\delta$ 上の正規超フィルターを，次のようにつなぎあわせて作ればよい：U を $\mathcal{P}_\lambda\delta$ 上の正規超フィルターとして，$x \in \mathcal{P}_\lambda\delta$ で $|x| \geq \kappa$ となるようなものに対し，D_x を $\mathcal{P}_\kappa x$ 上の正規超フィルターとする．W を

$$X \in W \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq \mathcal{P}_\kappa\delta\ \wedge\ \{x \in \mathcal{P}_\lambda\delta \mid |x| \geq \kappa\ \wedge X \cap \mathcal{P}_\kappa x \in D_x\} \in U$$

で定義すれば，W は $\mathcal{P}_\kappa\delta$ 上の正規超フィルターとなる． ⊣

これにより，κ が最小の超コンパクト基数なら Σ_3^{ZF} 文「超コンパクト基数が存在する」という文は V_κ では成り立たないから，その意味で 22.3 は最良の結果となっていることが分かる．

超コンパクト性は，直接に反映の性質によって特徴付けすることができる：

22.10 定理　(Magidor [71a])．κ が超コンパクトとなるのは，すべての $\eta > \kappa$ に対し，$\alpha < \kappa$ と，臨界点が δ となっている $e\colon V_\alpha \prec V_\eta$ で，$e(\delta) = \kappa$ となるようなものが存在する，ちょうどそのときである．

証明　順方向の証明のために，$\eta > \kappa$ とする．$j\colon V \prec M$ が κ の $|V_\eta|$-超コンパクト性を例示するものとなっているとする．$\bar{j} = j|V_\eta$ とおくと，$\bar{j}\colon V_\eta \prec (V_{j(\eta)})^M$ となることは容易に分かる．M が $|V_\eta|$-列に関して閉じていることから，帰納法により，$V_\zeta = (V_\zeta)^M \in M$ がすべての $\zeta \leq \eta$ に対して言える．したがって，$\bar{j} \in M$ で，$M \models$「$\bar{j}\colon V_\eta \prec V_{j(\eta)}$」である．したがって，$M \models$「$\alpha < j(\kappa)$ と臨界点 δ を持つ $e\colon V_\alpha \prec V_{j(\eta)}$ が存在して，$e(\delta) = j(\kappa)$ となる」となる．ここで，j が初等的埋め込みであることを用いると得たい結果がでる．

逆の証明には，$\gamma \geq \kappa$ とする．$\alpha < \kappa$ として，$e\colon V_\alpha \prec V_{\gamma+\omega}$ は臨界点 δ を持ち，$e(\delta) = \kappa$ となっているものとする．このとき，$e(\beta) = \gamma$ となるような β に対し，$\alpha = \beta + \omega$ となる．$\mathcal{P}(\mathcal{P}_\delta\beta) \subseteq V_\alpha$ で $e``\beta \in \mathcal{P}_\kappa\gamma$ となることに留意して，U を，

$$X \in U \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq \mathcal{P}_\delta\beta\ \wedge\ e``\beta \in e(X)$$

で定義する．このとき U は $\mathcal{P}_\delta\beta$ 上の正規超フィルターとなる．ところが，$U \in V_\alpha$ だから，$e(U)$ は $\mathcal{P}_{e(\delta)}e(\beta) = \mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターとなる． ⊣

これをさらに押し進めて，マギドアは Magidor [71a] で 2 階のレーベンハイム=スコーレムの性質に関して，最小の超コンパクト基数の特徴付けを与えている．

正規超フィルター

γ-超コンパクト性の $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターの存在による特徴付けを与え，これから直ちに得られる帰結をいくつか見たので，このような超フィルターの基礎理論を Solovay-Reinhardt-Kanamori [78] をなぞって展開することにする．

最初の命題は正規超フィルターに関するより詳しい情報を与えるものとなっている．

22.11 命題 $\kappa \leq \gamma$ で U は $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターとして，$j\colon V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V, U)$ で $|\gamma| = \lambda$ とする．このとき：

(a) $\alpha \leq \gamma$ に対し，$j``\alpha = [\langle x \cap \alpha \mid x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma\rangle]_U$ となり，$\alpha = [\langle \mathrm{ot}(x \cap \alpha) \mid x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma\rangle]_U$ となる．

(b) ${}^{\lambda^{<\kappa}}M \subseteq M$.

(c) $2^{\lambda^{<\kappa}} \leq (2^{\lambda^{<\kappa}})^M < j(\kappa) < (2^{\lambda^{<\kappa}})^+$.

証明 (a) 正規性から，$j``\gamma = [\mathrm{id}]_U$ である．ここに，$\mathrm{id}: \mathcal{P}_\kappa\gamma \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ は恒等写像とする．ここで $\alpha \leq \gamma$ に対し，$j``\alpha = j``\gamma \cap j(\alpha)$ かつ $\alpha = \mathrm{ot}(j``\alpha)$ に注意すればよい．

(b) 22.4(a) により，$j``\mathcal{P}_\kappa\gamma \in M$ を示せば十分だが，これは，

$$j``\mathcal{P}_\kappa\gamma = \mathcal{P}_\kappa j``\gamma = (\mathcal{P}_\kappa j``\gamma)^M \in M$$

によりよい．最初の等式は，κ-完備性から $j(x) = j``x$ がすべての $x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma$ に対し成り立つことから，二番目のものは $j``\gamma \in M$ と ${}^\gamma M \subseteq M$ からよい．

(c) (b) と $M \subseteq V$ から，$(\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\lambda))^M = \mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\lambda)$ だから，$2^{\lambda^{<\kappa}} \leq (2^{\lambda^{<\kappa}})^M$ が分かる．また，$j(\kappa)$ は M で到達不可能だから，$(2^{\lambda^{<\kappa}})^M < j(\kappa)$ となり，$j(\kappa) = \{[f]_U \mid f\colon \mathcal{P}_\kappa\gamma \to \kappa\}$ だから，$j(\kappa) < (2^{\lambda^{<\kappa}})^+$ が分かる． ⊣

(b) の主張は，ある状況においては，例えば，$\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$ のときには，より強い閉包性が得られる，ということである．

次に，正規超フィルター U が埋め込みから定義されているとき，この埋め込みと j_U との関係をより詳しく見てみることにする：$j\colon V \prec M$ が κ の γ-超コンパクト性を例示するものとなっているとして U を j から定義される $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の超フィルターとし，$j_U\colon V \prec M_U \cong \mathrm{Ult}(V, U)$ を対応するものとする．$k\colon M_U \to M$ を

$$k([f]_U) = j(f)(j``\gamma)$$

によって定義する．

22.12 補題 $|\gamma| = \lambda$ とおく．このとき：

(a) k は初等的埋め込みで，$j = k \circ j_U$ となる．

(b) $k(\alpha) = \alpha$ がすべての $\alpha < (2^{\lambda^{<\kappa}})^{+M_U}$ に対し成り立ち，$k(z) = z$ がすべての $z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\gamma)) \cap M_U$ に対し成り立つ．

(c) $(2^{\lambda^{<\kappa}})^+ = (2^{\lambda^{<\kappa}})^{+M}$ なら，$\mathrm{crit}(k) = (2^{\lambda^{<\kappa}})^{+M_U}$ となる．

証明　(a) これは，自然に証明できる (5.13(b))．

(b) $\alpha \leq \gamma$ に対しては 22.11(a) から，

$$k(\alpha) = k([\langle \mathrm{ot}(x \cap \alpha) \mid x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma\rangle]_U) = \mathrm{ot}(j``\gamma \cap j(\alpha)) = \alpha$$

となる．$\mathcal{P}(\gamma) \subseteq M_U$ に注意すると，このことから，すべての $x \in \mathcal{P}(\gamma)$ に対し，$k(x) = x$ となることが分かる（片方向は，$\alpha \in k(x)$ なら，$k(x) \subseteq k(\gamma) = \gamma$ から $k(\alpha) = \alpha$ となるから，$k(\alpha) \in k(x)$ となり，これから $\alpha \in x$ となることが分かるからよい）．$\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\gamma) \subseteq M_U$ に留意すると 22.11(b) により，今度は，このことから，すべての $y \in \mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\gamma)$ に対し，$k(y) = y$ となることが分かる（片方向は，$x \in k(y)$ なら，$k(y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}_{k(\kappa)}k(\gamma))^M = \mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\gamma) \subseteq M_U$ から，上の主張により $k(x) = x$ となるから，$k(x) \in k(y)$ となり，したがって，$x \in y$ が言えるからよい）．この議論をもう一度繰り返して，すべての $z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\lambda)) \cap M_U$ に対し，$k(z) = z$ となることが示せる．

$\alpha < (2^{\lambda^{<\kappa}})^{+M_U}$ に対し $k(\alpha) = \alpha$ となることも α に関する帰納法により示せる：$k(\alpha) = \alpha$ がすべての $\alpha < \beta$ に対し成り立つと仮定して，$\beta < (2^{\lambda^{<\kappa}})^{+M_U}$ とする．このとき，$z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\lambda)) \cap M_U$ と全単射 $f\colon z \to \beta$ で，$f \in M_U$ となるものがとれる．初等的埋め込みにより，$M \models k(f)\colon k(z) \to k(\beta)$ は全単射となっている．前の段落により，$k(z) = z$ である．さらに，任意の $y \in z$ に対し，

$$k(f)(y) = k(f)(k(y)) = k(f(y)) = f(y)$$

となる．最初の等式は前の段落により成り立ち，二番目のものは，k が初等的埋め込みであることにより，三番目のものは帰納法の仮定から成り立つ．したがって，$k(f) = f$ となるから，$k(\beta) = \beta$ である．

(c) については，(b) により，

$$(2^{\lambda^{<\kappa}})^{+M_U} < (2^{\lambda^{<\kappa}})^+ = (2^{\lambda^{<\kappa}})^{+M} = k((2^{\lambda^{<\kappa}})^{+M_U})$$

となることをいえばよいが，これは 22.11(c) から直ちに導け，最後の等式は k が初等的埋め込みであることから言える．　$\dashv$

今度は j 自身が $j_{\tilde{U}}\colon V \prec M_{\tilde{U}} \cong \mathrm{Ult}(V, \tilde{U})$ である場合を考える．ここに $\tilde{U}$ は $\mathcal{P}_\kappa\delta$ 上の正規超フィルターで $\delta \geq \gamma$ とする．このとき，

$$X \in \tilde{U} \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq \mathcal{P}_\kappa\delta \ \wedge\ j_{\tilde{U}}``\delta \in j_{\tilde{U}}(X),$$

$$Y \in U \quad \Leftrightarrow \quad Y \subseteq \mathcal{P}_\kappa\gamma \ \wedge\ j_{\tilde{U}}``\gamma \in j_{\tilde{U}}(Y)$$

となる．

$$\tilde{U}|\gamma = \{\{x \cap \gamma \mid x \in X\} \mid X \in \tilde{U}\}$$

とおくと，

$$U = \tilde{U}|\gamma$$

となることが，すぐに分かる．前の記法を使うと $\tilde{U}|\gamma = f_*(\tilde{U})$ となる．ここに，$f_*(U) = \{Y \mid f^{-1}(Y) \in U\}$ で $f\colon \mathcal{P}_\kappa\delta \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ は $f(x) = x \cap \gamma$ によって与えられる．対応する $k\colon M_U \prec M_{\tilde{U}}$ は，

$$k([\langle f(x) \mid x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma\rangle]_U) = [\langle f(x \cap \gamma) \mid x \in \mathcal{P}_\kappa\delta\rangle]_{\tilde{U}}$$

と記述できる．$\delta \geq 2^{\lambda^{<\kappa}}$ に対し，22.12(c) により，${}^\delta M_{\tilde{U}} \subseteq M_{\tilde{U}}$ から $\mathrm{crit}(k) = (2^{\lambda^{<\kappa}})^{+M_U}$ が導けることに注意する．

次に，可測基数の場合にすでにとりあげられていた，正規超フィルターの数に関する問題を，考察する．κ が可測基数のときには，20.11 により，内部モデルで，κ 上の正規超フィルターが一つしか存在しないようなものがある．また 17.8 により，強制法による拡大で，可能なもののうち最大の数である 2^{2^κ} 個の κ 正規超フィルターが存在するようなものがとれた．κ が 2^κ-超コンパクトなら，5.16 と 22.1 により，少なくとも 2 つの正規超フィルターが κ 上に存在する．片方は $\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ は可測基数$\}$ を含むもので，もう片方はこれを含まないものである．1967 年にソロヴェイと難波 Kanji Namba は独立に $(2^\kappa)^+$ 個の正規超フィルターが存在することを示した．この数年後，ソロヴェイは，実は κ 上の正規超フィルターは 2^{2^κ} 個存在することを示している．ある κ 上の正規超フィルターの数が 1 と 2^{2^κ} の間のものになり得るかどうか，という問題はミッチェル Mitchell [74] により解決されている．可測性より強い仮説に対する内部モデルの理論の発展の最初の段階で，κ に対する十分な仮説（2^κ-超コンパクト性で十分である）のもとで，$\tau \leq \kappa$ であるか，τ が κ^+ か κ^{++} のどちらかなら，ちょうど τ 個の κ 上の正規超フィルターの存在するような内部モデルが存在することを，ミッチェルは示している．κ 上の正規超フィルターがちょうど 2 つ存在するようなモデルでは，このうちの一つは，集合 $\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ は可測基数$\}$ を含み，もう一つはこれを含まないものとなっている．ボルドウィン Stewart Baldwin は，Baldwin [85] でミッチェルの仕事をふまえて，κ に対する同じような強い仮説を仮定すると，$\tau < \kappa$ なら，κ 上の正規超フィルターがちょうど τ 個あり，κ が唯一の可測基数であるようなモデルが存在することを，示している．初めに κ が可測基数であることだけを仮定したときに，どのようにして，このような無矛盾性の結果を得ることができるかは分かっていない．

上で述べたソロヴェイの結果を，ここでは，自己言及と反映に関連する議論で確立される構造的な結果からの帰結として，もっと一般的な形で与えることにする．再び，ω_1-完備超フィルター W に対して，$j_W\colon V \prec M_W \cong \mathrm{Ult}(V, W)$ とする．

22.13 定理 (Solovay). $\kappa \leq \gamma$ で，κ は $2^{|\gamma|^{<\kappa}}$-超コンパクトとする．このとき，任意の $A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\gamma))$ に対し，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルター S で $A \in M_W$ となるものが存在する．

証明 U を $\mathcal{P}_\kappa(2^{|\gamma|^{<\kappa}})$ 上の正規超フィルターとして $j\colon V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V, U)$ とする．$\varphi(v_0, v_1, v_2)$ を，$\varphi[A, \kappa, \gamma] \iff$「$A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\gamma))$ だが，任意の $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィル

ター W に対し，$A \notin M_W$ となる⌉，が成り立つような論理式とする．$\exists v_0\varphi[\kappa,\gamma]$ となるのは，ちょうど $M \models \exists v_0\varphi[\kappa,\gamma]$ となるようなときであるように，φ が選ばれているとしてよい：$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\gamma)) \subseteq M$ だから，任意の $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルター W に対し $W \in M$ となる．さらに，すべての関数: $\mathcal{P}_\kappa\gamma \to V_\kappa$ は M の元となり，

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\gamma)) \cap M_W \subseteq (V_{\gamma+4})^{M_W} \subseteq (V_{j_W(\kappa)})^{M_W} = j_W(V_\kappa)$$

だから，$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\gamma)) \cap M_W$ は M で定義可能となるからである．

次に，$\exists v_0\varphi[\kappa,\gamma]$ だったと仮定してみよう．このときには，$M \models \exists v_0\varphi[\kappa,\gamma]$ となる．22.12とこれに続く議論を思い出して，$U|\gamma$ を $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターで U に対応するものとし，$j_0\colon V \prec M_0 \cong \mathrm{Ult}(V, U|\gamma)$ として，$k\colon M_0 \prec M$ を $j = k \circ j_0$ となるものとする．$k(\kappa)=\kappa$ で，$k(\gamma)=\gamma$ であるから，k が初等的埋め込みであることから，$A_0 \in M_0$ で $M_0 \models \varphi[A_0,\kappa,\gamma]$ となるものが存在する．$k(A_0)=A_0$ となるから，$M \models \varphi[A_0,\kappa,\gamma]$ となり，したがって，$\varphi[A_0,\kappa,\gamma]$ である．ところが，$A_0 \in M_0 = M_{U|\gamma}$ だから，これは矛盾である．　⊣

22.14 系　$\kappa \le \gamma$ で κ が $2^{|\gamma|^{<\kappa}}$-超コンパクトなら，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上に $2^{2^{|\gamma|^{<\kappa}}}$ 個の正規超フィルターが存在する．したがって，κ が 2^κ-超コンパクトなら，κ 上に 2^{2^κ} 個の正規超フィルターが存在する．

証明　$|\gamma|=\lambda$ とおく．まず，W が $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターなら，

$$|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\lambda)) \cap M_W| \ \le (2^{2^{\lambda^{<\kappa}}})^{M_W} < j_W(\kappa) < (2^{\lambda^{<\kappa}})^+$$

となることが，22.11(c) でと同じ議論で分かることに注意する．22.13 により，

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\gamma)) = \bigcup\{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\gamma)) \cap M_W \mid W \text{ は } \mathcal{P}_\kappa\gamma \text{ 上の正規超フィルター}\}$$

となる．したがって，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターが $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\gamma))| = 2^{2^{\lambda^{<\kappa}}}$ 個存在しなくてはならないことが分かる．

二番目の命題は，$\kappa^{<\kappa}=\kappa$ となっていることに注意すると，22.5(b) から導かれる．　⊣

歴史的には，マギドアが Magidor [71] で最初に κ が超コンパクトなら，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターが $(2^{|\gamma|^{<\kappa}})^+$ 個存在することを示している．さらにもう一つの系として，これとは別の意味での正規超フィルターの豊富さを示すことができる：

22.15 演習　$\kappa \le \gamma$ で κ が $2^{|\gamma|^{<\kappa}}$-超コンパクトなら，

$$(2^{|\gamma|^{<\kappa}})^+ = \sup(\{j_W(\kappa) \mid W \text{ は } \mathcal{P}_\kappa\gamma \text{ 上の正規超フィルター}\})$$

となる．

ヒント　片方向は 22.11(c) からでる．逆方向は，$\xi < (2^{|\gamma|^{<\kappa}})^+$ だとするとき，$A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\gamma))$ を $\xi < (2^{|\gamma|^{<\kappa}})^{+L[A]}$ となるものとして，22.13 により $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルター W で $A \in M_W$ となるものをとる．このとき $\xi < j_W(\kappa)$ を示せばよい．　⊣

22.14の証明から，κ が 2^κ-超コンパクトなら，κ 上の正規超フィルターで，$\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ は可測基数$\}$ を含む正規超フィルターが 2^{2^κ} 個存在することが分かる．ところが，不思議なことに，次の問題は未解決のままである：

22.16 未解決問題 κ が 2^κ-超コンパクトのとき，$\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ は可測基数でない$\}$ を含む κ 上の正規超フィルターが複数個存在するか？

$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の良好超フィルターや正規超フィルターの理論はこのような方向で Julius Barbanel [82, 82a, 85] や阿部吉弘 Yoshihiro Abe [84] によって研究されている．関連する研究での中心的な問題は $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ の組合せ論的な観点からのものである（§25 を参照）．

強コンパクト性

超コンパクト性の，反映の性質に関する簡明な議論からなる基礎理論を確立できたので，さらに Solovay-Reinhardt-Kanamori [78] にそって，今度は，強コンパクト性の，この文脈上での特徴付けと，その超コンパクト性との関連について見てみることにする．

4.1 の証明で見たように，強コンパクト性の研究において，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の良好超フィルターは自然な役割を演じる．$\omega < \kappa \leq \gamma$ に対し，

$$\kappa \text{ は } \gamma\text{-コンパクト} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_\kappa\gamma \text{ 上に良好超フィルターが存在する}$$

とする．したがって，κ が **γ-超コンパクトなら，κ は γ-コンパクトとなる**；また，κ が **κ-コンパクトとなるのは κ が可測基数であるちょうどそのときである**．さらに，$\kappa \leq \gamma \leq \delta$ で，κ は δ-コンパクト，U を $\mathcal{P}_\kappa\delta$ 上の良好超フィルターとすると，$U|\gamma$ は $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の良好超フィルターとなり，したがって，κ は γ-コンパクトとなる．正規性を仮定しない良好性については，次のような特徴付けが可能である．集合 S と $E \subseteq \mathcal{P}(S)$ に対し，E により生成された S 上のフィルターは，$\{X \subseteq S \mid \exists Y \in E(Y \subseteq X)\}$ のことだったことを思い出そう．ただし，これを考えるのはこの集合が非単項な真のフィルターとなるときのみとする．

22.17 定理 $\kappa \leq \gamma$ のとき以下は同値である：

(a) κ は γ-コンパクトである．

(b) $j\colon V \prec M$ で $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, かつ，任意の $X \subseteq M$, $|X| \leq \gamma$ に対し，$Y \in M$ で，$Y \supseteq X$ かつ $M \models |Y| < j(\kappa)$ となるようなものが存在する，という性質を持つものがとれる．

(c) 任意の集合 S とすべての高々 $|\gamma|$ 個の集合から生成されているような S 上の κ-完備フィルターに対し，このフィルターの拡張で S 上の κ-完備超フィルターとなるものが存在する．

証明 (a) → (b) U を $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の良好超フィルターとして，$j\colon V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V, U)$ とする．$X \subseteq M$ で $|X| \leq \gamma$ となっているとする．例えば $X = \{[f_\alpha]_U \mid \alpha < \gamma\}$ として，$F\colon \mathcal{P}_\kappa\gamma \to V$ を $F(x) = \{f_\alpha(x) \mid \alpha \in x\}$ で定義し，$Y = [F]_U$ とする．このとき，良好性により $Y \supseteq X$ となり，$M \models |Y| < j(\kappa)$ である．最後に，κ-完備性と $X = \kappa$ に対す

る前の議論から，$\mathrm{crit}(j) = \kappa$ となることが分かる．

(b) → (c) F を集合 S 上の κ-完備フィルターで，$|E| \leq \gamma$ となる $E \subseteq \mathcal{P}(S)$ により生成されているものとする．(b) により，$Y \supseteq j``E$ で，$Y \in M$ かつ $M \models |Y| < j(\kappa)$ となるものがとれる．M において $j(F)$ は $j(\kappa)$-完備で $j(F) \cap Y$ は濃度が $j(\kappa)$ より小さい部分集合となっている．よって，$c \in M$ で，$c \in \bigcap(j(F) \cap Y)$ となるものが存在する．c は，$X \in U \iff X \subseteq S \wedge c \in j(X)$ により，S 上の超フィルター U を生成するが，U が F を拡張する S 上の κ-完備超フィルターとなっていることは容易に確かめられる．

(c) → (a) 集合族 $\{\{x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma \mid \alpha \in x\} \mid \alpha < \gamma\}$ によって生成される，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の κ-完備フィルターを $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の κ-完備超フィルターに拡張すればよい． ⊣

22.18 系 κ が強コンパクトとなるのは，κ がすべての $\gamma \geq \kappa$ に対し γ-コンパクトとなるちょうどそのときである．

証明 4.1 からよい． ⊣

ここで後に導入された概念の方がより強いものとなっている，ということを見ることができる：ソロヴェイとラインハートは独立に，正規性の条件により 22.17(b) で $Y = X$ とれるように，超コンパクト性を導入したのであった．これは，22.1 で見たように，明快な超越性を生み出し，タルスキーの次のような問題に対する暫定的な解答を与えることになった：**最小の強コンパクト基数は常に最小の可測基数より大きくなるか？** ヴォピェンカとフルバチェクの結果 5.8 を可測性の内部モデルの存在とあわせると，可測基数は必ずしも強コンパクトである必要はないことが分かり，クーネンの結果 21.25 により，無矛盾性の強さで強コンパクト性は可測性より真に強いことも分かる．しかし，タルスキーの問題自身は答が得られないまま残された．

超コンパクト性に概念の中心を移行させると，問題も違った観点から見えてきた．可測基数 κ 上の正規超フィルターを構成するプロセスは容易なものであるのに対し，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の超フィルターを良好なフィルターから出発して構成しようとすると予期しない困難が立ちはだかることになる．しかし，経験が十分に蓄積がされていない段階では，コンパクト性と超コンパクト性は類似の感触を持っていたため，ソロヴェイはこれらが等価であるという仮説を立てた．この仮説は否定されることになるのであるが，この分野の初期の仕事はこの仮説から触発されるところが大きかった．数年のうちに，相対的無矛盾性の結果により得られた雑多な事実が増えてゆくにつれて，超コンパクト性は，やがて出現することになる巨大基数の階層における，可測性の正しい一般化として認められるようになってゆく．

強コンパクト性は，それでもなお，特にその組合せ論的な帰結により，ひきつづき重要な仮説とみなされることになる．ケトーネン Jussi Ketonen [72] はこの概念をもう一つ別の特徴付けにより明確化している：**$\kappa \leq \lambda$ が両方とも正則なら，κ が λ-コンパクトとなるのは，すべての $\kappa \leq \mu \leq \lambda$ となる正則な μ に対し，μ 上の一様な κ-完備超フィルターが存在する，ちょうどそのときである．** これはクーネンの仮説を立証することになり，強コンパクト性を任意の大きさの基数上の κ-完備超フィルターの存在に帰着させることになる．この前に，ソロヴェイは超コンパクト性と特異基数問題との関係の最初の徴候を見いだしていたが，ケトーネンの証明のアイデアを用いることで，彼はこの関係を強コンパク

ト性からの次のような問題の解決へと精密化することができた（第II巻を参照）：κ は λ^+-コンパクトで λ は強極限となっている特異基数 $>\kappa$ のとき，$2^\lambda = \lambda^+$ が成り立つ．

強コンパクト性と超コンパクト性が等価であるというソロヴェイの仮説は，彼の学生であったメナス Telis Menas により 1972 年の末に否定されている．

22.19 定理 (Menas [74]).

(a) κ が可測基数で，強コンパクト基数の極限なら，κ は強コンパクトとなる．

(b) κ が (a) のような基数のうち最小のものなら，$\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ は可測基数$\}$ は κ の定常な部分集合とならない．特に κ は 2^κ-超コンパクトではない．

証明 (a) U を κ 上の κ-完備超フィルターで，

$$A = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ は強コンパクト}\} \in U\,.$$

となるものとする（このような U は容易に構成することができる：W を任意の κ 上の κ-完備超フィルターとして，$f\colon \kappa \to A$ を単射とし，$U = \{X \subseteq \kappa \mid f^{-1}(X) \in W\}$ ととればよい）．ここで，$\gamma \geq \kappa$ とする．各 $\alpha \in A$ に対し U_α を $\mathcal{P}_\alpha\gamma$ 上の良好超フィルターとし，D を

$$X \in D \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq \mathcal{P}_\kappa\gamma \ \wedge\ \{\alpha \in A \mid X \cap \mathcal{P}_\alpha\gamma \in U_\alpha\} \in U$$

で定義する．このとき，D は $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の良好超フィルターとなることが容易に確かめられる．

(b) $A = \{\alpha < \kappa \mid \alpha$ は可測基数$\}$ とおき，$f \in {}^\kappa\kappa$ を

$$f(\alpha) = \sup(\{\beta < \alpha \mid \beta \text{ は強コンパクト}\})$$

で定義する．このとき，κ に関する仮定により，f は A 上で退行的となるが，f は κ のどんな非有界集合上でも定値をとることはあり得ない．したがって A は定常でないことが分かる．したがって，A は κ 上のどの正規超フィルターにも含まれえず，22.1 により κ は 2^κ-コンパクトでないことが分かる． ⊣

(a) の証明での D は良好超フィルターが比較的簡単なやり方で組み立てられることを示しており，(b) は正規性がその帰結としての反映の性質を含めて全く別の事柄であることを示している．阿部 Abe [85] は D が正規でないことを指摘している．23.8 では，要素の数が可測個になる強コンパクト基数の極限の集合が与えられる．

メナスの 1973 年のバークレイでの学位論文では，良好超フィルターと正規超フィルターとの間のギャップが種々のやり方により具体的に示されており，始まりつつあった $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ の組合せ論への貢献がなされている（Menas [74, 76] —— §25 を参照）．この仕事の大きな部分は強制法にあてられている：彼は超コンパクト性を保存する手法を開発し (Menas [76a])，22.19 で，可能性の糸口をつかみ，ちょうど一つ強コンパクト基数がありそれが超コンパクトでないという状況の相対的無矛盾性を確立している (Menas [74])．

マギドア Menachem Magidor は彼の 1972 年のヘブライ大学での超コンパクト性に関する学位論文の仕事 —— このうち Magidor [71, 71a] はすでに引用した —— に続き，強コンパクト性の変化に富んだ性質に関する重要な結果を確立している．マギドアはすぐに巨大

基数の研究をリードする主要な集合論の研究者の一人となっている．彼の初期におけるいくつかの相対的無矛盾性の結果での超コンパクト性の毅然とした応用は，超コンパクト基数の重要性と効力を立証し，集合論の研究を無矛盾性に関して強い命題の探究へとおしあげていった．彼は1972年の中盤には次の定理 Magidor [76] を確立している：

> κ が超コンパクトなら，強制法による拡大で，κ は超コンパクトのままだが，最小の強コンパクト基数ともなるようにできる．

この後1973年の初めに，メナスの結果22.19と相対的無矛盾性の結果に触発されて，マギドア Magidor [76] は次を確立している：

> κ が強コンパクトなら，強制法による拡大で，κ は強コンパクトのままだが，最小の可測基数ともなるようにできる．

この結果は，強コンパクト性を超コンパクト性からもっとも鋭利に分離するものとなっており，意外にも前に述べたタルスキーの問題の否定的な解ともなっている．マギドアの諸結果の証明については第II巻を参照されたい．

強コンパクト性に関するいくつかの基本的な問題は未解決のまま残された．次はマギドアの無矛盾性の結果によっても解決されていない：

22.20 未解決問題　次の理論は無矛盾等価か？

(a) ZFC + $\exists\kappa$(κ は超コンパクト).
(b) ZFC + $\exists\kappa$(κ は強コンパクト).

κ 上にたくさんの正規超フィルターが存在するという状況は反映の性質の議論により確立されていたが，この議論の柔軟性の欠如から問題22.16が導き出されていたのだった；他の手法はあり得るのか？

22.21 未解決問題　κ が強コンパクトなら，そのことから，κ 上に2つ以上の正規超フィルターが存在することが帰結できるか？

最後に，次の問題は22.2と関連するもので，強制法による可能性を問うものともなっている：

22.22 未解決問題　(Woodin). κ が強コンパクトで，すべての $\nu < \kappa$ に対し，$2^\nu = \nu^+$ が成り立つなら，GCH が成り立つか？

§§25, 26では超コンパクト性の研究に関連した2つの異なる方向での発展について述べる．最初の方では $\langle \kappa, < \rangle$ の理論の類推に基礎をおく，$\langle \mathcal{P}_\kappa \gamma, \subset \rangle$ の組合せ論的な研究である —— この類推は最初は正規超フィルターとの関連で意識されたものであった．二番目の節では，初等的埋め込みの基礎的な分析を展開し，これに対応する γ-超コンパクト性の弱いバージョンを考察する．可測性とは違い，γ-超コンパクト性の自然な内部モデルは存在しない：素直な試みはうまく行かない．例えば $\kappa < \lambda$ で U が $\mathcal{P}_\kappa \lambda$ 上の正規超フィルターのときには，$L[U] = L$ となってしまう (25.8) が，§26でのアプローチでは，適度な強さを持つ仮説の内部モデルへと至ることができる．

集合論が 1970 年代に無矛盾性に関して強い組合せ論的命題の研究へと進展してゆくと，強制法による様々な結果により，超コンパクト性は相対的無矛盾性に関して十分に強い仮説として確立されるようになる．しかしながら，相対的無矛盾性のより精密な研究に必要な内部モデルの理論が欠けている，ということに加えて，超コンパクト性からは，定義可能な実数の集合に関して，可測性から帰結できること以上には，何も実質的な直接の帰結が得られないように思われた．初期における，ソロヴェイ Solovay [69: 60] の一つの楽天的な仮説は，超コンパクト基数が存在するなら，$L(\mathbb{R})$ のすべての実数の集合は完全集合の性質を持つ，というものであった．1980 年代中盤のおどろくべき発展により，この仮説や，それよりもっと強い命題（$\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ —— §32 を参照）が§26 でのより弱い仮定から導けることが確認された．しかし，決定的なテクニックが開発されたのは，超コンパクト性による，もっと大掛りな枠組においてであって，弱い仮定は相互関係をもっと精密に解明しようとする努力の結果として得られたにすぎなかった．これらの仮定に対して，無矛盾等価の結果が確立され，対応する内部モデルの理論が整備されるにつれ，閉包性の条件をともなった初等的埋め込みに基づく強い仮説の，本質的な必然性は，疑う余地のないものとなっていったのである．

§23　拡張可能性から矛盾へ

超コンパクト性よりもっと強い巨大基数の仮説はラインハート William Reinhardt の提唱に端を発している．集合の概念を広義のクラスあるいは性質と組にして研究するというのが，ラインハートの仕事で繰り返し現れるテーマの一つになっている．彼は，そのような概念に基づく，ZFC の様々な拡張を考察しており，到達不可能基数が ZFC の自然なモデルを与えるように，強い巨大基数も，そのようにして得られる理論の自然なモデルを与えるようなもの，という観点から研究されている．

1967 年のバークレイでの学位論文（Reinhardt [70] を参照）で，ラインハートは，アッカーマンの集合論 A に関する結果を得ている．ZFC とは全く違う立場から，A は外延的に決定される広義のクラスを対象として持つユニヴァースに「集合である」という述語を加えたものとなっている．この述語を $x \in V$ で表すことにして，A の基本図式は：$X \subseteq V$ が V の要素のみをパラメタとして用いて（述語 V は用いずに）定義可能なら，$X \in V$ となる，というものである．A* で A に V の元に関する基礎の公理を付け加えたものを表すことにする．レヴィとヴォートは ZF のときと同じように，A* は A と相対的無矛盾性となるが，A* では $\{V\}, \mathcal{P}(V), \mathcal{P}(\mathcal{P}(V))$ といったクラスの存在が示せることを指摘している．他方レヴィは，$\mathcal{L}_\in$ 文の V への制限が A* で証明可能なら，σ は ZF でも証明可能となることを示している．後にラインハートはこれの逆も確立している．したがって，特に A* と ZF は無矛盾等価である．彼はまた，$0 < \eta < \alpha < \beta$ で，

$$(*) \qquad \langle V_{\alpha+\eta}, \in, x\rangle_{x\in V_\alpha} \equiv \langle V_{\beta+\eta}, \in, x\rangle_{x\in V_\alpha}$$

（ここに $\equiv$ は初等的同値性を表す）なら，$\langle V_{\beta+\eta}, \in, V_\alpha\rangle$ は，V_α を集合であることを表す述語 V と解釈することにより A* のモデルとなることを示している．これより前にレヴィは

この結果を $\eta = 1$ である場合に示している．ラインハートは (*) を満たす $0 < \eta < \alpha < \beta$ は，ここで動機を与える場合となっている $\eta \in \omega$ のときには，β が§6で述べたような十分に強い記述不可能性の仮定を満たすことから導けるということを指摘している．

彼の学位論文の終わりで，ラインハートは，後にクーネンによって矛盾であることが示されることになる，ある公理を考察している．この劇的な展開については，本節の後半で論じる．この公理は，一見アッカーマンの集合論の拡張に見えるものの提唱となっており，集合論の中では次のように述べることができる：(*) の動機を与える $\eta = 1$ の場合をを拡張して各 "クラス"$X \subseteq V_\alpha$ に対し，これに対応する解釈 $j(X) \subseteq V_\beta$ を結びつけ，

$$\langle V_{\alpha+1}, \in, x, X\rangle_{x \in V_\alpha, X \subseteq V_\alpha} \equiv \langle V_{\beta+1}, \in, x, j(X)\rangle_{x \in V_\alpha, X \subseteq V_\alpha}$$

とできる．このことから，$j\colon V_{\alpha+1} \prec V_{\beta+1}$ で，$\mathrm{crit}(j) = \alpha$ とならなくてはいけないことは容易に分かる．これが，ラインハートのアイデアのシルバーによる定式化であった．その後，ラインハートは任意の $\eta > 0$ について：

κ は **η-拡張可能**　$\Leftrightarrow$　ζ と $j\colon V_{\kappa+\eta} \prec V_\zeta$ で
　　$\mathrm{crit(j)} = \kappa$ かつ $\eta < j(\kappa)$ となるものが存在する

κ は**拡張可能**　$\Leftrightarrow$　すべての $\eta > 0$ に対し κ は η-拡張可能

を考察している．したがって，埋め込みは集合であるものを考えているが，その領域と値域の構造は，それらがユニヴァースの始片である，という究極的な閉包の性質を持っている．$\eta \geq \kappa \cdot \omega$ なら，$\kappa + \eta = \eta$ となるから，一番目の定義の形が問題となるのは η が小さなものに限る．$\eta < \kappa$ については，$\zeta = j(\kappa) + \eta$ となることは明らかだから，$\eta < \omega$ での状況を一般化して，η-拡張可能性は，強い意味で $(\eta+1)$-階論理で記述できる性質が V_κ と $V_{j(\kappa)}$ の間で保たれることを主張するものとなっている．$\eta < j(\kappa)$ は $\eta = 1$ での場合から派生している．この条件は定義に付け加えておくと具合がよいが，実は全面的な拡張可能性の定義には，不要である (23.15(b))．

シルバーの 1-拡張可能性はすでに大変強いものとなっている：

23.1 命題　κ が 1-拡張可能なら，κ は可測で，κ 上の超フィルター U で，

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ は可測}\} \in U$$

となるものがある．

証明　$j\colon V_{\kappa+1} \prec V_{j(\kappa)+1}$ で $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ となっているとする．$\mathcal{P}(\kappa) \subseteq V_{\kappa+1}$ だから，いつものように j により正規超フィルターが

$$X \in U \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq \kappa \ \wedge\ \kappa \in j(X)$$

によって定義できる．ところが $U \in V_{j(\kappa)+1}$ だから，$V_{j(\kappa)+1} \models$「κ は可測」となり，したがって定義から，$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ は可測}\} \in U$ となる．　$\dashv$

すぐ後で拡張可能性から超コンパクト性が帰結されることを示すが，それだけでなく，こ

れらの外延はお互いに密接に関連していることも分かる．しかしながら，超コンパクト性が，強コンパクト性を強めるという，どちらかというと実際的な立場から得られていたのに対し，ラインハートが拡張可能性を導入したときの動機は彼の集合の概念に対する分析に基づくものであった．この動機をここでの文脈の中で述べるために，もう少し彼の仕事を追ってみることにする．

ラインハートは Reinhardt [74] で，シェーンフィールドの集合存在原理に基づく集合論 S を定式化している．S も外延的に決定される要素を持ったユニヴァースを与え，述語 V を持ち，実際にアッカーマンの A を拡張するものともなっている．しかしラインハートは S では，V を "存在する" 集合の集まりで，ユニヴァースは "仮想の" 集合からなるものと見なしている ——「實體と仮想」というわけである．シェーンフィールドの原理は：ある（仮想の） Y に対し，$X \subseteq Y$ となっており，X が V の元のみをパラメタとして定義可能なら，$X \in V$ となる，と述べられる．S* を S に対し A* が A と対するのと同様の関係にあるようなものとすると，$\mathcal{L}_{\in}$ の文 σ の V への制限は，σ が ZF で証明可能なちょうどそのときに S* で証明可能となる，ということをラインハートは指摘している．

その後，ラインハートは，性質の概念を広げることで S* をさらに拡張して，理論 S^+ を導入している．彼はまず仮想の集合に対する述語 U と "存在する集合に関する性質" を表す，もう一つの述語 P を導入する．彼がここで提唱した新しい主要原理は，各々の，存在する集合からなる仮想の集合は存在する集合に関する性質に対応する，というものである．つまり，任意の $w \subseteq V$ に対し，$Q \in P$ で $w = V \cap Q$ となるものが存在する．その後，$\langle V_\beta, D, \in, V_\alpha \rangle$ という形をした構造で，V_β は U の解釈，$D \subseteq V_{\beta+1}$ は P の解釈とし，V_α は V の解釈とするとき，この構造が S^+ のモデルとなるのは，

(a) Q' が $\langle V_\beta, \in, Q \rangle_{Q \in D}$ で定義可能なら，$Q' \in D$ となり，
(b) $D \cap V_\beta = V_\alpha$ で，
(c) $V_{\alpha+1} = \{Q \cap V_\alpha \mid Q \in D\}$

となる，ちょうどそのときであることを，示している．(a) は必要となる性質の全体を確保し，(b) は (a) のもとでのシェーンフィールドの原理を表現し，(c) がラインハートの新しい原理の表現となっている．彼はこれらの条件から，α は可測で，集合 $\{\xi < \alpha \mid \xi$ は可測$\}$ を含む正規超フィルターを持つことが帰結されることを示しているが，$j\colon V_{\kappa+1} \prec V_{j(\kappa)+1}$ が κ の 1-拡張可能性を例示するものとなっていれば，$\langle V_{j(\kappa)}, j``V_{\kappa+1}, \in, V_\kappa \rangle$ がこれらの条件を満たすことは容易に確かめられる．

集合の概念に基づく巨大基数の公理についての，ラインハートの最も詳しくかつ直接的なステートメントは，Reinhardt [74a] で述べられている．ここでは形式的な記述ではなく ZFC から出発して，前にはもっと複雑な形式化により追究ていたアイデアについて述べ進んでいる．彼は，到達不可能基数，マーロ基数，記述不可能基数を動機づける反映の論法におけるクラス On の役割について考察した後，$V_{\mathrm{On}+1}$ や $V_{\mathrm{On}+\mathrm{On}}$ といったものを新しく可能にするというアイデアの仮想的具体化として，V と On を定数として導入している．カントルの絶対に対する信条は集合からなるユニヴァースはすべての可能性を包含するものでなければならなかったから，彼の新しい仮想的な集合のユニヴァースを形式的

に言いなおしたものでも，V からのパラメタを許しても，これと同じようなものではなくてはならない：

$$\forall x \in V(\varphi^V[x] \ \leftrightarrow \ \varphi[x]) .$$

と論じている．

次に，ラインハートはこのような考察をクラスと集合の理論で任意のクラス $X \subseteq V$ に対し拡張する．真のクラス X の集合 x との本質的な相違は，もっとたくさんの順序数があったとしても，x はまったく同じ要素を持つことになるが，一方 X はそのときには新しい要素を持つことになる，と彼は論じている．これを形式的に具現されたユニヴァースで X の拡張を $j(X)$ と書くことにより，次のような図式に到達する：

$$(\dagger) \qquad \forall x \in V \forall X \subseteq V(\varphi^{\mathcal{P}(V)}[x, X] \ \leftrightarrow \ \varphi[x, j(X)]) .$$

これはまさに前に述べた，シルバーの 1-拡張可能性の定式化をうながしたところの，ラインハートの学位論文での，アッカーマンの A の拡張に対応するものである．この原理は，集合は境界がはっきりしていて，外延により決定されるのに対し，性質としてのクラスは本質的に内包的な性格を持つものである，という一貫した主張と相容れるものとなっている．

全面的な拡張可能性にむけて，ラインハートは，累積的階層を，形式的に具現されたユニヴァースでは $V = V_{\mathrm{On}}$ を越えて先に延びてゆくものと考えただけでなく，これらの先の様々なレヴェルが具現されたものであるとしてとらえている．カントルの考えを越える新しい対象を導入することは，集合の概念の一般性をやぶるものとなるかもしれないが，ラインハートは，“このことの悲しみをやわらげるには，一般性を集合の概念の広がりに求めるのではなく，集合の理論の応用性に求めることにあるのだと考えればよい” と提案している (Reinhardt [74a: 198])．これは，ZF の公理は V に制限された形のものだけでなく，直接すべて S*から導き出される，という Reinhardt [74: 13] での指摘を思い起こさせる．λ を On より大きな形式的な順序数として，V_λ をこれに対応するものとする．ラインハートは，具現された世界で，$V_{\mathrm{On}'}$ は $V = V_{\mathrm{On}}$ に対応し，$V_{\lambda'}$ は V_λ に対応して，対応 $j \colon V_\lambda \to V_{\lambda'}$ では $x \in V$ に対しては $j(x) = x$ で，$j(\mathrm{On}) = \mathrm{On}'$ となり，理論は保存されると論じている：

$$j \colon V_\lambda \prec V_{\lambda'} \text{ で } \mathrm{crit}(j) = \mathrm{On} \text{ かつ } j(\mathrm{On}) = \mathrm{On}' \text{となるものが存在する．}$$

また $\lambda = \mathrm{On} + 1$ に対する (†) の類推から，$\lambda < j(\mathrm{On})$ となる．これは，もちろん（少なくとも $\lambda \geq \mathrm{On} \cdot \omega$ となっているのきには），On の λ-拡張可能性の主張となっている．

Reinhardt [80] での必然性の演算子を持つ性質の理論は，ラインハートのアイデアの最も完成され洗練された記述となっている．ここでは，性質は，豊かな外延的な実体としてとらえられており，必然性演算子はこの外延的な実体の媒介として用いられる．ここで述べられていることの特色は，拡張可能性を定式化するにふさわしい表現の強さであった．もっとも，彼はそこで一つの簡単なバージョンの扱いを示唆したのみであったのだが．

次に，拡張可能性の，他の仮説，特に，超コンパクト性との関係を記述する．§22 でと同じように，Solovay-Reinhardt-Kanamori [78] がここでも基本的な参考文献となる．

簡単な補題から，手始めの考察が得られる．

23.2 補題 $\mathcal{L}_\in$ の論理式 $\varphi(v_0, v_1)$ で，任意の $\alpha < \beta$ に対し，

$$V_\beta \models \varphi[\alpha, x] \quad \Leftrightarrow \quad x = V_\alpha$$

となるものが存在する．

証明 次の論理式を考える：

ψ_1: f は関数 $\wedge\ \mathrm{dom}(f) \in \mathrm{On}\ \wedge$
$\forall\gamma \in \mathrm{dom}(f)(f(\gamma) = \bigcup\{\mathcal{P}(f(\xi)) \mid \xi < \gamma\})$.

ψ_2: $v_0 = \mathrm{dom}(f)\ \wedge\ v_1 = \bigcup\{\mathcal{P}(f(\gamma)) \mid \gamma \in \mathrm{dom}(f)\}$.

ψ_3: $v_0 = \mathrm{dom}(f) + 1\ \wedge\ v_1 = \mathcal{P}(\bigcup\{\mathcal{P}(f(\gamma)) \mid \gamma \in \mathrm{dom}(f)\})$.

ψ_4: $v_0 = \mathrm{dom}(f) + 2\ \wedge\ v_1 = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup\{\mathcal{P}(f(\gamma)) \mid \gamma \in \mathrm{dom}(f)\}))$.

ψ_1 は f がランク階層の通常の帰納的定義を満たすことを主張しており，したがって，$\gamma \in \mathrm{dom}(f)$ に対し，$f(\gamma) = V_\gamma$ となる（ランク関数の言葉で別証明することも可能である —— 0.2 を参照）．

$\varphi(v_0, v_1)$ を $\exists f(\psi_1 \wedge (\psi_2 \vee \psi_3 \vee \psi_4))$ とする．これが求めるものであることを示すために，$\alpha < \beta$ としてみる．$V_\beta \models \varphi[\alpha, x]$ なら $x = V_\alpha$ となることは容易に分かる．逆を示すために，$x = V_\alpha$ であると仮定する．f が ψ_1 を満たせば，$f \in V_{\mathrm{dom}(f)+3}$ となることは直ぐに分かる．また，$\mathrm{dom}(f)$ が極限順序数なら，$f \in V_{\mathrm{dom}(f)+1}$ となる．したがって，$\alpha + 2 < \beta$ であるか，α が極限順序数のときには，$V_\beta \models \exists f(\psi_1 \wedge \psi_2)[\alpha, x]$ が成り立つ．残りの場合については次のように証明する：α が非極限順序数で，$\alpha + 2 = \beta$ あるいは，$\alpha + 1 = \beta$ となっており，$\alpha - 1$ が極限順序数なら，$f \in V_\beta$ で $\mathrm{dom}(f) = \alpha - 1$ となり，ψ_1 を満たすようなものが存在するから，$V_\beta \models \exists f(\psi_1 \wedge \psi_3)[\alpha, x]$ となる．最後に，α が非極限順序数で，$\alpha + 1 = \beta$ となり，$\alpha - 1$ も非極限順序数の場合には，$f \in V_\beta$ で $\mathrm{dom}(f) = \alpha - 2$ となり，ψ_1 を満たすものが存在する．したがって，$V_\beta \models \exists f(\psi_1 \wedge \psi_4)[\alpha, x]$ となる． ⊣

23.3 命題 κ が η-拡張可能で，$0 < \delta < \eta$ なら，κ は δ-拡張可能である．

証明 $j\colon V_{\kappa+\eta} \prec V_\zeta$ を κ の η-拡張可能性を例示するものとする．補題から，$j(V_{\kappa+\delta}) = V_{j(\kappa+\delta)}$ となる．したがって，論理式を相対化することにより，$j|V_{\kappa+\delta}\colon V_{\kappa+\delta} \prec V_{j(\kappa+\delta)}$ となることが示せるから，δ-拡張可能性が確かめられる：任意の論理式 $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ と $V_{\kappa+\delta}$ に含まれる集合 $x_1, \ldots, x_n$ に対し，

$$\begin{aligned} V_{\kappa+\delta} \models \varphi[x_1, \ldots, x_n] \quad &\Leftrightarrow \quad V_{\kappa+\eta} \models \varphi^{V_{\kappa+\delta}}[x_1, \ldots, x_n] \\ &\Leftrightarrow \quad V_\zeta \models \varphi^{V_{j(\kappa+\delta)}}[j(x_1), \ldots, j(x_n)] \\ &\Leftrightarrow \quad V_{j(\kappa+\delta)} \models \varphi[j(x_1), \ldots, j(x_n)] \end{aligned}$$

となるからである． ⊣

κ の超コンパクト性と κ より上に到達不可能基数が存在しないことは無矛盾 (22.8) だが，κ

の拡張可能性は κ より上にたくさん巨大基数が存在することを帰結する：$j\colon V_{\kappa+1} \prec V_{j(\kappa)+1}$ が κ の 1-拡張可能性を例示しているとするとき，κ は可測だから，$\mathcal{P}(j(\kappa)) \subseteq V_{j(\kappa)+1}$ により，$j(\kappa)$ は V で到達不可能となる．さらに，23.1 と初等的埋め込みにより，$\{\alpha < j(\kappa) \mid \alpha$ は可測$\}$ は $j(\kappa)$ で非有界となる．同様に，$j\colon V_{\kappa+2} \prec V_{j(\kappa)+2}$ が κ の 2-拡張可能性を例示しているとき，$\mathcal{P}(\mathcal{P}(j(\kappa))) \subseteq V_{j(\kappa)+2}$ だから，$j(\kappa)$ はそれ自身 V で可測となる．このようにして，拡張可能性はどんどん強い仮定を上方に投影する．これらの考察により拡張可能基数の存在が累積的階層の高いレヴェルに強く影響することが分かり，η-拡張可能性が，γ-超コンパクト性のときとは違い，超フィルターの存在により記述できないことの理由もここにある．

次に拡張可能性の，強コンパクト性のもとの定式化の高階版による特徴付けを与える．このマギドアによる結果は，拡張可能性が前にあった概念の直接的な一般化であるという意義を与えている．言語 $L_{\lambda\mu}$ は§4 で定義されていた；$1 \leq n \in \omega$ に対し，言語 $L^n_{\lambda\mu}$ は，$L_{\lambda\mu}$ を，最高で n 次の高階変数を許すことで拡張したものである．タイプ $i+1$ の変数の解釈は，これが $\mathcal{P}^i(D)$ を走るものとする．ここに D は構造の領域である．**充足可能性**と **ν-充足可能性**は $L^1_{\lambda\mu} = L_{\lambda\mu}$ の場合と同様に定義できる．

κ は $L^n_{\lambda\mu}$-コンパクト　$\Leftrightarrow$　$L^n_{\lambda\mu}$ 文の任意の集合が κ-充足可能なら充足可能となる．

したがって，$\kappa > \omega$ で κ が $L^1_{\kappa\kappa}$-コンパクトとなるのは，κ が強コンパクトとなる，ちょうどそのときである．

23.4 定理　(Magidor [71a]). $\kappa > \omega$ に対し，次は同値である：

(a) κ は拡張可能である．

(b) すべての $1 \leq n \in \omega$ に対し，κ は $L^n_{\kappa\kappa}$-コンパクトである．

(c) κ は $L^2_{\kappa\omega}$-コンパクトである．

証明　まず κ が拡張可能であると仮定し，$1 \leq n \in \omega$ で，Σ は κ-充足可能な $L^n_{\kappa\kappa}$ 文の集合だとする．言語を算術化することより，Σ の元は集合であるとしてよい．ここに論理記号は V_κ の元でコードされているとする．極限順序数 $\eta \geq \kappa \cdot \omega$ を十分に大きくとって，$|\Sigma| \leq \eta$ かつ $V_\eta \models$「Σ は κ-充足可能」となるようにする．η-拡張可能性により，$j\colon V_\eta \prec V_\zeta$ で，$\mathrm{crit}(j) = \kappa$ かつ $\eta < j(\kappa)$ となるものがとれる．このとき，$V_\zeta \models$「$j(\Sigma)$ は $j(\kappa)$-充足可能」となる．$j``\Sigma \subseteq j(\Sigma)$ となることに注意すると，$j``\Sigma \in V_\zeta$ である．よって，$|j``\Sigma| \leq \eta < j(\kappa)$ となるが，$\zeta$ は極限順序数でなければならないから，これは $V_\zeta$ で成り立つ．したがって，$V_\zeta \models$「$j``\Sigma$ はモデル A を持つ」となる．この場合，A は本当に $j``\Sigma$ のモデルとなっている．ところが，$j``\Sigma$ の論理式は，Σ の論理式の非論理記号の呼びかえをおこなって得られるようなものにすぎないから，A は Σ のモデルでもあることが分かる．以上で κ が $L^n_{\kappa\kappa}$-コンパクトであることが示せた．

証明を完成させるには，あとは κ が $L^2_{\kappa\omega}$-コンパクトなら，拡張可能となることを示す．そこで，$\eta \geq \kappa \cdot \omega$ とする．ζ と $j\colon V_\eta \prec V_\zeta$ で，$\mathrm{crit}(j) = \kappa$ かつ $\eta < j(\kappa)$ となるようなものがみつかればよい．$x \in V_\eta$ と $\alpha \leq \eta$ に対し，互いに異なる定数記号 $\dot{x}$, と c_α を用意

し，Σ を

$$\langle V_\eta, \in, x\rangle_{x\in V_\eta}$$

の $L^2_{\kappa\omega}$ 理論に，各 $\alpha<\beta\le\eta$ に対する文「$c_\alpha\in\dot{\kappa}\ \wedge\ c_\alpha\in c_\beta$」を加えたものとする．このとき Σ は κ-充足可能となるから，仮定により充足可能である．Σ には，Π_1 文 σ で，任意の推移的集合 X に対し，$X\models\sigma\ \Leftrightarrow$ ある α に対し $X=V_\alpha$ となる，が成り立つようなものが含まれている（0.2 を参照）．また，Π_1 文 τ で $\in$ が整順的であることを主張するものがとれる．したがって，推移的崩壊をとると Σ は

$$\langle V_\zeta, \in, \overline{x}, \gamma_\alpha\rangle_{x\in V_\eta,\alpha\le\eta}$$

という形のモデルを持つことが分かる．ここに γ_α は c_α の解釈である．$j\colon V_\eta\to V_\zeta$ を $j(x)=\overline{x}$ で定義すると，明らかにこれは初等的埋め込みとなっている．また，すべての $\alpha<\kappa$ に対し，Σ は，$L_{\kappa\omega}$ 文

$$\forall v(v\in\dot{\alpha}\ \leftrightarrow\ \bigvee\nolimits_{\xi<\alpha} v=\dot{\xi})$$

を含んでいるから，帰納法により，j は κ 上恒等写像となっていることが分かる．最後に，$\{\gamma_\alpha\mid\alpha\le\eta\}$ は 順序型が $\eta+1>\eta$ の $j(\kappa)$ の部分集合だから，$\eta<j(\kappa)$ が分かる．$\dashv$

拡張可能性は，超コンパクト性よりずっと超現実的な野望を反映するものとなっているわけであるが，次の 2 つの結果では，これらの局所バージョンは互いに密接に関連していることが示される．

23.5 演習　κ が $|V_{\kappa+\eta}|$-超コンパクトで，$\eta<\kappa$ なら，κ 上の正規超フィルターで

$$\{\alpha<\kappa\mid\alpha\text{ は }\eta\text{-拡張可能}\}\in U$$

となるものが存在する．

ヒント　22.10 の順方向でと同じように議論すればよい．$\dashv$

23.6 命題　κ が η-拡張可能で，$\delta+5\le\eta$ なら，κ は $|V_{\kappa+\delta}|$-超コンパクトである．したがって，もし κ が拡張可能なら，κ は超コンパクトである．

証明　$j\colon V_{\kappa+\eta}\prec V_\zeta$ を κ の η-拡張可能性を例示するものとする．$j(\kappa)$ は（V で）到達不可能で $\delta<j(\kappa)$ だから，$|V_{\kappa+\delta}|<j(\kappa)$ である．したがって，23.2 により，$j(V_{\kappa+\delta})=V_{j(\kappa+\delta)}$ だから，$j``V_{\kappa+\delta}\in\mathcal{P}_{j(\kappa)}V_{j(\kappa+\delta)}$ となる．次に，$X\subseteq\mathcal{P}_\kappa V_{\kappa+\delta}$ とする．このとき，$X\in V_{\kappa+\eta}$ となるから，$j(X)$ は定義されている．任意の $x\in\mathcal{P}_\kappa V_{\kappa+\delta}$ に対し，ある $\beta<\kappa$ と全単射 $f\colon\beta\to x$ によって $|x|<\kappa$ が示されているとき，$f\in V_{\kappa+\delta+3}\subseteq V_{\kappa+\eta}$ となることに注意する．したがって，$V_{\kappa+\eta}\models\forall x\in X(|x|<\kappa)$ となる．j は初等的埋め込みだから，$j(V_{\kappa+\delta})=V_{j(\kappa+\delta)}$ となることに再び注意すると，$j(X)\in\mathcal{P}_{j(\kappa)}V_{j(\kappa+\delta)}$ となることが分かる．

ここで U を

$$X\in U\quad\Leftrightarrow\quad X\subseteq\mathcal{P}_\kappa V_{\kappa+\delta}\ \wedge\ j``V_{\kappa+\delta}\in j(X)$$

により定義する．上の注意を考慮すると，U が $\mathcal{P}_\kappa V_{\kappa+\delta}$ 上の正規超フィルターとなることは容易に示せる．例えば，κ-完備性を示すには，$\beta < \kappa$ で $\{X_\alpha \mid \alpha < \beta\} \subseteq U$ なら，$\langle X_\alpha \mid \alpha < \beta \rangle \in {}^\beta\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa V_{\kappa+\delta}) \subseteq V_{\kappa+\delta+5} \subseteq V_{\kappa+\eta}$ に注意すればよい．　⊣

上の 5 は列をコードすることにより，さらに小さくすることができる．拡張可能基数が超コンパクトであることは，22.10 でと同じようにして示すこともできる．

超コンパクト性と 1-拡張可能性の組合せは，すでに超コンパクト性を超越するものとなっている：

23.7 命題　κ が超コンパクトで 1-拡張可能なら，κ 上の正規超フィルター U で，

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ は超コンパクト }\} \in U$$

となるものが存在する．特に，最小の超コンパクト基数は，1-拡張可能ではない．

証明　$j\colon V_{\kappa+1} \prec V_{j(\kappa)+1}$ を κ の 1-拡張可能性を例示するものとして，U を j からいつものようにして定義される κ 上の正規超フィルターとする．$j(\kappa)$ は到達不可能基数だから，$\kappa \leq \gamma < j(\kappa)$ に対し，$V_{j(\kappa)+1} \models$「κ は γ-超コンパクト」となる．したがって，

$$A = \{\alpha < \kappa \mid \text{すべての } \alpha \leq \gamma < \kappa \text{ に対し，} \alpha \text{ は } \gamma\text{-超コンパクト }\} \in U$$

となる．ところが，κ は超コンパクトだから，22.9 により，すべての $\alpha \in A$ は超コンパクトとなる．　⊣

実は，これにより，メナスの 22.19 のために十分な数の巨大基数が供給されることが分かる：

23.8 演習　23.7 の結果は以下のように強めることができる：

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ は超コンパクトで，超コンパクト基数の極限となっている }\} \in U. \quad ⊣$$

一方，超コンパクト性は，以下の意味で，これより強い従兄弟をたぐり返すものとなっている：

23.9 演習

(a) $\kappa < \lambda$ として κ は拡張可能，λ は超コンパクトなら，$V_\lambda \models$「κ は拡張可能」となる．

(b) Con(ZFC + $\exists\kappa$(κ は拡張可能)) なら，Con(ZFC + $\exists\kappa$(κ は拡張可能 $\wedge$ $\neg\exists\lambda$($\lambda > \kappa$ $\wedge$ λ は超コンパクト))) である．

ヒント　(a) には，「$x = V_\alpha$」が Π^{ZF}_1 であったことを思い出して，「κ は拡張可能」が Π^{ZF}_3 となることを確かめ，これに 22.3 を適用すればよい．(b) には，(a) と 22.9 を用いればよい．　⊣

したがって，拡張可能性が種々の巨大基数からなる真のクラスの存在を帰結する一方，この帰結には超コンパクト性は含まれていない．

おしまいに，次の結果は 22.3 に対応するものとなっている：

23.10 命題　κ が拡張可能なら，$V_\kappa \prec_3 V$ となる．

証明　φ を Σ_3 として，例えば簡単のために，これが $\exists v_0\psi(v_0, v_1)$ という形をしていて，ψ は Π_2 であるとし，$x \in V_\kappa$ とする．22.3 から，$V_\kappa \models \varphi[x]$ なら，$\varphi[x]$ となることが分かる．逆の証明には，いくらでも大きな到達不可能基数 $\lambda > \kappa$ で，$V_\kappa \prec V_\lambda$ となるものがある，という拡張可能性から容易に導きだせる命題を使えばよい：

$\varphi[x]$ として，y を $\psi[y, x]$ となるものとする．$\lambda > \kappa$ を到達不可能基数で，$V_\kappa \prec V_\lambda$ かつ $y \in V_\lambda$ となるものとする．ψ は Π_2 で $V_\lambda = H_\lambda$ だから，22.3 の前で述べたレヴィの結果の下方向により，$V_\lambda \models \psi[y, x]$ となる．ところが，このとき，$V_\lambda \models \varphi[x]$ となるから，$V_\kappa \models \varphi[x]$ である．　⊣

23.11 演習　$\kappa < \lambda$ として $V_\lambda \models$「κ は拡張可能である」で，λ は拡張可能なら，κ は拡張可能である．

ヒント　「κ は拡張可能」は Π_3^{ZF} であることを用いて，22.9 でと同じように証明すればよい．　⊣

これにより，κ が最小の拡張可能基数なら，「拡張可能基数が存在する」は V_κ では成り立たないから，この意味で，23.10 は最良の結果になっていることが分かる．

主に Solovay-Reinhardt-Kanamori [78] から引用した以上の様々な結果は，拡張可能性が超コンパクト性を越えるものである一方，これらの概念が互いに深く関連するものともなっていることを，示している．2 つの概念のうち，超コンパクト性の方が主に集合論で注目されるようになり，いくつかの無矛盾性の結果での出発点としての仮説として用いられているのに対し，拡張可能性は視野からはずれてしまっている．局所的な拡張可能性が局所的な超コンパクト性からの帰結である，という 23.5 での簡単な結果がこのことの理由を物語っている，と考えることができよう．

クーネンの定理のいくつかの証明

ラインハートは彼の学位論文の最後で，アッカーマンの集合論の拡張のアイデアの強い表現となる次の公理を簡単に考察している：$j\colon V \prec V$ が存在する．ラインハートが Reinhardt [74a: 200] で注意しているように，これは拡張可能性の拡張と見ることもできる：このような j に対し $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ として，任意の順序数 η に対して，$j|V_{\kappa+\eta}\colon V_{\kappa+\eta} \prec V_{j(\kappa+\eta)}$ となるから，$\eta < j(\kappa)$ という条件をとりあえず保留すれば，j がすべての η に対して機能することになる．また，もともとの動機とは別であるが，$j\colon V \prec V$ は，可測性から超コンパクト性の各段階を経て先に延びてゆく行きさきの内部モデルの閉包性の諸条件のなかで，究極のものとなっている．

ラインハートの提唱は，劇的な事態の展開をうながすことになる．初めのいくつかの結果がすでに疑わしさをにおわせはじめていたが，クーネンは，ZFC で $j\colon V \prec V$ はあり得ないことを証明した：

23.12 定理　(Kunen [71b]). $j\colon V \prec M$ とすると，$M \neq V$ である．

クラス j 上の量化 "$\forall j$" は ZFC では定式化できないから，この結果は各々の j に対する定理をまとめた図式と見なされるべきものである．クーネンの証明は，実際には，集合に

関する簡潔な命題を導くものとなっている（23.14(a) を参照）.

23.12 は巨大基数の企ての上限となった．$j\colon V \prec V$ は初等的埋め込みの値域のモデルの閉包性の条件というアイデアの頂点をなすものになるはずだった；もっと強い仮説を定式化するには，これとは全く別の角度からのアイデアをさがす必要がありそうであった；等々．ところが，そうはならず，クーネンの結果の明快な主張により，この状況は迅速にくずされ，彼の結果によって，ここでの文脈はシャープに規定され，この特別の意味での ZFC の完備化が存在することが示されたのであった．このような形の結果が出ることはまったく予想外であったが，この結果のもとの証明はかなりアド・ホックな感じのするものであったにもかかわらず，以来，ここで確立されたことよりもっと強い矛盾を示す結果が現れることはなかった．

23.12 に対しては，複数の証明を与える．最初のものは，もとの証明であるが，これは，Erdös-Hajnal [66] での組合せ論での結果を用いている．この結果は，無限的な演算が許される場合には，すべての無限基数でジョンソン代数が存在することを示しており，それ自身，ジョンソン基数 (§8) との関連において興味のある命題となっている．任意の順序数の集合 x と関数 f に対し，

f は x **に対する ω-ジョンソン**　$\Leftrightarrow$　$f\colon [x]^\omega \to x$ かつ，任意の $y \subseteq x$ で $|y| = |x|$ となるものに対し，$f``[y]^\omega = x$ となる

とする．x に対する ω-ジョンソン関数が存在することと，$|x|$ に対して ω-ジョンソン関数が存在することは同値である．また，§8 の記法を用いると，基数 κ に対しては，κ に対し，ω-ジョンソン関数が存在することは，$\kappa \not\longrightarrow [\kappa]^\omega_\kappa$ と同値である．次の証明は，Galvin-Prikry [76] からとってきたものであるが，これのアイデアは Galvin [65] に見いだすことができる．

23.13 定理　(Erdös-Hajnal [66])．任意の λ に対し，λ に対する ω-ジョンソン関数が存在する．

証明　$x, y \in [\lambda]^\omega$ に対し，$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x$ と y が共通の後部を持つ，つまり，ある $\alpha < \cup x$ に対し，$x - \alpha = y - \alpha$ となる，とする．このとき $\sim$ は $[\lambda]^\omega$ 上の同値関係となるから，各同値類 E から代表元 $x_E \in E$ がとれる（ここが，この証明で AC を用いている場所である）．さて，任意の $x \in [\lambda]^\omega$ に対し，これの同値類を E として，$\alpha \in x_E$ を $x_E - (\alpha+1) = x - (\alpha+1)$ となる最小のものとし，$g(x) = \alpha$ とおく．

証明を終えるには，$A \in [\lambda]^\lambda$ で任意の $B \in [A]^\lambda$ に対し，$g``[B]^\omega \supseteq A$ となるようなものが見つかればよい．このような $A$ に対して $\omega$-ジョンソンとなるような関数は $g$ から容易に得られるからである．そこで，逆に，このような $A$ は存在しない，と仮定してみる．このときには，$n \in \omega$ に対し，$A_n \in [\lambda]^\lambda$ と $a_n \in \lambda$ で，$A_n \supseteq A_{n+1}$ で，$a_{n+1} \in A_n - (a_n + 1)$ となり，$a_{n+1} \notin g``[A_{n+1}]^\omega$ となるようなものがとれる．$y = \{a_n \mid n \in \omega\} \in [\lambda]^\omega$ とおく．y の同値類を E として，$m \in \omega$ を，ある $\alpha < \cup x_E$ に対し，$\{a_n \mid m \leq n < \omega\} = x_E - \alpha$ となるようなものとする．ところが，このとき，$g(\{a_n \mid m < n < \omega\}) = a_m$ となるから，$a_m \in g``[A_m]^\omega$ であるが，これは矛盾である．　$\dashv$

23.12 の一番目の証明 (Kunen [71b])．$\kappa = \mathrm{crit}(j)$ で j^n で j の n 番目の繰り返しと

する，つまり，$x \in V$ に対し，$j^0(x) = x$ で，$n \in \omega$ なら，$j^{n+1}(x) = j(j^n(x))$ とする．$\lambda = \sup(\{j^n(\kappa) \mid n \in \omega\})$ とおく．したがって，λ は κ より大きな順序数で $j(\delta) = \delta$ となるようなもののうちで最小のものとなっている．$M \neq V$ であることを帰結したいわけだが，このために $j``\lambda \notin M$ であることを示す：

反対に $j``\lambda \in M$ だったとして，$f$ を $\lambda$ に対する $\omega$-ジョンソン関数とする．$M$ で，$j(f)$ は $j(\lambda) = \lambda$ に対する $\omega$-ジョンソン関数となっており，$j``\lambda \in [\lambda]^\lambda \cap M$ である．ところが，$j(f)``[j``\lambda]^\omega \subseteq j``\lambda$ となることを，以下で確かめるが，$j``\lambda \neq \lambda$（例えば，$\kappa \in \lambda - j``\lambda$）だから，これは矛盾である．

$s \in [j``\lambda]^\omega$ とすると，明らかに，$j(t) = j``t = s$ となる $t \in [\lambda]^\omega$ が存在する．ところが，ここで，$j(f)(s) = j(f)j(t) = j(f(t)) \in j``\lambda$ となる． ⊣

クーネンも指摘しているように，λ は共終数が ω の強極限基数だから，$2^\lambda = \lambda^{\aleph_0}$ となり，このような λ に対しては 23.13 の証明では簡単な帰納的構成を用いることができる（ただしこのためには AC への依存度は多少上ってしまうのだが）：$\{\langle x_\alpha, \gamma_\alpha\rangle \mid \alpha < 2^\lambda\}$ が $[\lambda]^\lambda \times \lambda$ の枚挙となっているとする．帰納的に，$s_\alpha \in [x_\alpha]^\omega$ を選び $s_\alpha \neq s_\beta$ となるようにする．これは，$2^\lambda = \lambda^{\aleph_0}$ により可能である．ここで，任意の関数 f: $[\lambda]^\omega \to \lambda$ で $f(s_\alpha) = \gamma_\alpha$ となるものは λ に対する ω-ジョンソン関数となっている．

23.12 の他の証明は 1980 年後半に得られている．このうちの一つでウディンによるものは，定常集合を互いに素な定常集合に分割する，ということを使うものとなっている：

23.12 の二番目の証明 (Woodin). 前と同じように，$\kappa = \mathrm{crit}(j)$, $\lambda = \sup(\{j^n(\kappa) \mid n \in \omega\})$ とする．ソロヴェイの結果16.9により，S: $\kappa \to \mathcal{P}(\lambda^+)$ で，$\mathrm{ran}(S)$ は $\{\xi < \lambda^+ \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega\}$ の λ^+ の定常集合への分割となっているようなものが存在する（実際，分割されるべき集合の性質から，このような S を帰納的に定義できる）．$j(\lambda) = \lambda$ だから，$\lambda^+ \leq j(\lambda^+) = \lambda^{+M} \leq \lambda^+$ となり，したがって等式が成り立つ．よって，j が初等的埋め込みであることから，$j(S)$: $j(\kappa) \to \mathcal{P}(\lambda^+)$ となり，

$$(j(S)(\kappa) \subseteq \{\xi < \lambda^+ \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega\} \text{ は } \lambda^+ \text{で定常})^M$$

が成り立つ．$j(S)(\kappa)$ が本当に λ^+ で定常だったとしてみる：これは $M = V$ のから帰結である．このときには，λ^+-完備性から，ある $\alpha_0 < \kappa$ に対し，$j(S)(\kappa) \cap S(\alpha_0)$ が λ^+ で定常となる．また，

$$C = \{\xi < \lambda^+ \mid j(\xi) = \xi \ \wedge \ \mathrm{cf}(\xi) = \omega\}$$

が λ^+ で ω-閉非有界であることも直ちに分かる．したがって（0.1(d) により）$\xi_0 \in (j(S)(\kappa) \cap S(\alpha_0)) \cap C$ がとれる．ところが，このとき，$\xi_0 = j(\xi_0) \in j(S(\alpha_0)) = j(S)(\alpha_0)$ だから，$\xi_0 \in j(S)(\kappa) \cap j(S)(\alpha_0)$ となるが，j が初等的埋め込みであることから，$j(S)$ の値域は互いに素な集合からなるはずなので，これは矛盾である． ⊣

トドウチェヴィッチは，C に関する考察は必要ないことを注意している：$j(S)(\kappa)$ が λ^+ で本当に定常であると仮定してみる．$j``\lambda^+$ は $j(\lambda^+) = \lambda^+$ で非有界だから，

$$\overline{C} = \{\xi < \lambda^+ \mid \exists s(s \in [j``\lambda^+]^\omega \ \wedge \ \xi = \sup(s))\}$$

は ω-閉非有界となる．そこで，$\xi_0 \in j(S)(\kappa) \cap \overline{C}$ と $s \in [j``\lambda^+]^\omega$ で $\xi_0 = \sup(s)$ となるものをとる．$j(t) = s$ となる $t \in [\lambda^+]^\omega$ で，$\sup(t) \in S(\alpha_0)$ がある $\alpha_0 < \kappa$ に対し成り立つようなものがとれる．ところが，$j(\sup(t)) = \xi_0 \in j(S)(\kappa)$ だから，初等的埋め込みにより $j(\alpha_0) = \kappa$ とならなくてはならないが，これは矛盾である．

実際，正則基数 $\mu > \omega$ で $S\colon \mu \to \mathcal{P}(\mu)$ となり，$\mathrm{ran}(S)$ が $\{\xi < \mu \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega\}$ の μ での定常集合への分割となっているものに対し，$f\colon [\mu]^\omega \to \mu$ を $f(s)$ が $\sup(s) \in S(\alpha)$ となることで一意に決まる α として定義すると，これは，ソロヴェイによる μ に対する，ω-ジョンソン関数の簡単な例となる（Galvin-Prikry [76: 370] を参照）．したがって，$\lambda^+ = j(\lambda^+)$ に対して ω-ジョンソンとなっているような具体的な関数が与えられて，クーネンの議論を逆にたどれたことになる．

次は，原田 Mikio Harada による 23.12 の証明のさらに簡明な証明である；これは組合せ論での偶然に頼ることなく，より構造的な制約を明らかにするものとなっている．

23.12 の三番目の証明 (原田). λ を前と同じようにとり，やはり $j``\lambda \in M$ だと仮定して矛盾を導く．

まず最初に，任意の全単射 $g\colon 2^\lambda \to \mathcal{P}(\lambda)$ に対し，$j``\lambda \in \mathcal{P}(\lambda)^M = \mathrm{ran}(j(g))$ となるから，$\sigma$ を，単射 $F\colon \sigma \to \mathcal{P}(\lambda)$ で $j``\lambda \in \mathrm{ran}(j(F))$ となるものが存在するような最小の順序数とする．このような F を固定して，$S = \mathrm{ran}(F)$ とおく．ここで U を

$$X \in U \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq S \ \wedge\ j``\lambda \in j(X)$$

で定義すると，U は S 上の ω_1-完備な超フィルターとなるから，

$$i\colon V \prec N \cong \mathrm{Ult}(V, U)$$

とする．

§22 での正規超フィルターの理論を思い出して，id: $S \to S$ が恒等写像のとき，U の定義から次が順に示せる：

(i) $i``\lambda = [\mathrm{id}]_U$ となり，したがって，$i``\lambda \in \mathrm{ran}(i(F))$ である，
(ii) $\alpha = [\langle \mathrm{ot}(x \cap \alpha) \mid x \in S\rangle]_U$,
(iii) $i|(\lambda + 1) = j|(\lambda + 1)$.

(iii) は 22.12 の証明により導ける：$k([f]_U) = j(f)(j``\lambda)$ で定義される $k\colon N \to M$ は初等的埋め込みとなり，$j = k \circ i$ である．また，(ii) により $\alpha \leq \lambda$ に対し，$k(\alpha) = \alpha$ である．

超巾に切り換えることでもっと構造的なものが使えるようになる：22.4(b) により，$i``\lambda \in N$ から，$\mathcal{P}(\lambda)^N = \mathcal{P}(\lambda)$ となり，したがって，$\lambda$ が強極限基数であることから，$i|V_\lambda \in N$ となることが容易に示せる．ここで，$i(\lambda) = \lambda$ だから，任意の $X \in \mathcal{P}(\lambda)$ に対し，$i(X) = \bigcup_{\alpha<\lambda} i(X \cap \alpha)$ となる．したがって，今度は，$i``\mathcal{P}(\lambda) = \{\bigcup_{\alpha<\lambda} i(X \cap \alpha) \mid X \in \mathcal{P}(\lambda)\} \in N$ が分かる．再び 22.4(b) により，N が $\mathcal{P}(\lambda)^N = \mathcal{P}(\lambda)$ の枚挙をすべて含むことが▼分かり，したがって，

$$(*) \qquad 2^\lambda = (2^\lambda)^N = i(2^\lambda)$$

となる．

ここで σ の性質を使って矛盾を導く．定義から明らかに σ は基数で，$|S| = \sigma \leq 2^\lambda$ となっている．22.4(c) から，$i``\sigma^+ \notin N$ である；ところが，上で注意したように，$i``\mathcal{P}(\lambda) \in N$ だから，22.4(a)(b) から，$2^\lambda < \sigma^+$ が分かる．したがって，$\sigma = 2^\lambda$ でなければならない．ところが，$(*)$ により，$i(\sigma) = \sigma$ だから，$i(\sigma) = \sup(i``\sigma)$ である．(i) により $i``\lambda \in \mathrm{ran}(i(F))$ だから，このことから，ある $\alpha < \sigma$ に対し，$i``\lambda \in \mathrm{ran}(i(F)|i(\alpha)) = \mathrm{ran}(i(F|\alpha))$ となることが分かる．このとき，$U$ と $i$ の定義から，$j``\lambda \in \mathrm{ran}(j(F|\alpha))$ となることが分かるが，これは σ の最小性に矛盾する． ⊣

23.12 のこれらの証明から，次の改良版の証明が得られる：

23.14 系

(a) 任意の δ に対し，$j\colon V_{\delta+2} \prec V_{\delta+2}$ となるものは存在しない．

(b) $j\colon V \prec M$ で δ は $\mathrm{crit}(j)$ より大きく，$j(\delta) = \delta$ となるような最小の順序数とするとき，$j``\delta \notin M$ となる．

証明 (a) j が存在すると仮定して矛盾を導く．明らかに $j(\delta) = \delta$ で $\mathrm{crit}(j) < \delta$ である（初等的埋め込みはその領域で恒等関数ではない，という取り決めをしておいたのであった，また，5.1(b) の証明から，j はある順序数を動かさなくてはならない）．前と同じように，$\kappa = \mathrm{crit}(j)$ とおき，各繰り返し $j^n(\kappa)$ は定義され δ より小さいことに注意して，$\lambda = \sup(\{j^n(\kappa) \mid n \in \omega\}) \leq \delta$ とおく．λ に対する ω-ジョンソン関数は $V_{\lambda+2}$ の元となるから，j の定義域の元となり，したがって，クーネンの構成が $V_{\lambda+2}$ で実行できる．

ウディンの証明では，λ^+ の部分集合は $V_{\lambda+2}$ の元で忠実にコードされることに注意する．例えば，λ の各整列順序 $R \subseteq \lambda \times \lambda$ に対し，$\alpha_R < \lambda^+$ をその順序型として，$e_R\colon \langle \alpha_R, < \rangle \to \langle \lambda, R \rangle$ を順序同型する．$p\colon (\lambda \times \lambda) \times \lambda \to \lambda$ を全単射として，$p \subseteq V_\lambda$ に注意すると，任意の $X \subseteq \lambda^+$ に対し，

$$\{p``(R \times e_R``(X \cap \alpha_R)) \mid R \text{ は } \lambda \text{ の整列順序}\} \in V_{\lambda+2}$$

を X のコードとして用いることができる．λ^+ の元の短い列も同様にコードすることができるので，ここで必要となる λ^+ の部分集合の定常性などがこのコーディングを使って $V_{\lambda+2}$ で表現できる．したがって，ウディンの証明での矛盾は このコーディングにより $j|V_{\lambda+2}$ で導くことができる．

$\mathcal{P}(\lambda)$ の部分集合の整列順序はすべて $V_{\lambda+2}$ の元でコードでき，対応する $F, U \subseteq V_{\lambda+2}$ もそのようなコードを用いて定義できるから，原田の証明も $j|V_{\lambda+2}$ で行うことができる．

(b) λ を，再び $\mathrm{crit}(j)$ から前と同じようにして定義されたものとする．このとき，$\delta = \lambda$ となる．したがって，クーネンと原田の証明により，$j``\delta \notin M$ が分かる．ウディンの論法で証明するには，まず $j$ から原田の証明でのような超巾による埋め込みに切り換える：$j``\lambda \in M$ として，$\mathcal{P}(\lambda)$ 上の U を，

$$X \in U \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq \mathcal{P}(\lambda) \ \wedge \ j``\lambda \in j(X)$$

により定義し，$i\colon V \prec N \cong \mathrm{Ult}(V, U)$ とする．このとき，前に見たように，$\mathrm{crit}(i) = \mathrm{crit}(j)$

で，$i(\lambda)=\lambda, i``\lambda \in N$ となるから，$i``\mathcal{P}(\lambda) \in N$ が分かる．したがって，${}^{2^\lambda}N \subseteq N$ となるから，ウディンの証明は，(a) でと同様のコーディングにより，ここで実行することができる． ⊣

次のものは，γ-超コンパクト性と拡張可能性の定義に関して保留になっていた命題である．

23.15 命題

(a) κ が γ-超コンパクトとなるのは，$j\colon V \prec M$ で $\mathrm{crit}(j)=\kappa$ かつ ${}^{\gamma}M \subseteq M$ となるものが存在する，ちょうどそのときである．

(b) κ が拡張可能となるのは，任意の $\eta > \kappa$ に対し，$j\colon V_\eta \prec V_\zeta$ で $\mathrm{crit}(j)=\kappa$ となるものが存在する，ちょうどそのときである．

証明　(a) j を命題でのようなものとする．足りないのは $\gamma < j(\kappa)$ という条件のみである．23.14(b) により，$\gamma < \sup(\{j^n(\kappa) \mid n \in \omega\})$ となり，したがって，ある $n \in \omega$ に対し，$\gamma < j^n(\kappa)$ となる．したがって，

(∗)　すべての $n \in \omega, n > 0$ に対し，ZFC の内部モデル M_n で $j^n\colon V \prec M_n$ かつ ${}^{\gamma}M_n \subseteq M_n$ となるものが存在する

が証明できればよい．このために，まず

$$j^+(R) = \bigcup_\alpha j(R \cap V_\alpha)$$

と定義することで，j をクラスに対して拡張する．クラス $R_1, \ldots, R_m$ に対し，ZF の反映の原理から，

$$j\colon \langle V, \in, R_1, \ldots, R_m\rangle \prec \langle M, \in, j^+(R_1), \ldots, j^+(R_m)\rangle$$

となることに注意する（ここで，今までの取り決めを拡張して，$\prec$ とは，ここで定式化可能な論理式に関しての $\prec_1$ のこととする）．

このとき，(∗) は n に関する帰納法により確立できる．$n=1$ に対しては，$M_1 = M$ として成り立つ．今度は (∗) が n のとき成り立つとして，$M_{n+1} = j^+(M_n)$ とする．

$$j\colon \langle V, \in, j^n, M_n\rangle \prec \langle M, \in, j^+(j^n), M_{n+1}\rangle$$

だから，M_{n+1} は推移的で，$j^+(j^n)\colon M \prec M_{n+1}$ により，$j^+(j^n)\circ j\colon V \prec M_{n+1}$ となる．ところが，$j^+(j^n) \supseteq \{\langle j(x), j^{n+1}(x)\rangle \mid x \in V\rangle\}$ だから，$j^+(j^n)\circ j = j^{n+1}$ である．最後に，$\langle V, \in, M_n\rangle \prec \langle M, \in, M_{n+1}\rangle$ で ${}^{\gamma}M_n \subseteq M_n$ だから，${}^{j(\gamma)}M_{n+1} \cap M \subseteq M_{n+1}$ となり，したがって，

$${}^{\gamma}M_{n+1} = {}^{\gamma}M_{n+1} \cap M \subseteq M_{n+1}$$

が成り立つ．

(b) 十分性の証明には，$\eta \geq \kappa \cdot \omega$ をとるとき，κ が η-拡張可能であることを示せば十分である — ここで欠けているのは $\eta < j(\kappa)$ という条件のみである．このために，$\gamma > \eta$ を

(i) $\beta < \gamma$ で，ある ζ に対し，$\mathrm{crit}(k) = \kappa$ かつ $k(\kappa) = \beta$ となるような $k\colon V_\eta \prec V_\zeta$ があるなら，そのような k で $\zeta < \gamma$ となるものが存在する；

(ii) $\mathrm{cf}(\gamma) = \omega_1$

となるようなものとする．このような γ は，簡単な閉包の議論を ω_1 回繰り返すことで得られる．仮定により，$j\colon V_\gamma \prec V_\rho$ で $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ とする．$j^n(\kappa)$ がすべての $n \in \omega$ に対し定義できていたとすると，$\mathrm{cf}(\gamma) = \omega_1$ だから，$\sup(\{j^n(\kappa) \mid n \in \omega\}) < \gamma$ となり，このことからクーネンの証明の矛盾を導くことができてしまう．したがって，$m \in \omega$ で，$j^m(\kappa) < \gamma \leq j^{m+1}(\kappa)$ となるものが存在する．

$P(i)$ を次の主張とする：

ある ζ に対し，$e\colon V_\eta \prec V_\zeta$ で，$\mathrm{crit}(e) = \kappa$ かつ $e(\kappa) = j^{i+1}(\kappa)$ となるものが存在する．

$P(m)$ が確立できればよい．これから，$\eta < \gamma \leq j^{m+1}(\kappa)$ により η-拡張可能性が導きだせるからである．このために，すべての $i \leq m$ に対し i に関する帰納法により $P(i)$ を示す：

$\bar{j} = j|V_\eta$ とおく．このとき 23.3 でと同じように，$\bar{j}\colon V_\eta \prec V_{j(\eta)}$ で $\mathrm{crit}(\bar{j}) = \kappa$ かつ，$\bar{j}(\kappa) = j(\kappa)$ となるから，$P(0)$ が成り立つ．次に $i < m$ で $P(i)$ が成り立つと仮定する．このとき，$j^{i+1}(\kappa) < \gamma$ だから，(i) により，ある $\zeta < \gamma$ に対し，$k\colon V_\eta \prec V_\zeta$ で $\mathrm{crit}(k) = \kappa$ かつ $k(\kappa) = j^{i+1}(\kappa)$ となるものがある．したがって，j を k に合成することができて，23.2 と初等的埋め込みにより，V_ρ で，したがって V でも，$\bar{k}\colon V_{j(\eta)} \prec V_{j(\zeta)}$ となり，$\mathrm{crit}(\bar{k}) = j(\kappa)$ かつ $\bar{k}(j(\kappa)) = j^{i+2}(\kappa)$ となるものが存在する．しかし，この時には，$\bar{j}$ を上のようなものとすると，$\bar{k}\circ\bar{j}\colon V_\eta \prec V_{j(\zeta)}$ で $\mathrm{crit}(\bar{k}\circ\bar{j}) = \kappa$ かつ，$\bar{k}\circ\bar{j}(\kappa) = j^{i+2}(\kappa)$ となる．したがって，$P(i+1)$ が得られ，証明が完了した． ⊣

クーネンの結果は，その明らかな重要性のゆえに，すぐに綿密に分析されることになった．これらの証明で目につく特徴は，$\mathcal{P}(\lambda)$ 上の整列順序のレヴェルでの選択公理の使用であろう．これが，最初の証明では，λ に対する ω-ジョンソン関数を得るための決定的な要素となっており（実際には，ここで与えられた 23.13 の証明では，$[\lambda]^\omega$ 上の整列順序で十分である）．$\{\xi < \lambda^+ \mid \mathrm{cf}(\xi) = \omega\}$ を κ 個の λ^+ の定常部分集合に（これらの $\mathcal{P}(\lambda)$ でのコードにより）分割するため，また三番目の証明では σ の存在を示すために使われている．したがって，次の未解決問題は，非常に重要なものとなる：

23.16 未解決問題 ZF で $j\colon V \prec V$ の非存在が証明できるか？

この答はまだ得られていないのであるが，クーネンの結果は選択公理のもとでユニヴァースでの反映の可能性に対する最終的な制限を果たすものとなっている．ZFC はここでついに巨大基数の「神々のたそがれ」を余儀なくさせるべき力を発揮しているのである!

§24 最も強い仮説

この節では，矛盾することが判明されていない巨大基数の仮説のうち，最も強いもののいくつかについて記述する．まず，クーネンの結果ぎりぎりに位置するようなものから始めて，n-膨大性とヴォピェンカの原理について述べる．ここでは，クーネンの矛盾の断崖から身をひいて，残った可能性を吟味し，時間がたつにつれて，この制限された建造物に対する確信が育ってゆくという，逆理の発見された後の集合論の発展でと同じような動きがあった．しかしながら，累積的階層やその他の指導的アイデアの出現が ZFC の直観的な支えを与えたときとは違って，クーネンの結果が数学的な偶然に基づいていることから，それが最良の結果になっていることを議論することは，発見法的な論法によったとしても，できるかどうか怪しいものであった．したがって，最も強い一連の仮説は，よりあやふやな基礎の上に立つものとなったが，これらに関した研究は，仮説の強さと，そこで用いられている概念の簡明さ，また，いつ新しい黙示録的な矛盾性が顔をのぞかせるかもしれない，というまさにその可能性によって，魅力のあるものとなった．

Gaifman [74] と Solovay-Reinhardt-Kanamori [78] で考察されている次の命題は，23.14 で否定されたものよりほんの少し弱いものになっている：

- I1. ある δ に対し，$j\colon V_{\delta+1} \prec V_{\delta+1}$ が存在する．
- I2. $\delta > \mathrm{crit}(j)$ で $j(\delta) = \delta$ となるようなある δ に対し，$j\colon V \prec M$ で，$V_\delta \subseteq M$ となるものが存在する．
- I3. ある δ に対し，$j\colon V_\delta \prec V_\delta$ が存在する．

クラスに関する命題となっている I2 の特徴付けをすぐに与えるが，これによって I2 は後回しで本当の定式化がなされることになる．

これらの命題は，今までのところ，ZFC で否定されずにいる．23.14 の証明から，いずれの場合にも，前のように $\kappa = \mathrm{crit}(j)$ かつ $\lambda = \sup(\{j^n(\kappa) \mid n \in \omega\})$ とすると，I3 では δ は $\lambda + 1$ とすれば，これより強い I1 が得られるということを除くと，必要になる δ はこの λ である．I1 の否定証明の試みとしては $V_{\lambda+1}$ での関数を λ に対する ω-ジョンソン関数の役割を果たすようにとる，という方針が考えられる．λ は可測基数 $j^n(\kappa)$ の極限だから，λ はジョンソン基数となり (8.7), $f\colon [\lambda]^\omega \to \lambda$ での $[\lambda]^\omega$ は $[\lambda]^{<\omega}$ によって置き換えることはできない．しかしながら，次に対する肯定的な答が得られれば I1 を否定することができる：

24.1 未解決問題 (Magidor). 強極限 λ に対し，$f\colon \bigcup_{\nu<\lambda}[\nu]^\omega \to \lambda$ で，$y \in [\lambda]^\lambda$ なら，常に $f``(\bigcup_{\nu<\lambda}[\nu \cap y]^\omega) = \lambda$ となるようなものは存在するか？

つまり，λ に対する ω-ジョンソン関数と類似のもので，その定義域が，順序型が ω の λ の有界集合の全体であるようなものが存在するか？ということである．もちろん，このようなものは存在すれば $V_{\lambda+1}$ の元となる．塩谷 Masahiro Shioya [93] は 24.1 に対する肯定的な解は I2 も否定することを示している．

ここで I1-I3 に関するいくつかの結果を証明した後，これらの命題に肯定的な意味付

けを与えるように見える，最近のいくつかの結果を示す．23.15(a) の証明を思い出して，$j\colon V_\delta \prec V_\delta$ で δ は極限順序数となっているものに対し，これの拡張 $j^+\colon V_{\delta+1} \to V_{\delta+1}$ を $R \subseteq V_\delta$ に対し，

$$j^+(R) = \bigcup_{\alpha<\delta} j(R \cap V_\alpha)$$

とすることで定義する．$V_\delta \times V_\delta \subseteq V_\delta$ なので，$j^+(R)$ は V_δ 上の関係 R, 関数 $R\colon V_\delta \to V_\delta$ などに対し定義される．この j の自然な拡張は，初等的埋め込みとは限らない．Gaifman [74: 89] あるいは Powell [74: 129] から明らかな，次の I2 の特徴付けは I2 の I1 と I3 との関係を明らかにする：

24.2 命題 任意の κ と δ に対し，次は同値となる：

(a) $j\colon V \prec M$ で $\mathrm{crit}(j) = \kappa < \delta = j(\delta)$, $V_\delta \subseteq M$ となるものが存在する．

(b) $j\colon V_\delta \prec V_\delta$ で，$\mathrm{crit}(j) = \kappa$ となり，R が V_δ 上の整順的関係であるときには，$j^+(R)$ も常に整順的関係となるようなものが存在する．

証明 順方向の証明には，$\bar{j} = j|V_\delta$ とおく．このとき，$\bar{j}\colon V_\delta \prec V_\delta$ となり，任意の $R \subseteq V_\delta$ に対し，$\bar{j}^+(R) = j(R)$ となる．更に，もし R が整順的関係なら，$M \models$「$j(R)$ は整順的である」となる．ところが，このときには，絶対性 (0.3) から，$j(R)$ は V で整順的となる．

逆方向の証明のアイデアは，超巾による埋め込みは必要な性質を持ち得ないが，超巾による埋め込みの順極限をとることができる，ということである：$n \in \omega$ に対し，$\kappa_n = j^n(\kappa)$ として，U_n を

$$X \in U_n \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq \mathcal{P}(\kappa_n) \ \wedge \ j``\kappa_n \in j(X)$$

で定義する．$j``\kappa_n \in \mathcal{P}(\kappa_{n+1})$ で，$X \subseteq \mathcal{P}(\kappa_n)$ なら，$j(X) \subseteq \mathcal{P}(\kappa_{n+1})$ となることに注意すると，U_n が $\mathcal{P}(\kappa_n)$ 上の κ-完備な超フィルターとなることは容易に確かめられる．

$$i_n\colon V \prec M_n \cong \mathrm{Ult}(V, U_n)$$

とおく．§22 での正規超フィルターの理論を思い出して，$\mathrm{id}_n\colon \mathcal{P}(\kappa_n) \to \mathcal{P}(\kappa_n)$ を恒等写像とすると，

(i) $i_n``\kappa_n = [\mathrm{id}_n]_{U_n}$ となり，したがって，

(ii) $\alpha \leq \kappa$ に対し，$\alpha = [\langle \mathrm{ot}(x \cap \alpha) \mid x \in \mathcal{P}(\kappa_n)\rangle]_{U_n}$ となり，

(iii) $\mathrm{crit}(i_n) = \kappa$, かつ

(iv) $V_{\kappa_n} \subseteq M_n$ となる．

(iii) には，(ii) で与えられた κ の表現と，U_n の定義から，$\kappa < i_n(\kappa) \Leftrightarrow \mathrm{ot}(j``\kappa_n \cap j(\kappa)) < j(\kappa)$ となり，後者はそこでの順序型が κ だから成り立つことに注意すればよい．(iv) は，κ_n が到達不可能基数であることから，(i) と 22.4(a) を用いて，帰納法による議論で導ける．

次に，$n \leq m < \omega$ に対し，$k_{nm}\colon M_n \to M_m$ を，

$$k_{nm}([f]_{U_n}) = [\langle f(x \cap \kappa_n) \mid x \in \mathcal{P}(\kappa_m)\rangle]_{U_m}$$

により定義する．22.12 とそれに続く注意を思い出すと，

(v)　$k_{nm}: M_n \prec M_m$ で，

(vi)　すべての $x \in V_{\kappa_n}$ に対し，$k_{nm}(x) = x$ となる．

(vi) には，(ii) により，すべての $\alpha \leq \kappa_n$ に対し，$k_{nm}(\alpha) = \alpha$ となるから，(iv) と 5.1(b) でのランクによる議論を使うことができる．

最後に，$\langle\langle\langle M_n, \in\rangle \mid n \in \omega\rangle, \langle k_{nm} \mid n \leq m\rangle\rangle$ は順系と見ることができるから，$\langle M, \in_M\rangle$ をその順極限として，$n \in \omega$ に対し，

$$k_n: \langle M_n, \in\rangle \prec \langle M, \in_M\rangle$$

を対応する埋め込みとする．したがって，$n \leq m$ に対し，$k_m \circ k_{nm} = k_n$ となる．また，

$$i: \langle V, \in\rangle \prec \langle M, \in_M\rangle$$

を $k_n \circ i_n = i$ となるようにとる．$\langle M, \in_M\rangle$ は整順的である：

そうでないとすると，$z_r \in M$ で，$z_{r+1} \in_M z_r \in_M \mathrm{On}^M$ がすべての $r \in \omega$ に対し成り立つようなものが存在する．$r \in \omega$ に対し，κ_{n_r} を $\kappa_{n_r} \leq \kappa_{n_{r+1}}$ となるようにとり，$g_r: \mathcal{P}(\kappa_{n_r}) \to \mathrm{On}$ を $k_{n_r}([g_r]) = z_r$ となるようにする．$|\bigcup_{r\in\omega} \mathrm{ran}(g_r)| \leq \delta$ だから，δ の整列順序 R と順序を保存する単射 $p: \langle\bigcup_{r\in\omega} \mathrm{ran}(g_r), <\rangle \to \langle\delta, R\rangle$ が存在する．ここで，U_n と k_{nm} の定義から，すべての $r \in \omega$ に対し，

$$\langle j(p \circ g_{r+1})(j``\kappa_{n_{r+1}}), j(p \circ g_r)(j``\kappa_{n_r})\rangle \in j^+(R)$$

となることが容易に確かめられる．ところが，このことから，$j^+(R)$ は整順的でなくなるから，j に関する仮定に矛盾である．

ここで，M をその推移的崩壊と，また $\in_M$ を $\in$ と同一視することができる．(iii) により，$\mathrm{crit}(i) = \kappa$ で (iv) と (vi) により $V_\delta \subseteq M$ だから，これで証明が完了した．　⊣

この特徴付けから，I1 の I2 上の超越性と I2 の I3 上の超越性が次のように示せる．便宜上，ここでは，$\mathrm{I1}(\kappa, \delta)$ を $j: V_{\delta+1} \prec V_{\delta+1}$ で $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ となるものが存在することとし，$\mathrm{I2}(\kappa, \delta)$ も（上の特徴付けを用いて）同様に定義し，$\mathrm{I3}(\kappa, \delta)$ もまた同様に定義する．

24.3 命題　$\mathrm{I1}(\kappa, \delta)$ が成り立っていると仮定する．このとき：

(a) (Gaifman [74: 89]) $\mathrm{I2}(\kappa, \delta)$.

(b) κ 上の超フィルター U で

$$\{\alpha < \kappa \mid \exists\gamma(\mathrm{I2}(\alpha, \gamma))\} \in U$$

となるものが存在する．

証明　$j: V_{\delta+1} \prec V_{\delta+1}$ が $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ となっているとする．(a) は，$\bar{j} = j|V_\delta$ とおく．このとき，23.3 での議論から，$\bar{j}: V_\delta \prec V_\delta$ となる，また，すべての $R \subseteq V_\delta$ に対し，$\bar{j}^+(R) = j(R)$ となる．さらに，$V_{\delta+1}$ はすべての関数: $\omega \to V_\delta$ を含んでいるから，R が整順的な関係となるのは，これが $V_{\delta+1}$ での意味で整順的なものとなるちょうどそのときである．したがって，初等的埋め込みにより，R の整順性から，$j(R)$ の整順性が帰結さ

れる.

(b) には，$S \in V_{\delta+1}$ で V_δ の充足関係をコードするものが存在することから，上の議論により，$V_{\delta+1} \models \mathrm{I2}(\kappa, \delta)$ となることに注意する．したがって，j から定義される κ 上の正規超フィルターを用いて，いつものような反映の性質による議論をすることで結果が得られる. ⊣

24.4 命題 (Solovay – Gaifman [74: 92]). $\mathrm{I2}(\kappa, \delta)$ と仮定する．このとき：

(a) $\mathrm{I3}(\kappa, \delta)$.

(b) κ 上の正規超フィルター U で,

$$\{\alpha < \kappa \mid \exists\gamma(\mathrm{I3}(\alpha, \gamma))\} \in U$$

となるものが存在する.

証明 (a) は 24.2 から明らかである. (b) については，まず定義から $j\colon V \prec M$ を $\mathrm{crit}(j) = \kappa < \delta = j(\delta)$ で $V_\delta \subseteq M$ となるようにとる．いつものように j から定義される κ 上の正規超フィルターを用いて反映の性質による議論することにより,

$$M \models \exists\gamma\exists i(i\colon V_\gamma \prec V_\gamma \ \wedge\ \mathrm{crit}(i) = \kappa)$$

が示せればよい．$j|V_\delta \in M$ であることは示せないが，整順性の論法により，上が成り立つことが示せる.

$$I = \{i \mid \text{ある } \alpha < \beta < \delta \text{ により } i\colon V_\alpha \prec V_\beta \text{ かつ } \mathrm{crit}(i) = \kappa \text{ となる}\}$$

とおく．I 上の関係 $<$ を次のように定義する：$i, i' \in I$ として，例えば，$i\colon V_\alpha \prec V_\beta$ かつ $i'\colon V_{\alpha'} \prec V_{\beta'}$ となっているとき,

$$i < i' \quad \Leftrightarrow \quad i \supseteq i' \ \wedge\ \alpha = \beta' = i(\alpha')$$

とする．このとき，$\leq^*$ を $<$ の反射的かつ推移的な閉包とする．つまり，i' が i の直後の元となるのが，ちょうど $i < i'$ となるときとなるような，半順序とする.

$V_\delta \subseteq M$ だから，$I^M = I$ で $\leq^{*M} = \leq^*$ となる．もし $\leq^*$ が M で整順的でなければ，任意の $\leq^*$ に関する無限下降列の和集合はここで求めているような $i\colon V_\gamma \prec V_\gamma$ となる．そこで，逆に $\leq^*$ が M で整順的であったと仮定してみる．このときには，絶対性 (0.3) により，$\leq^*$ は V でも整順的となる．ところが，$\langle j|V_{j^{n+1}(\kappa)} \mid n \in \omega\rangle$ は $\leq^*$ に関する無限下降列だから，これは矛盾である. ⊣

次は I3 に関連した考察である．δ が極限順序数である場合 $j\colon V_\delta \prec V_\delta$ なら，$R \subseteq V_\delta$ に対し，$j^+(R) = \bigcup_{\alpha<\delta} j(R \cap V_\alpha)$ ときめることで，j は $j^+\colon V_{\delta+1} \to V_{\delta+1}$ に拡張できるのであった．ここで R として $k\colon V_\delta \prec V_\delta$ をとってきたときにはどうなるであろうか？

24.5 演習 $j\colon V_\delta \prec V_\delta$ で，$k\colon V_\delta \prec V_\delta$ となっているとする．このとき，$j^+(k)\colon V_\delta \prec V_\delta$ で，$\mathrm{crit}(j^+(k)) = j(\mathrm{crit}(k))$ である.

ヒント $j^+(k)$ が初等的埋め込みであることを示すには，反映の性質の議論をすればよい：

$\mathrm{crit}(j) = \kappa$ として，$V_{j^n(\kappa)} \prec V_{j^{n+1}(\kappa)} \prec V_\delta$ がすべての $n \in \omega$ に対し成り立つことを確かめればよい． ⊣

したがって，κ が拡張可能であることは κ より大きな様々な巨大基数の存在を帰結したのに対し，I3 はそれと全く同じ性質を持つものが $\kappa = \mathrm{crit}(j)$ より上に一つ存在することを帰結するような巨大基数の性質となっているわけである．

I1-I3 に関する態度と期待は，これらが定式化されたときは，初めは懐疑的であったのが，用心深い確信と受容へと変っていった．Solovay-Reinhardt-Kanamori [78: 109] では我々は，"I1, I2 および I3 とクーネンによって矛盾であることが証明された命題の違いは，本質的でなく技術的なものにすぎないので，これらはすべて矛盾するのではないかと思われる．" と書いた．しかしながら，これは正しくなかったかもしれない．前にも述べたように，選択公理の使用はクーネンの結果の証明で $\mathcal{P}(\lambda)$ の整列順序を与えるために顕著に用いられているのだが，このような整列順序は，$V_{\lambda+2} - V_{\lambda+1}$ の中に初めてコードされて現れるからである．したがって，I1-I3 の否定証明があるとすれば，それは，これとは違う立脚点を持つものでなければならない．また，最近の仕事はこれらの公理の一貫性と整合性を示唆する外側からの事実を与えている：

決定性の仮説について第6章で議論する．1978 年にマルティン Martin [80] は仮説 $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_2)$ が I2 と I3 の間に位置する命題から導かれることを示した（31.8 とこれの後を参照）が，1984 年にウディンは $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ が I1 よりさらに強い，矛盾すれすれの次の命題から導かれることを示している：

I1.　ある δ に対し，$j\colon L(V_{\delta+1}) \prec L(V_{\delta+1})$ が存在する．

23.12 の証明により，$L(V_{\delta+1}) \models \mathrm{AC}$ ではあり得ない．§31 の文脈の中で議論されることになる，これらのマルティンとウディンの結果は，巨大基数の仮説が強い決定性の仮説を確立するために十分であることの最初の徴候で，これに続く進歩により，驚くべき無矛盾等価の結果が得られることになるのである．I0-I3 のレヴェルの命題が証明のアイデアを最初の実現するときに適切な仮定となる，ということは，それ自身ある種の外的な事実として認識されてよい．のみならず，ウディンによる I0 の研究は，$L(V_{\delta+1})$ に関する精緻で一貫した構造理論を生みだすにいたっている．

I3 に関する更に新しい仕事では，対応する初等的埋め込みの代数の特徴付けが導かれている．マルティンは 24.5 によって与えられたものと関数の合成による初等的埋め込みの増殖を使って彼の決定性の結果を確立しているが，すぐに，ここで現れる代数的構造に関するいくつもの問題が提起されている．レイヴァー Laver [86] による最初の探索の後，デオルノワ Dehornoy [88, 89, 89a, 89b] とドアティ=レイヴァー Randall Dougherty, Laver [92] は 1988 年にこれらの代数が自由になるのは自明な恒等写像の場合に限ることを発見している．

$\mathcal{E}_\delta = \{j \mid j\colon V_\delta \prec V_\delta\}$ とおく．24.5 のもとに，$\mathcal{E}_\delta$ 上の二項演算を $j \cdot k = j^+(k)$ によって定義する．$\mathcal{E}_\delta$ 上のもう一つの演算としては合成を考える；$j, k \in \mathcal{E}_\delta$ のときには，$j \circ k \in \mathcal{E}_\delta$ となる．次の一連の等式は容易に確かめられる；このような計算則はマルティン Martin [80] によって最初に応用されている．

24.6 演習 $i, j, k \in \mathcal{E}_\delta$ とするとき：

(a) $i \circ (j \circ k) = (i \circ j) \circ k$, $(i \circ j) \cdot k = i \cdot (j \cdot k)$, $i \cdot (j \circ k) = (i \cdot j) \circ (i \cdot k)$, $i \circ j = (i \cdot j) \circ i$ となる．

(b) $i \cdot (j \cdot k) = (i \cdot j) \cdot (i \cdot k)$ が成り立つ．

ヒント (b) は (a) から導くこともできる． ⊣

Σ で (a) の計算則を表すことにする；(b) は $\cdot$ に関する**左分配則**と呼ばれる．レイヴァーはこれらの計算則がすべてであることを証明している：

24.7 定理 (Laver [92]). $j \in \mathcal{E}_\delta$ とする．このとき：

(a) $\{j\}$ の $\langle \mathcal{E}_\delta, \cdot \rangle$ での閉包は左分配則を満たす，1 つの要素から生成された自由代数となっている．

(b) $\{j\}$ の $\langle \mathcal{E}_\delta, \cdot, \circ \rangle$ での閉包は，Σ を満たす，1 つの要素から生成された自由代数となっている． ⊣

ここで “自由” は通常の意味である：(b) では，W を 1 つの定数記号 a のみを含む言語 $\circ$ での項の全体とする．W 上の同値関係 $\equiv$ を $u \equiv v \iff$ 列 $u = u_0, u_1, \ldots, u_n = v$ で，各 u_{i+1} は u_i の部分項を Σ によってそれと等価になる別の項で置き換えたものになっているようなものが存在することとして導入する．このとき $\cdot$ と $\circ$ はこれによる同値類上うまく定義された関数となり，(b) の主張は，これによって得られる構造 $W/\equiv$ と $\{j\}$ の $\langle \mathcal{E}_\delta, \cdot, \circ \rangle$ での閉包が，a の同値類を j に移すことから惹き起こされる写像により同型となる，ということである．

$u, v \in W$ に対し，$u <_L v \iff$ ある $w_1, \ldots, w_{n+1} \in W$ に対し，

$$v \equiv ((\ldots(u \cdot w_1) \cdot w_2) \ldots \cdot w_n) \cdot w_{n+1}\ ,\ \text{または}$$
$$v \equiv ((\ldots(u \cdot w_1) \cdot w_2) \ldots \cdot w_n) \circ w_{n+1}\ .$$

とする．レイヴァー Laver [92] は，ある δ に対し，$\mathcal{E}_\delta \neq \emptyset$ なら，$<_L$ は非反射的となることを示し，これを用いて $W/\equiv$ の標準型定理を得ているが，このことから，24.7 と $W/\equiv$ **の語の問題**（つまり任意の $u, v \in W$ に対し，$u \equiv v$ であるかどうかを実効的に決定することができるか，という問題）の肯定的な解が得られる．有限的な数学の可解性に，無矛盾性ぎりぎりの仮定が関わってきて，何かそのような強い仮説が実際に必要であるかもしれないという奇妙で魅惑的な可能性から，この問題は非常な注目を集めた．デオルノワ Dehornoy [92] は $<_L$ の非反射性からの自由性と可解性への別のアプローチを与えている．何年か後の 1991 年の暮れに，彼は Dehornoy[92a, 94] で，無限組みひも群の拡張への埋め込みを用いるエレガントな論法を用いて非反射性を ZFC で証明することに成功して，問題を解決している．したがって，Laver [92, 94] での標準型定理を含む $W/\equiv$ の構造に関する結果は，すべて ZFC での定理となったわけである．これは，巨大基数が簡明な代数的構造を示唆し，初等的埋め込みと臨界点との関連において，その研究を促進したという意味で，巨大基数の理論の豊かさに対する，確証となっていると言える．この構造がよく理解されてくると，問題の焦点は，ある順序構造の非反射性にあることが分かり，ここで巨大

基数は優雅なしぐさで舞台を去ったわけである

$\langle \mathcal{E}_\delta, \cdot \rangle$ の研究は，もう1つ別の興味ある有限的な問題を提起した．$j \in \mathcal{E}_\delta$ に対し，$\kappa = \mathrm{crit}(j)$ とし，$\mathcal{A}_j$ を $\{j\}$ の $\langle \mathcal{E}_\delta, \cdot \rangle$ での閉包とする．これに対応する ω 上の関数 f を：

$$f(n) = |\{\mathrm{crit}(k) \mid k \in \mathcal{A}_j \ \wedge \ j^n(\kappa) < \mathrm{crit}(k) < j^{n+1}(\kappa)\}|$$

で定義する．レイヴァーは，$f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$ であるが，$f(3)$ は大きなものとなることに注意している．デオルノワ Dougherty [93] は $f(3)$ の非常に大きな下界を与え，更に f が次第にアッカーマン関数より大きくなり，したがって，原始帰納的ではないことを示している．最初は各 $f(n)$ が有限となるかどうかさえ分からなかったが，スティール Steel の結果を用いてレイヴァー Laver [95] はこれを示している．したがって，$\{\mathrm{crit}(k) \mid k \in \mathcal{A}_j\}$ の順序型は ω となっている．しかし，f はどのくらい速く増加するのであろうか？ Dougherty-Jech [∞] では，左分配的な演算を持つ有限代数構造が，f の増加と関係することが示されている．

もちろん，I0-I3 のレヴェルの構造の性質がそれらの矛盾性に起因するということもあるかもしれない！ しかし，シルバーの $0^{\#}$ の研究で，研究の1つの動機は可測性の否定証明であったに違いなかったように，I0-I3 のレヴェルでの一貫性を持つ構造についての研究の進歩が，新しい矛盾の可能性にもかかわらず，これらの強い仮説に対する確信を強めていっているように思える．

n-膨大性

この節の残は，Solovay-Reinhardt-Kanamori [78] で考察されている，拡張可能性と I0-I3 との間に位置する主要な仮説にあてることにする．クーネンの結果により，$j\colon V \prec M$ で $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ なら，M は $\lambda = \sup(\{j^n(\kappa) \mid n \in \omega\})$ の長さの列に関して閉じていない．ここで一歩下がってもう少し弱い閉包性の条件を考えるというのは自然な方針であろう．$n \in \omega$ に対し，

κ は n-**膨大**	$\Leftrightarrow$	$j\colon V \prec M$ で $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ かつ ${}^{j^n(\kappa)}M \subseteq M$ となるものが存在する．
κ **は膨大**	$\Leftrightarrow$	κ は 1-膨大．
κ **はほとんど膨大**	$\Leftrightarrow$	$j\colon V \prec M$ で $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ かつ すべての $\gamma < j(\kappa)$ に対し，${}^{\gamma}M \subseteq M$ となる

とする．κ が 0-膨大となるのは，κ が可測基数であることと同値であること，また，$j\colon V \prec M$ が κ の n-膨大性を例証するものとなっているときには，$j^n(\kappa)$ は可測基数となる（M で可測になるが，$\mathcal{P}(j^n(\kappa))^M = \mathcal{P}(j^n(\kappa))$ だから，V でも可測となる）ことに注意．同様に，$j\colon V \prec M$ が κ **がほとんど膨大であることを例証しているとき，**$j(\kappa)$ **は** V **で到達不可能基数となる．**ほとんど膨大な基数の存在は，無矛盾性に関して，拡張可能基数の存在よりずっと強いものになることを後で見る．n-膨大基数は，γ-超コンパクト基数を連想

させ，実際に超巾による同様な特徴付けが可能で，この特徴付けにより ZFC での定式化が与えられる．しかし，違いは決定的である：γ-超コンパクト性では，γ が M の閉包性の度合としてあらかじめ与えられている（そして $\gamma < j(\kappa)$ となることが要求されている）のに対し，n-膨大性では，閉包性は M は $j^n(\kappa)$ 列に関し閉じている，として後から決定されるが，$j^n(\kappa)$ はどんなにも大きくなり得る．にもかかわらず，Victoria Marshall [89] では n-膨大性を反映の性質として考える試みがなされている．

膨大性は，1972 年にクーネンによって，ある相対的無矛盾性の結果を得るために十分な強い仮説の必要から導入されている．§17 の終わりでも述べたように，クーネン Kunen [78] は，膨大基数が存在すれば，強制法拡大で，そこで，ω_1 上 ω_2-飽和的なイデアルがあるようなものが存在する，ということを示している．この命題は，可測基数の存在より大きな無矛盾性の強さを持つことがすでに知られていたが，クーネンの結果は累積的階層の下の方に関する相対的無矛盾性の証明に可測性より強い仮説が用いられた最初の例となった．これ以来，超コンパクト性と —— それよりは頻度は低いが —— 膨大性は，そのような局面で主要な役割を果たすことになった．ほとんどの証明では，超コンパクト性により与えられる反映の現象に依存するものとなるが，まれには κ, $j(\kappa)$ と ${}^{j(\kappa)}M \subseteq M$ の間を行き来することで 2 つの基数に関する命題の相対的無矛盾性が確立されることもある．

無矛盾性の強さの上限が確立されると，この結果の色々な改良がすぐに得られている．例えば，クーネンの結果で膨大性が，ほとんど膨大で置き換えられることが分かり，この結果，ほとんど膨大の仮定がもっと注目されるようになる．この後，もっと重要な展開の一部として，Foreman-Magidor-Shelah [88] ではクーネンの結果でのこの仮説が超コンパクト性に弱められており，さらにこの後シェラハは仮定を実質的に無矛盾等価なものまにまで弱めている（32.10 とその前を参照）．しかし，ω_2 上に ω_3-飽和的イデアルを得るためには，依然として膨大性が必要である．超コンパクト性や膨大性に対する無矛盾等価の結果が，このような組合せ論的性質の方向で見つかることはないと思われるが，これらの仮説によって，このような組合せ論的性質の無矛盾性の強についての理解が深まった．

次の特徴付けは 24.2 の証明にすでに示唆されているものである．前の定義を用いて，ある $\mathcal{P}(\lambda)$ 上のフィルター F（つまり，$F \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\lambda))$）に対し，

$$F \text{ は正規} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} (i) \text{ 任意の } \alpha < \lambda \text{ に対し，} \{x \in \mathcal{P}(\lambda) \mid \alpha \in x\} \in F, \\ (ii) \text{ 任意の } \langle X_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle \in {}^\lambda F \text{ に対し，} \triangle_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in F \end{array}$$

とする．

24.8 定理 κ が n-膨大となるのは，$\kappa > \omega$ で，ある $\mathcal{P}(\lambda)$ 上の正規超フィルター U と基数 $\kappa = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = \lambda$ があって，各 $i < n$ に対し，

$$\{x \in \mathcal{P}(\lambda) \mid \mathrm{ot}(x \cap \lambda_{i+1}) = \lambda_i\} \in U$$

となるちょうどそのときである．

証明 $j\colon V \prec M$ が κ の n-膨大性を例証するものとなっているとする．$i \leq n$ に対し，$\lambda_i = j^i(\kappa)$ とおき，$\mathcal{P}(\lambda_n)$ 上の U を

$$X \in U \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq \mathcal{P}(\lambda_n) \ \wedge \ j``\lambda_n \in j(X)$$

として定義する．このとき，U は κ-完備な正規超フィルターとなることは容易に確かめられる．$i < n$ に対し，$\mathrm{ot}(j``\lambda_n \cap j(\lambda_{i+1})) = j(\lambda_i)$ となることに注意する．

逆の証明には，$j\colon V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V, U)$ とする．このとき，$\mathrm{id}\colon \mathcal{P}(\lambda) \to \mathcal{P}(\lambda)$ を恒等写像として，$[\mathrm{id}]_U = j``\lambda$ となるから，${}^{\lambda}M \subseteq M$ である．また，$i < n$ に対し，

$$\begin{aligned}\lambda_{i+1} &= \mathrm{ot}(j``\lambda \cap j(\lambda_{i+1})) \\ &= [\langle \mathrm{ot}(x \cap \lambda_{i+1}) \mid x \in \mathcal{P}(\lambda)\rangle]_U \\ &= [\langle \lambda_i \mid x \in \mathcal{P}(\lambda)\rangle]_U \\ &= j(\lambda_i)\end{aligned}$$

となる．最後に，$i = 0$ の場合と，κ-完備性から，$\mathrm{crit}(j) = \kappa$ が分かる．⊣

これから，いつものような反映の性質の議論により，期待されるような超越性の結果が導かれる：

24.9 演習

(a) I3 でのような $j\colon V_\delta \prec V_\delta$ で $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ となるものがあるなら，κ 上の正規超フィルターで，

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ はすべての } n \text{ に対し } n\text{-膨大}\} \in U$$

となるものが存在する．

(b) κ が $(n+1)$-膨大なら，κ 上の正規超フィルター U で，

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ は } n\text{-膨大}\} \in U$$

となるものが存在する．⊣

22.9 の前の γ-超コンパクト性に関する議論を用いると，24.8 から，「κ は n-膨大」が Σ_2^{ZF} であることが分かる．このことから次の考察が導かれる．

24.10 演習　(Morgenstern [79])．κ が超コンパクトで，κ より上に n-膨大基数が存在するなら，κ より下にも n-膨大基数が存在する．特に，超コンパクト基数と n-膨大基数が存在するときには，最小の n-膨大基数は，最小の超コンパクト基数より小さい．

ヒント　$\alpha < \kappa$ に対し，「α より上に n-膨大基数が存在する」という Σ_2^{ZF} 命題を考え，これに 22.3 を適用すればよい．⊣

膨大基数の存在が，超コンパクト基数の存在の無矛盾性を強い意味で帰結することはすぐに示されている．24.10 は超コンパクト性が大域的な反映の性質であることの帰結であり，このことは膨大性の無矛盾性の強さとは無関係である．

ほとんど膨大であるという性質は超フィルターの列を用いて特徴付けできる．$\kappa \le \lambda$ として，$\kappa \le \gamma < \lambda$ に対し，U_γ は $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターであるとする．このとき，$\langle U_\gamma \mid \kappa \le \gamma < \lambda\rangle$ が**一貫性を持つ**列である，というのを，$\kappa \le \gamma \le \delta < \lambda$ なら，常に

$U_\delta|\gamma = U_\gamma$ となることと定義する．これは，22.12 の後で述べた射影のプロセスを用いる定義となっている；$j_\gamma\colon V \prec M_\gamma \cong \mathrm{Ult}(V, U_\gamma)$ として，対応する埋め込み $k_{\gamma\delta}\colon M_\gamma \prec M_\delta$ で $j_\delta = k_{\gamma\delta} \circ j_\gamma$ となるものが，

$$k_{\gamma\delta}([\langle f(x) \mid x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma\rangle]_{U_\gamma}) = [\langle f(x \cap \gamma) \mid x \in \mathcal{P}_\kappa\delta\rangle]_{U_\delta}$$

で定義される．

24.11 定理 κ がほとんど膨大となるのは，到達不可能基数 $\lambda > \kappa$ と，すべての $\kappa \le \gamma < \lambda$ に対し，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルター U_γ が存在して，$\langle U_\gamma \mid \kappa \le \gamma < \lambda\rangle$ が一貫性を持ち，対応する j_γ と $k_{\gamma\delta}$ が次を満たすちょうどそのときである：$\kappa \le \gamma < \lambda$ で $\gamma \le \alpha < j_\gamma(\kappa)$ なら，δ で $\gamma \le \delta < \lambda$ かつ $k_{\gamma\delta}(\alpha) = \delta$ となるものが存在する．

証明 順方向の証明には，$j\colon V \prec M$ を κ がほとんど膨大であることを例証するようなものとする．$\lambda = j(\kappa)$ とおく．したがって，λ は到達不可能基数となっている．$\kappa \le \gamma < \lambda$ に対し，U_γ を

$$X \in U_\gamma \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq \mathcal{P}_\kappa\gamma \ \wedge\ j``\gamma \in j(X)$$

で定義する．このときすぐに分かるように，U_γ は $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターとなり，$\langle U_\gamma \mid \kappa \le \gamma < \lambda\rangle$ は一貫性を持った列となる．

次に，$\kappa \le \gamma < \lambda$ で，$f\colon \mathcal{P}_\kappa\gamma \to \kappa$ は $\gamma \le [f]_{U_\gamma} < j_\gamma(\kappa)$ となるようなものとなっていると仮定する．id: $\mathcal{P}_\kappa\gamma \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ を恒等写像とすると，$\gamma = \mathrm{ot}([\mathrm{id}]_{U_\gamma})$ となることに注意しすると，U_γ の定義から，$\gamma = \mathrm{ot}(j``\gamma) \le j(f)(j``\gamma) < j(\kappa) = \lambda$ となることが分かる．$\delta = j(f)(j``\gamma)$ とおくと，$\mathrm{ot}(j``\delta) = \delta = j(f)(j``\delta \ \cap j(\gamma))$ となるから，

$$\{x \in \mathcal{P}_\kappa\delta \mid \mathrm{ot}(x) = f(x \cap \gamma)\} \in U_\delta$$

である．したがって，$k_{\gamma\delta}$ の定義から，$k_{\gamma\delta}([f]_{U_\gamma}) = \delta$ となる．

逆方向の証明には，

$$\langle\langle M_\gamma \mid \kappa \le \gamma < \lambda\rangle, \langle k_{\gamma\delta} \mid \kappa \le \gamma \le \delta < \lambda\rangle\rangle$$

が順系となることに注意して，$\overline{M}$ をこの極限とする．λ は到達不可能基数だから，$\overline{M}$ は整順的となるので，$\overline{M}$ は内部モデルとなっているとしてよい．$\kappa \le \gamma < \lambda$ に対して，対応する $\overline{j}\colon V \prec \overline{M}$ と $k_\gamma\colon M_\gamma \prec \overline{M}$ で $\overline{j} = k_\gamma \circ j_\gamma$ となるものがとれる．$\alpha \le \gamma \le \delta < \lambda$ なら，$k_{\gamma\delta}(\alpha) = \alpha$ となる (22.12(b)) ことに注意すると，$k_\gamma(\alpha) = \alpha$ が分かる．

証明を終えるには，すべての $\beta < \lambda$ に対し，${}^\beta\overline{M} \subseteq \overline{M}$ で $\overline{j}(\kappa) = \lambda$ となることを示す．$\beta < \lambda$ で $s = \langle x_\alpha \mid \alpha < \beta\rangle \in {}^\beta\overline{M}$ なら，λ が正則基数であることから，$\beta \le \gamma < \lambda$ かつ $\{y_\alpha \mid \alpha < \beta\} \subseteq M_\gamma$ となる γ で，$\alpha < \beta$ に対し，$k_\gamma(y_\alpha) = x_\alpha$ となるものがある．${}^\gamma M_\gamma \subseteq M_\gamma$ だから，$t = \langle y_\alpha \mid \alpha < \beta\rangle \in M_\gamma$ で，$k_\gamma(\beta) = \beta$ となることに注意すると，$k_\gamma(t) = s \in \overline{M}$ となることが分かる．

$\overline{j}(\kappa) = \lambda$ を示すには，まず，$\gamma < \lambda$ なら，$\gamma < j_\gamma(\kappa)$ だから，

$$\gamma \le k_\gamma(\gamma) < k_\gamma(j_\gamma(\kappa)) = \overline{j}(\kappa)$$

となることに注意する．したがって，$\bar{j}(\kappa) \geq \lambda$ である．逆方向のために，$\beta < \bar{j}(\kappa)$ とする．γ と $\alpha < j_\gamma(\kappa)$ で，$k_\gamma(\alpha) \geq \beta$ となるものがある．$\alpha \leq \gamma$ なら，$\beta \leq k_\gamma(\alpha) = \alpha < j_\gamma(\kappa)$ となる．$\alpha > \gamma$ なら，仮定から，$\gamma \leq \delta < \lambda$ かつ，$k_{\gamma\delta}(\alpha) = \delta$ となる δ がとれる．ところが，$k_\delta(\delta) = \delta$ となるから，$\beta \geq k_\delta(\delta) = \delta < j_\delta(\kappa)$ である．したがって，どの場合にも，ある $\zeta < \lambda$ で $\beta < j_\zeta(\kappa)$ となるものがあるから，22.11(c) により，λ が到達不可能基数であることから，

$$\beta < j_\zeta(\kappa) < (2^{|\zeta|^{<\kappa}})^+ < \lambda$$

となる．したがって，$\bar{j}(\kappa) = \lambda$ となっている．　$\dashv$

24.12 演習　κ が膨大なら，κ 上の正規超フィルター U で，

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ はほとんど膨大}\} \in U$$

となるものがある．　$\dashv$

これらの Solovay-Reinhardt-Kanamori [78] の結果の後にも膨大基数の理論はいくつかの論文でさらに研究されている．ミグノン (Robert Mignone [84]) とディ・プリスコ Carlos Di Prisco とマレック Wiktor Marek (Di Prisco-Marek [84, 85]) は超フィルターによる特徴付けの吟味をしており，It Beng Tan [81], Barbanel-Di Prisco-Tan [84], Di Prisco-Henle [85], Abe [86], Di Prisco-Marek [88], Barbanel [89, 91, 91a] では様々な一般化や改良が考察されている．次のものは，超コンパクト性と拡張可能性の精神に基づく膨大性の大域的な一般化となっている：

κ は**超膨大**　$\Leftrightarrow$　任意の γ に対し，$j\colon V \prec M$ で
$\mathrm{crit}(j) = \kappa$, ${}^{j(\kappa)}M \subseteq M$ となるものが存在する．

次の結果はこの概念が全体の図式の中にうまくおさまることを示している：

24.13 定理　(Barbanel-Di Prisco-Tan [84]).

(a) κ が超膨大なら，κ は拡張可能で，κ 上の正規超フィルター U で，

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ は拡張可能}\} \in U$$

となるものが存在する．

(b) κ が 2-膨大なら，κ 上の正規超フィルター U で

$$\{\alpha < \kappa \mid V_\kappa \models \alpha \text{ は超膨大}\} \in U$$

となるものが存在する．

証明　(a) まず，すべての $\gamma \geq \kappa$ に対し，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターは容易に得られるから，κ は超コンパクトであることが示せる．次に，η を任意にとるとき，κ が η-拡張可能となることを示す：$j\colon V \prec M$ が κ の膨大性を例示していて，$\eta < j(\kappa)$ となっているとする．$e = j|V_{\kappa+\eta}$ とおく．$j(\kappa)$ は到達不可能基数だから，$e \in M$ となり，したがって，

$M \models$「κ は η-拡張可能」となる．ところが，初等的埋め込みにより，$M \models$「$j(\kappa)$ は超コンパクト」となるから，23.9(a) での議論により，$M \models$「$(V_{j(\kappa)} \models \kappa$ は η-拡張可能」が分かる．おしまいに，$V^M_{j(\kappa)} = V_{j(\kappa)}$ だから，κ は本当に η-拡張可能となっていることが分かる．

(a) の証明を完了するには，上の議論から，$j\colon V \prec M$ が κ の膨大性を例証する任意のものとするとき，$M \models$「$V_{j(\kappa)} \models \kappa$ は拡張可能」となることに注意する．したがって，U が j から定義された κ 上の正規超フィルターなら，$A = \{\alpha < \kappa \mid V_\kappa \models \alpha$ は拡張可能 $\} \in U$ となる．ところが，κ は拡張可能だから，23.11 により，すべての $\alpha \in A$ は拡張可能となることが分かる．

(b) ここでは暫定的に $\alpha \to (\beta)$ で次を表すことにする：α の膨大性を例証する $j\colon V \prec M$ で $j(\alpha) = \beta$ となるものが存在する．24.8 により，この主張から 対応する性質を持つ $\mathcal{P}(\beta)$ 上の超フィルターの存在が帰結できる．$j\colon V \prec M$ を κ の 2-膨大性を例証するものとする．このとき，${}^{j^2(\kappa)}M \subseteq M$ だから，$M \models \kappa \to (j(\kappa))$ となる．したがって，U を j から定義される κ 上の正規超フィルターとすると，$A = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \to (\kappa)\} \in U$ となる．すべての $\alpha \in A$ に対し，$M \models \alpha \to (\kappa)$ となるから，$\{\xi < \kappa \mid \alpha \to (\xi)\} \in U$ となり，したがってこの集合は κ で非有界となる．したがって，$A = \{\alpha < \kappa \mid V_\kappa \models \alpha$ は超膨大 $\}$ となる． ⊣

ヴォピェンカの原理

最後に，拡張可能基数の導入された頃に考察されはじめたモデル論的な仮説に戻って輪を閉じることにする．これは**ヴォピェンカの原理**と呼ばれているものである：

> 同じ言語の構造からなる任意の真のクラスに対し，その要素で別の要素に初等的埋め込み可能なものが存在する．

これは，その直截な記述と，集合とクラスの違いについての分かりやすい動機により，大変魅力的な仮説である．同じ言語の構造の真のクラス $\{\mathcal{M}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On}\}$ が与えられたとき，この中の 2 つの要素，実際には真のクラスとなっている部分クラスで，同じ理論を持つものがある．ヴォピェンカの原理はそれらの構造の要素に基づく，更なる類似性ということで動機づけすることができる：真のクラスの豊かさと，クラスの定義から強制される一様性は $\mathcal{M}_\alpha = \langle V_\alpha, \in \rangle$ というようなクラスである構造が他の構造の初等的部分構造であることを示唆する．他方，$\mathcal{M}_\alpha = \langle V_{\gamma_\alpha}, \in, \{\alpha\} \rangle$ で $\gamma_\alpha > \alpha$ なら，単項集合の述語のために，$\alpha < \beta$ に対し，$\mathcal{M}_\alpha \prec \mathcal{M}_\beta$ とはなり得ない．しかし，このことは，対応において要素の呼びかえを許すこと，つまり，初等的埋め込み $j\colon \mathcal{M}_\alpha \prec \mathcal{M}_\beta$ —— この場合には $j(\alpha) = \beta$ となっていなければならない —— を許すことで回避できる．要素を含めた類似性の一般原理を述べるために必要であった，この初等的部分構造から初等的埋め込みへの移行は，劇的なものであった．何人かの人々は，すぐにこれの示唆するものを理解して，ヴォピェンカの原理から拡張可能基数の存在が帰結されることに気付いている．

ヴォピェンカの原理は ZFC では定式化することができない．Solovay-Reinhardt-Kanamori [78] では，クラスの理論でこの原理からの帰結を扱っているが，そこでの仕事は，本書では

Kanamori [78] でのように，到達不可能な κ で $V_\kappa \models$ 定義できる “クラス” のみでなく任意の $X \subseteq V_\kappa$ に対しヴォピェンカの原理が成り立つ，ようなものを用いて述べることにする．議論を限定するために，構造の列 $\langle \mathcal{M}_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ は $\mathcal{M}_\alpha$ が $\langle V_{f(\alpha)}, \in, \{\alpha\}, R_\alpha \rangle$ の形を持っているとき，**自然な列**であるということにする．ここに，$R_\alpha \subseteq V_{f(\alpha)}$ で，$\alpha < \beta < \kappa$ なら，$\alpha < f(\alpha) \leq f(\beta) < \kappa$ であるとする．コーディングにより，自然な列で R_α は有限個の関係で置き換えられた形で考えてよい．$\mathcal{M}_\alpha$ で $\{\alpha\}$ を指定してあることにより，$\alpha < \beta$ で $j\colon \mathcal{M}_\alpha \prec \mathcal{M}_\beta$ なら $j(\alpha) = \beta$ とならなければならないから，j は必ず順序数を動かすものとなっている．

分別不可能性を対応するフィルターにより考察したとき (§6) のように，到達不可能基数 κ に対し，ここでの κ の無視できない部分集合を次のように定義する：$X \subseteq \kappa$ に対し，

X は κ で**ヴォピェンカ**　$\Leftrightarrow$　任意の自然な列 $\langle \mathcal{M}_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ に対し，$\alpha < \beta < \kappa$ で $j\colon \mathcal{M}_\alpha \prec \mathcal{M}_\beta$ となり，この臨界点が X に属すようなものが存在する

また，

κ は**ヴォピェンカ**　$\Leftrightarrow$　κ は κ でヴォピェンカ

とする．これにより，無視できる集合を除いてすべての元からなる部分集合の族を考えることができるようになる：

$$F = \{X \subseteq \kappa \mid \kappa - X \text{ は } \kappa \text{ でヴォピェンカでない}\}$$

とする．$X \in F$ $\Leftrightarrow$ 自然な列 $\langle \mathcal{M}_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ で，任意の $\alpha < \beta < \kappa$ と $j\colon \mathcal{M}_\alpha \prec \mathcal{M}_\beta$ に対し，これの臨界点は X の元となる，ということに注意する．また，$X, Y \in F$ なら，$X \cap Y \in F$ となることは，対応する2つの自然な列を一つに融合することで示せる．おしまいに，$\langle \mathcal{A}_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle \in {}^\kappa V_\kappa$ が同一の言語上の構造の列のときに，各 $\mathcal{A}_\alpha$ は $\mathcal{M}_\alpha$ で，したがって，自然な列でもコーディングがでる．よって，X が κ でヴォピェンカなら，$\alpha < \beta < \kappa$ と $j\colon \mathcal{A}_\alpha \prec \mathcal{A}_\beta$ が存在して，これが臨界点を持っている場合には，それは X に属すものとなる．以上の注意により，

F は（真の）フィルターである　$\Leftrightarrow$　$V_\kappa \models$ ヴォピェンカの原理　$\Leftrightarrow$　κ はヴォピェンカ

が分かる．F は κ 上の**ヴォピェンカ・フィルター**と呼ばれ，これが，真のフィルターとなっている，という仮定はこの用語の使いかたの中に暗に含まれている．§6 の用語で言うと，κ がヴォピェンカであるということは V_κ の Π^1_1 の性質であり，したがって，κ の弱コンパクト性すらこのことから帰結できないのであるが，次のいくつかの命題は，強い意味で V_κ の中に拡張可能基数が存在することを帰結する，構造に関する情報を与えるものとなっている．

24.14 命題　κ 上のヴォピェンカ・フィルターは正規である．

証明　X が κ でヴォピェンカであるとして，反対に各 $\gamma < \kappa$ に対し，$f^{-1}(\{\gamma\})$ が κ で

ヴォピェンカでないと仮定してみる．つまり，自然な列 $\langle \mathcal{M}^\gamma_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ で，この中のどの構造から別の構造への初等的埋め込みとその臨界点 ρ に対しても，$f(\rho) \neq \gamma$ となるものが存在する，とする．自然な列 $\langle \mathcal{N}_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ を，

$$\mathcal{N}_\alpha = \langle V_{g(\alpha)+\omega}, \in, \{\alpha\}, \langle \mathcal{M}^\gamma_\alpha \mid \gamma < \alpha\rangle, f|\alpha\rangle$$

とおくことで定義する．ここに $V_{g(\alpha)}$ は $\gamma < \alpha$ に対する $\mathcal{M}^\gamma_\alpha$ の領域の和である．X はヴォピェンカだから，$j\colon \mathcal{N}_\alpha \prec \mathcal{N}_\beta$ でその臨界点が $\eta \in X$ となるものが存在する．ところが，$f(\eta) < \eta$ なら $j(f(\eta)) = f(\eta)$ だから，$j|\mathcal{M}^{f(\eta)}_\alpha\colon \mathcal{M}^{f(\eta)}_\alpha \prec \mathcal{M}^{f(\eta)}_\beta$ は η を臨界点に持つが，これは矛盾である．　⊣

この結果は，Kanamori [78] のより一般的な図式で，この仮説を解析して n-膨大基数にそって持ちあげるときの $n=1$ での場合となっている．

24.15 命題　$\{\xi < \kappa \mid V_\kappa \models \xi$ は拡張可能$\}$ は κ 上のヴォピェンカ・フィルターの元となる．

証明　$g \in {}^\kappa\kappa$ を，

$$g(\xi) = \begin{cases} \xi & V_\kappa \models \xi \text{ は拡張可能　のとき，そうでなければ} \\ \xi + \eta & \text{ここに } \eta \text{ は } V_\kappa \models \xi \text{ は } \eta\text{-拡張可能でない　となる最小の順序数} \end{cases}$$

として定義する．$C = \{\rho < \kappa \mid g|\rho\colon \rho \to \rho\}$ とおくと，C は閉非有界となるから，24.14 により C は κ 上のヴォピェンカ・フィルターの元となる．そこで，$\langle \mathcal{M}_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ を自然な列で，この中の一つの構造から別の構造への任意の初等的埋め込みの臨界点 ρ が $\rho \in C$ となるようなものとする．ここで自然な列 $\langle \mathcal{N}_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ を，

$$\mathcal{N}_\alpha = \langle V_{\gamma_\alpha}, \in, \{\alpha\}, \mathcal{M}_\alpha, C \cap \gamma_\alpha\rangle$$

として定義する．ここに γ_α は，$\mathcal{M}_\alpha$ の領域に含まれる順序数のどれよりも大きいような C の最小の極限点とする．証明を完了させるには，$j\colon \mathcal{N}_\alpha \prec \mathcal{N}_\beta$ が臨界点 ξ を持つなら，ξ は拡張可能となることが示せれば十分である：

逆に，これが成り立たないと仮定してみる．したがって，$g(\xi) > \xi$ となっている．$\xi < \gamma_\alpha$ で $\gamma_\alpha \in C$ だから，$g(\xi) < \gamma_\alpha$ である．よって，$j|V_{g(\xi)}\colon V_{g(\xi)} \prec V_{j(g(\xi))}$ で ξ がこれの臨界点となっている．また，$\mathcal{M}_\alpha$ は $\mathcal{N}_\alpha$ にコードされているから，$\xi \in C$ となることにも注意する．したがって，$C \cap \gamma_\alpha$ は $\mathcal{N}_\alpha$ にコードされていることから，$j(\xi) \in C$ となる．よって，$\xi < j(\xi)$ により，$g(\xi) < j(\xi)$ となる．ところが，このとき，$g(\xi) = \xi + \eta$ とすれば，これらの性質から，$V_\kappa \models \xi$ は η-拡張可能　となるが，これは $g(\xi)$ の定義に矛盾である．　⊣

次の命題は，ヴォピェンカ・フィルターがマーロの演算に類似の強い演算で閉じていることを示している．

24.16 命題　X を κ 上のヴォピェンカ・フィルターの元とするとき，$\{\xi < \kappa \mid \xi$ は可測で $X \cap \xi$ を含む ξ 上の正規超フィルターが存在する$\}$ もヴォピェンカ・フィルターの元となる．

証明　自然な列 $\langle \mathcal{M}_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ を

$$\mathcal{M}_\alpha = \langle V_{\alpha+\omega}, \in, \{\alpha\}, \{X \cap \alpha\} \rangle$$

として定義する．$j\colon \mathcal{M}_\alpha \prec \mathcal{M}_\beta$ が臨界点 $\xi \in X$ を持てば，ξ 上の正規超フィルターで $X \cap \xi$ を含むものが存在することが示せれば十分である．ところが，U を j からいつものようにして定義された ξ 上の正規超フィルターとするとき，

$$j(X \cap \xi) = j(X \cap \alpha \cap \xi) = j(X \cap \alpha) \cap j(\xi) = (X \cap \beta) \cap j(\xi) = X \cap j(\xi)$$

で，$\xi \in X \cap j(\xi)$ だから，$X \cap \xi \in U$ となる．　⊣

24.17 系　κ がヴォピェンカなら，κ は κ-マーロで，集合

$$\{\xi < \kappa \mid V_\kappa \models \xi \text{ は拡張可能で } \xi \text{ 上の正規超フィルターで } \{\zeta < \xi \mid V_\kappa \models \zeta \text{は拡張可能}\} \text{ を含むものが存在する}\}$$

は κ で定常となる．

証明　24.14, 24.15, および 24.16 による．　⊣

パウエル William Powell [72] や他の人々は巨大基数の階層でヴォピェンカの原理をほとんど膨大であることの下に位置付けている．実はこれを示すために必要となるよりずっと強い以下のような命題を確立することができる．

24.18 定理　κ をほとんど膨大であるとする．このとき，κ 上の正規超フィルター U で以下の性質を持つものが存在する：

(a) 任意の自然な列 $\langle \mathcal{M}_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ に対し，$Y \in U$ で，$\alpha < \beta$ がともに Y の元なら，初等的埋め込み $\mathcal{M}_\alpha \prec \mathcal{M}_\beta$ で臨界点が α となるものがとれるようなものが存在する．

(b) $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ はヴォピェンカ}\} \in U$.

証明　$j\colon V \prec M$ が κ がほとんど膨大であることの例証となっているとして，U を j から定義される正規超フィルターとする．(a) を示すために，$\langle \mathcal{M}_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ を自然な列とする．$\alpha < \kappa$ に対し，$X_\alpha = \{\xi < \kappa \mid \text{初等的埋め込み}: \mathcal{M}_\alpha \prec \mathcal{M}_\xi \text{ で，臨界点 } \alpha \text{ を持つものが存在する}\}$ として，$T = \{\alpha < \kappa \mid X_\alpha \in U\}$ とする．後で $T \in U$ を示す．これを用いて，U が正規超フィルターであることから，

$$Y = \{\alpha \in T \mid \alpha \in \textstyle\bigcap_{\beta \in \alpha \cap T} X_\beta\} \in U$$

が分かるが，明らかに Y は求めるようなものとなる．

$T \in U$ を示すには，

$$j(\langle \mathcal{M}_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle) = \langle \mathcal{M}^*_\alpha \mid \alpha < j(\kappa) \rangle,$$
$$j(\langle \mathcal{M}^*_\alpha \mid \alpha < j(\kappa) \rangle) = \langle \mathcal{M}^{**}_\alpha \mid \alpha < j^2(\kappa) \rangle,$$
$$j(\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle) = \langle X^*_\alpha \mid \alpha < j(\kappa) \rangle$$

とする．すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$\mathcal{M}^*_\alpha = \mathcal{M}_\alpha$ となることに注意すると：$X_\alpha \in U \iff \kappa \in j(X_\alpha) \iff$ 初等的埋め込み: $\mathcal{M}_\alpha \prec \mathcal{M}^*_\kappa$ で臨界点 α を持つものが存在する，となる．したがって，$T \in U \iff \kappa \in j(T) \iff X^*_\kappa \in j(U) \iff$ in M, 初等的埋め込み: $\mathcal{M}^*_\kappa \prec \mathcal{M}^{**}_{j(\kappa)}$ で臨界点 κ を持つものが存在する，が言える．ところが，$\bar{j} = j|\mathcal{M}^*_\kappa$ とおくと，$\bar{j}$: $\mathcal{M}^*_\kappa \prec \mathcal{M}^{**}_{j(\kappa)}$ となる．また，$\bar{j}$ は $\mathcal{M}^*_\kappa$ の領域の濃度を持つ M の部分集合だから，この濃度は $j(\kappa)$ より小さい．したがって，$\bar{j} \in M$ となり，$T \in U$ である．

(b) については，(a) により $M \models$「κ はヴォピェンカ」となっていることに注意すればよい． ⊣

最後に，"太字" 版の拡張可能性と超コンパクト性によるヴォピェンカの原理の特徴付けを Solovay-Reinhardt-Kanamori [78] から引用する．モデル理論的論理による特徴付けはフィッシャー Edward Fisher [77] とマコウスキー Johann Makowsky [85] により与えられている．このために次の定義をする：任意の集合 A と $\kappa \leq \eta$ に対し，

κ は A で η-**拡張可能** $\iff$ ζ と j: $\langle V_\eta, \in, A \cap V_\eta \rangle \prec \langle V_\zeta, \in, A \cap V_\zeta \rangle$ で，$\mathrm{crit}(j) = \kappa$, $\eta < j(\kappa)$ となるものが存在する

κ は A で η-**超コンパクト** $\iff$ $\alpha < \kappa$ と e: $\langle V_\alpha, \in, A \cap V_\alpha \rangle \prec \langle V_\eta, \in, A \cap V_\eta \rangle$ で，$\delta = \mathrm{crit}(e)$ として，$e(\delta) = \kappa$ となるものが存在する

とする．二番目の定義は，22.10 での特徴付けに基づいている．上の A を前の議論にとりこむことで次の特徴付けが得られる：

24.19 演習 到達不可能な κ に対し，次は同値である：

(a) κ はヴォピェンカ．

(b) 任意の $A \subseteq V_\kappa$ に対し，$\alpha < \kappa$ で，すべての $\eta < \kappa$ に対し A で η-拡張可能となるものが存在する．

(c) 任意の $A \subseteq V_\kappa$ に対し，$\alpha < \kappa$ で，すべての $\eta < \kappa$ に対し A で η-超コンパクトとなるものが存在する．

ヒント 24.15 の証明を変更することで (a) →(b) が得られる．

(b) → (c) には，任意の $A \subseteq V_\kappa$ に対し，α がすべての $\eta < \kappa$ に対し A で η-拡張可能なら，α はすべての $\eta < \kappa$ に対し A で η-超コンパクトとなることを示せばよい．このような α に対し，

$$j: \langle V_{\eta+\omega}, \in, A \cap V_{\eta+\omega} \rangle \prec \langle V_\zeta, \in, A \cap V_\zeta \rangle$$

を $\mathrm{crit}(j) = \alpha$ で $\eta < j(\alpha)$ となるようなものとする．$\bar{j} = j|V_\eta$ とおく．このとき，$\bar{j} \in V_\zeta$ となり，$A \cap V_\eta = (A \cap V_{j(\eta)}) \cap V_\eta = j(A \cap V_\eta) \cap V_\eta$ となることに注意すると，

$$\bar{j}: \langle V_\eta, \in, j(A \cap V_\eta) \cap V_\eta \rangle \prec \langle V_{j(\eta)}, \in, j(A \cap V_\eta) \rangle$$

となる．ここで j が初等的埋め込みであることを用いればよい（22.10 を参照）．

A の列を自然な列と見なして議論することで (c) → (a) が確立できる． ⊣

ラインハートの拡張可能性からクーネンの矛盾命題にいたる強い仮説は短期間に定式化され線型な階層に組織化された．それ以来，この大伽藍の堅牢さは確かめられ，膨大性やI0-I3からの相対的無矛盾性の結果やこれらの仮説における構造の解明によりさらに強化された．もちろん，新たな矛盾の結果が出ることがあれば，これはエキサイティングな展開となるが，時がたち，これらの仮説の解析や応用が進むにつれ，受容とまではいかなくとも，これらの仮説がもっと自信を持って取り扱われてよいというような雰囲気が出てきたのである．

§25　$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ の組合せ論

超コンパクト性の研究で $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ が現れたことから，この集合に関するいくつかの組合せ論的な問題が注目されるようになり，この方向の研究が活発になった．本節では，この派生分野での 1980 年代の仕事を考察する．簡便のため，

この節を通じて，κ は正則な非可算基数とし，$\kappa \le \gamma$ とする．

この分野の出発点となった論文は Jech [73] であったが，そこでは，可測性から，γ-超コンパクト性への一般化の精神に則り，$\langle\kappa, <\rangle$ での組合せ論的性質やそこでの問題を $\langle\mathcal{P}_\kappa\gamma, \subset\rangle$ でのものへと拡張するというアイデアを押し進めている．これに続く仕事で基本となるのは Jech [71] での閉非有界集合と定常集合の概念の一般化であった：$X \subseteq \mathcal{P}_\kappa\gamma$ に対し，

X は $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で非有界	$\Leftrightarrow$	任意の $y \in \mathcal{P}_\kappa\gamma$ に対し，$x \supseteq y$ となる $x \in X$ が存在する．
X は $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で閉	$\Leftrightarrow$	任意の $\{x_\xi \mid \xi < \beta\} \subseteq X$ に対し，$\beta < \kappa$ で，$\xi \le \zeta < \beta$ なら，つねに $x_\xi \subseteq x_\zeta$ となっているとき，$\bigcup_{\xi<\beta} x_\xi \in X$ が成り立つ．
X は $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で閉非有界	$\Leftrightarrow$	X は $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で閉，かつ $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で非有界．
X は $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で定常	$\Leftrightarrow$	すべての $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で閉非有界な C に対し，$X \cap C \neq \emptyset$

とする．“$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で” は文脈から明らかなときには，省略することにする．すべての $s \in \mathcal{P}_\kappa\gamma$ に対し，$\{x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma \mid s \subseteq x\}$ は閉非有界となるから，$X \subseteq \mathcal{P}_\kappa\gamma$ が定常なら，X は非有界となることに注意する．キューカー David Kueker [72] も，モデル理論での応用のために，これらの概念を $\kappa = \omega_1$ の場合に定式化しており，Kueker [77] がこの方向での彼の仕事を総括している．

$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で閉であることのイェヒによる最初の定式化は上とは異なったものであったが，これの上の定義との同値をソロヴェイが指摘している．この最初の定式化も有用であるので，次の補題で再現しておくことにする．集合 D は 任意の $x, y \in D$ に対し，$z \in D$ で $x \cup y \subseteq z$ となるものが存在するとき，$\subseteq$-有向であるという．ソロヴェイの指摘は実際には，超限有向集合に関する一般的な結果の $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ での場合となっている：

25.1 補題 (Cohn [65: 33]; Isbell [66]). X が $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で閉となるのは，任意の $\subseteq$-有向な $D \subseteq X$ で $|D| < \kappa$ となるものに対し，$\bigcup D \in X$ となる，ちょうどそのときである．

証明 問題となる方向は $|D|$ に関する帰納法により証明される．$|D|$ が有限なら，この結果は明らかである．$|D| < \kappa$ は無限で，$\subseteq$-有向で $|E| < |D|$ となる各 $E \subseteq X$ に対し，$\bigcup E \in X$ が成り立つと仮定する．D を $\{x_\alpha \mid \alpha < |D|\}$ と枚挙する．$D_\alpha, \alpha < |D|$ を $\subseteq$-有向な D の部分集合で，$\{x_\alpha\} \cup \bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta$ を含むもののうち最小の濃度を持つものとして帰納的に定義する．閉包の議論により，α が有限なら D_α も有限となり，そうでないときには，$|D_\alpha| = |\bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta| = |\alpha|$ となることが容易に示せる．$\alpha < |D|$ に対し，$y_\alpha = \bigcup D_\alpha$ とおく．帰納法により，各 y_α は X の元であることが示せ，$\alpha \leq \overline{\alpha} < |D|$ に対し，$y_\alpha \subseteq y_{\overline{\alpha}}$ となるから，$\bigcup_{\alpha<|D|} y_\alpha = \bigcup D \in X$ となる． ⊣

次は 0.1 と類似する性質の多くを与えるが，証明もそこでと同様にしてできる．

25.2 演習 (Jech [71]).

(a) $\eta < \kappa$ で $\langle C_\alpha \mid \alpha < \eta\rangle$ は $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ での閉非有界集合の列なら，$\bigcap_{\alpha<\eta} C_\alpha$ も $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で閉非有界となる．

(b) $\langle C_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle$ が $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ での閉非有界集合の列なら，これの対角共通部分 $\triangle_{\alpha<\gamma} C_\alpha = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma \mid x \in \bigcap_{\alpha\in x} C_\alpha\}$ も $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で閉非有界となる．

(c) S を $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で定常として，f を S 上の選択関数とする（つまり，$f(x) \in x$ がすべての $x \in S - \{\emptyset\}$ に対し成り立つものとする）．このとき，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で定常な $T \subseteq S$ で，f が T 上定値関数となるようなものが存在する． ⊣

$\mathcal{C}_{\kappa,\gamma}$ で $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ の閉非有界部分集合から生成されるフィルターを表すことにする：

$$\mathcal{C}_{\kappa,\gamma} = \{X \subseteq \mathcal{P}_\kappa\gamma \mid \exists C(C \text{ は } \mathcal{P}_\kappa\gamma \text{ で閉非有界 } \wedge\ C \subseteq X)\}.$$

このとき 25.2 により，$\mathcal{C}_{\kappa,\gamma}$ は $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規フィルターとなり，**$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の閉非有界フィルターとよばれる**．

メナスは，$\mathcal{C}_{\kappa,\gamma}$ に関する有用な基本定理を確立している．$n \in \omega$ と f: $[\gamma]^n \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ に対し，

$$C(f) = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma \mid \forall s \in [x]^n (f(s) \subseteq x)\}$$

とする．f: $[\gamma]^{<\omega} \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ に対しても同様に $C(f)$ を定義する．このような $C(f)$ が閉非有界となることは容易に示せる．

25.3 命題 (Menas [74]). すべての $X \subseteq \mathcal{P}_\kappa\gamma$ に対し，$X \in \mathcal{C}_{\kappa,\gamma}$ となるのは，f: $[\gamma]^2 \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ で $C(f) \subseteq X$ となるようなものが存在する，ちょうどそのときである．

証明 問題となる方向を示すために，C を閉非有界とする：f: $[\gamma]^2 \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ で $C(f) \subseteq C$ となるものを見つけなければならないが，そのために，まず，g: $[\gamma]^{<\omega} \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ で $C(g) \subseteq C$ となるものを見つけて，その後これをさらに改良する：

$s \in [\gamma]^{<\omega}$ に対し，$g(s)$ を $|s|$ に関する帰納で次のように定義する：$g(\emptyset)$ は任意の C の要素となる無限集合とする．$|s| = n+1$ なら，$g(s)$ は $s \cup \{g(t) \mid t \in [s]^n\} \subseteq g(s)$ を満

たし $g(s) \in C$ となるようなものとする．このとき $C(g) \subseteq C$ となる：$x \in C(g)$ なら，x は無限で，$\bigcup\{g(s) \mid s \in [x]^{<\omega}\} \subseteq x$ となる．したがって，$s \subseteq g(s)$ により，これらは等しくなる．ところが明らかに $\{g(s) \mid s \in [x]^{<\omega}\}$ は $\subseteq$-有向だから，25.1 により $x \in C$ となるからである．

次に以下を示す：

(∗)　$1 < n < \omega$ で h: $[\gamma]^n \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ なら，$\overline{h}$: $[\gamma]^2 \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ で $C(\overline{h}) \subseteq C(h)$ となるものが存在する．

これが示されたとすると，次のようにして証明を完了することができる：各 $n \in \omega$ に対し，g_n: $[\gamma]^2 \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ を $C(g_n) \subseteq C(g|[\gamma]^n)$ となるようにとり，f: $[\gamma]^2 \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ を $f(s) = \bigcup_n g_n(s)$ で定義する．このとき，$C(f) \subseteq \bigcap_n C(g_n) \subseteq C(g) \subseteq X$ となる．

(∗) を確立するには，$n > 1$ で h: $[\gamma]^{n+1} \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ なら，$\overline{h}$: $[\gamma]^n \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ で $\overline{h}$: $[\gamma]^n \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ となるようなものが存在することを示せればよい．これを用いて，有限回の降下により命題が示せるからでる．このために，p: $[\gamma]^2 \to \gamma$ を $\max(\alpha,\beta) \le p(\alpha,\beta)$ となる全単射として，π_0, π_1: $\gamma \to \gamma$ を $p(\pi_0(\alpha), \pi_1(\alpha)) = \alpha$ がすべての $\alpha < \gamma$ に対し成り立つようなものとする．$\overline{h}$: $[\gamma]^n \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ を，任意の $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \gamma$ に対し，$\overline{h}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in C(h)$ で

$$\overline{h}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \supseteq \{p(\alpha_{n-1}, \alpha_n)\} \cup h(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \pi_0(\alpha_n), \pi_1(\alpha_n))$$

となるようにとる．このとき，$C(\overline{h}) \subseteq C(h)$ である：$x \in C(\overline{h})$ で $\alpha_1 < \cdots < \alpha_{n+1}$ がすべて x の元なら，$p(\alpha_n, \alpha_{n+1}) \in \overline{h}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \subseteq x$ となり，したがって，

$$h(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \subseteq \overline{h}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, p(\alpha_n, \alpha_{n+1})) \subseteq x$$

となるからである．　⊣

特に，この結果は，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で閉非有界な任意の C に対し，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で閉非有界な $\overline{C} \subseteq C$ で，任意の $x, y \in \overline{C}$ に対し，$x \cap y \in \overline{C}$ となるようなものが存在することを示している．C が $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で閉非有界で，任意の $x, y \in C$ に対し，$x \cup y \in C$ となっているなら，f: $[\gamma]^1 \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ で，$C(f) \subseteq C$ となるものが存在する：$\alpha < \lambda$ に対し，$f(\{\alpha\}) \in C$ を $\alpha \in f(\{\alpha\})$ となるようにとればよい．しかしながら，メナスは $\gamma \ge \kappa^+$ に対しては 25.3 での $[\gamma]^2$ は $[\gamma]^1$ では置き換えられないことを示している．特に，このような γ に対しては $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で閉非有界な C で，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で閉非有界な任意の $\overline{C} \subseteq C$ に対し，$x, y \in \overline{C}$ で，$x \cup y \notin \overline{C}$ となるものがとれるようなものが，存在する．カー Donna Carr [82] は和集合に関して閉じているような閉非有界集合を研究している；また，彼女は閉非有界フィルター $\mathcal{C}_\kappa$ がすべての κ 上の正規フィルターに含まれることに対応する，次の命題を指摘しているが，これは，Menas [74: 332] でも，ほとんど明言されている．

25.4 命題　(Carr [82], Menas [74]). F が $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規フィルターなら，$\mathcal{C}_{\kappa,\gamma} \subseteq F$ が成り立つ．

証明　この命題が成り立たないと仮定してみる．このときには．前の命題により，f: $[\gamma]^2 \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ で，$X = \mathcal{P}_\kappa\gamma - C(f)$ が F-定常となるものがある．各 $x \in X$ に対し，x の元 $\alpha_x < \beta_x$

で，$f(\alpha_x, \beta_x) \not\subseteq x$ となるものが存在する．正規性 (22.6) を 2 回適用すると，F-定常な $Y \subseteq X$ と $\alpha < \beta$ で，すべての $x \in Y$ に対し，$\alpha_x = \alpha$ かつ $\beta_x = \beta$ となるものが存在する．ところが，Y は非有界だから，$y \in Y$ で $f(\alpha, \beta) \subseteq y$ となるものが存在しなくてはならず，これは矛盾である． ⊣

イェヒ Jech [73] はこれより前に U が $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターなら，$\mathcal{C}_{\kappa,\gamma} \subseteq U$ となることを示している．

類似性を追究してゆくと，次の自然な問題は，κ の定常集合がつねに κ 個の互いに素な定常集合に分割できる，というソロヴェイの結果 16.9 の一般化となるであろう．メナス Menas [74: 337] は，$\lambda > \kappa$ に対し：

すべての $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の定常な部分集合は $\lambda^{<\kappa}$ 個の互いに素な定常集合に分割できる

という仮説を立てている．ほとんどの結果はこの主張で $\lambda^{<\kappa}$ を λ に置き換えたものに関するものであった．手始めとなる事実は特定の定常集合を考察することから得られる．

25.5 命題 $\kappa \le \lambda$ で $S = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \mid |x \cap \kappa| = |x|\}$ とする．このとき，

(a) S は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ で定常である．

(b) κ が非極限順序数なら，$S \in \mathcal{C}_{\kappa,\lambda}$ となる．

(c) $\kappa < \lambda$ で κ は λ-超コンパクトなら，$S \notin \mathcal{C}_{\kappa,\lambda}$ となる．

(d) (Baumgartner) $X \subseteq S$ が定常なら，X は λ 個の互いに素な定常な部分集合に分割できる．

証明 (a) C が $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ で閉非有界とする．このとき，$x_n \subseteq x_{n+1}$ となる $x_n \in \mathcal{P}_\kappa\lambda, n \in \omega$ で，$x_{2m} \in S$ かつ $x_{2m+1} \in C$ がすべての $m \in \omega$ に対し成り立つようなものが容易にとれるが，$\bigcup_{n\in\omega} x_n \in S \cap C$ である．

(b) $\kappa = \nu^+$ なら，$\{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \mid |x \cap \kappa| = \nu\}$ は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ で閉非有界だが，この集合は S に含まれている．

(c) U を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の正規超フィルターとするとき，$\kappa < \lambda$ から，22.11(a) により，$\{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \mid |x \cap \kappa| < |x|\} \in U$ となる．ところが，前の命題により $\mathcal{C}_{\kappa,\lambda} \subseteq U$ だから，$S \notin \mathcal{C}_{\kappa,\lambda}$ である．

(d) 各 $x \in X$ に対し，$f_x \colon x \to x \cap \kappa$ を単射とする．$\alpha < \lambda$ に対し，定常集合 $\{x \in X \mid \alpha \in x\}$ 上の g_α を $g_\alpha(x) = f_x(\alpha)$ で定義する．このとき，25.2(c) により，定常な $X_\alpha \subseteq X$ で，g_α がその上で定値，例えば $\eta_\alpha < \kappa$ をとるようなものがある．

ここで，$\mathrm{cf}(\nu) > \kappa$ となるような任意の $\nu \le \lambda$ に対し，$\eta < \kappa$ で，$|\{\alpha < \nu \mid \eta_\alpha = \eta\}| = \nu$ となるものが存在するから，$\{X_\alpha \mid \alpha < \nu \ \wedge \ \eta_\alpha = \eta\}$ は ν 個の互いに素な X の定常な部分集合の族となっていることが容易に分かる．したがって，$\mathrm{cf}(\lambda) > \kappa$ の場合には結果が得られた．一方，$\mathrm{cf}(\lambda) \le \kappa$ なら，$\kappa < \lambda$ と仮定してよい；そうでないときには，ソロヴェイの 16.9 と 22.5(b) から結果が得られるからである．そこで，$\langle \mu_\alpha \mid \alpha < \mathrm{cf}(\lambda) \rangle$ を λ での正則基数の上昇列で $\kappa < \mu_0$ となるものとする．上で $\nu = \kappa^+ \le \lambda$ として，まず，X を互いに素な定常集合の族に $X = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} Y_\alpha$ と分割する．次に，各 $\alpha < \mathrm{cf}(\lambda) \le \kappa$ に対し，上の議論で X を Y_α で置き換えたものを適用して，Y_α を μ_α 個の互いに素な定常集

合の族に分割する．最後に，これらの分割を X の λ 個の互いに素な定常集合への分割にまとめればよい． ⊣

25.6 系　$\kappa \leq \lambda$ とする．このとき，

(a) $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ は λ 個の互いに素な定常集合に分割できる．

(b) (正則な λ に対しては Jech [73]; Matsubara [87]) κ を非極限順序数とするとき，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の任意の定常部分集合は λ 個の互いに素な定常集合に分割できる． ⊣

ディ・プリスコ (Di Prisco-Marek [82] を参照) は，正則基数 $\lambda \geq \kappa$ に対し，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ のすべての閉非有界集合は λ 個の互いに素な定常集合に分割することができることを示している．κ が弱到達不可能な場合に，彼は定常と閉非有界の間の概念となっている**超定常性**を定式化して，正則基数 $\lambda \geq \kappa$ に対し，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の超定常集合はつねに λ 個の互いに素な超定常集合に分割できることを示している．25.5(c) でのように $S \notin \mathcal{C}_{\kappa,\lambda}$ なら，S は定常だが超定常ではないような $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の部分集合の例となっている．

1981 年に，バウムガルトナーは，集合 S に関して，巨大基数との直接的な関係を再び確立する次の命題を指摘している：

25.7 定理　(Baumgartner). 25.5 の仮定のもとで，もし $0^\#$ が存在しないなら，$S \in \mathcal{C}_{\kappa,\lambda}$ となる．したがって，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ のすべての定常部分集合は λ 個の互いに素な定常集合に分割できる．

証明　逆に，$S \notin \mathcal{C}_{\kappa,\lambda}$ となっていたと仮定してみる．このときには $\kappa < \lambda$ である．$f\colon \lambda \to L_\lambda$ を $\kappa+1$ 上では恒等写像となっているような全単射とする．このとき，

$$C = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \mid x \cap \kappa \in \kappa \ \wedge \ \kappa \in x \ \wedge \ f``x \prec L_\lambda\}$$

が閉非有界になっていることは容易に示せる．仮定により，$\mathcal{P}_\kappa\lambda - S$ は定常であるから，$y \in C$ で $|y \cap \kappa| < |y|$ となるものが存在する．L_α を $f``y$ の推移的崩壊として j を崩壊の写像の逆写像とする．したがって，$j\colon L_\alpha \prec L_\lambda$ となっている．$\delta = y \cap \kappa$ とおくと，f は $\kappa+1$ で恒等写像で $\kappa \in y$ だから，$j(\delta) = \kappa$ となり，$\mathrm{crit}(j) = \delta$ が分かる．ところが，$\delta < |y| = |\alpha|$ だから，21.1 により $0^\#$ が存在することが帰結できる． ⊣

したがって，メナスの仮説で $\lambda^{<\kappa}$ を λ で置き換えたものの否定のためには，$0^\#$ の存在が必要となる！つぎの事実をついでに述べておくが，これにより，γ-超コンパクト性の内部モデル理論はすぐに思いつくようなやり方では構築することはできないことが分かる：

25.8 演習　$\kappa < \lambda$ で U を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の正規超フィルターとする．このとき：

(a) $\mathcal{P}_\kappa\lambda \cap L \notin U$.

(b) $L[U] = L$.

ヒント　(a) の証明には，$\mathcal{P}_\kappa\lambda \cap L \in U$ だったと仮定して，25.5(c) の証明により $\mathcal{P}_\kappa\lambda - S \in U$ となることに注意して，25.7 の証明でのような y を $y \in L$ となるようにとり，これから矛盾を導けばよい．(b) は (a) から導くことができる． ⊣

$\mathcal{P}_\kappa\lambda \cap L \in U$ からの矛盾は，$\mathcal{P}_\kappa\lambda \cap L$ の元の $0^\#$ のスコーレム項による生成を考え，正規性を用いて構成要素を安定化することによっても得られる．

ギティックは 1982 年に超コンパクト性からメナスの仮説が強い意味で成り立たないことがあり得る，ということを示したが，このことを帰結する驚くべき結果により，この分野での洗練の度合は著しく高められることになった．

25.9 定理 (Gitik [85]). κ を超コンパクトとして，$\lambda > \kappa$ とする．このとき，κ より等しいか大きい基数をすべて保存する p.o. P で，$\Vdash_P \ulcorner \kappa$ は到達不可能 $\wedge\ \exists S(S$ は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ で定常 $\wedge$ S は κ^+ 個の定常集合に分割できない$)\urcorner$ となるようなものが存在する．

ギティックは，任意の $\lambda \geq \kappa$ に対し，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の定常集合はすべて互いに素な κ 個の定常集合に分割できる，ということを，ソロヴェイの 16.9 での証明の変形により示して，その意味で上の結果は最良のものとなっていることを指摘している．また彼はウディンの構成法を用いることにより，κ を最小の到達不可能基数にすることも可能であることに注意している．$\mathcal{P}_\kappa\kappa^+$ の定常部分集合で κ^+ 個の互いに素な定常集合に分割できないものが存在する，ということの無矛盾性の強さが正確に何になるかはまだ分かっていない；ギティックは，一つの上限として，κ^{+++}-超コンパクトとなるような κ の存在を与えている．

25.5 の焦点となっている集合 S はギティックの証明でも現れている．さらに，Baldwin [83] では，内部モデルへの応用のためにマーロの階層を拡張する過程で S に至っている；Jech [86] での結果も S に基づくもので，Matsubara [88a] では閉非有界フィルターのいくつかの変種の違いを示すために S が用いられている．$S \notin \mathcal{C}_{\kappa,\lambda}$ となる可能性について考察してみよう：

ある λ に対し，$\{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \mid |x \cap \kappa| < |x|\}$ は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ で定常となる．

この命題の無矛盾性の強さは巨大基数の線型な階層で厳密に決定されたが，これは，問題が巨大基数によって解決することの良い例となっている．25.5(c) と 25.7 により，この無矛盾性の強さは $0^\#$ の存在と，κ^+-超コンパクトな κ の存在の間にある．ボルドウィン Baldwin [84] は，λ が弱到達不可能な $\kappa < \lambda$ に対してラムズィーより弱い分割の性質を満たせば十分であることを示して，この評価を下限の方向に局所化している．この後 Donder-Koepke-Levinski [88] はここでちょうど必要になる分割の性質を決定して，さらに，最新の内部モデルの理論を活用して，それが必要であることも示している．しかし，Levinski [84: 229] ですでに明らかにされたように，$\kappa \geq \omega_3$ で，この命題に，$\lambda = \kappa^+$ という要請を付け加えたものからは，$0^\dagger$ の存在が導きだされる．これの無矛盾性の強さがちょうど何になるかはまだ知られていない．

メナスの $\lambda^{<\kappa}$ 個の集合への分割というもともとの仮説は，$\kappa = \omega_1$ として ZFC で否定されている：

25.10 定理 (Baumgartner-Taylor [82]). GCH を仮定して，$\nu = \lambda^{\aleph_0}$ とする．このとき，任意の ω_1-c.c. p.o. P に対し，$\Vdash_P \exists S(S$ は $\mathcal{P}_{\omega_1}\lambda$ で定常 $\wedge$ S は ν^{++} 個の互いに素な定常集合に分割することはできない$)$ となることが示せる．特に，Con(ZFC) なら，Con(ZFC $+ 2^{\aleph_0}$ は大きい $+ \exists S(S$ は $\mathcal{P}_{\omega_1}\omega_2$ で定常 $\wedge$ S は ν^{++} 個の互いに素な定常集合に分割することはできない$))$ が成り立つ．

他方，松原 Yo Matsubara は次のような場合での系としてメナス仮説の肯定的な解を確立している：

25.11 命題　(Matsubara [90]). $\kappa^{<\kappa} < \lambda^{<\kappa} = 2^\lambda$ とする．このとき，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の定常部分集合は常に，$\lambda^{<\kappa}$ 個の互いに素な定常集合に分割できる．

証明　まず Y が $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ で非有界なら，$\mathcal{P}_\kappa\lambda \subseteq \bigcup_{y\in Y}\mathcal{P}(y)$ となり，したがって，$\lambda^{<\kappa} \leq \kappa^{<\kappa}\cdot|Y|$ となるから，$\kappa^{<\kappa} < \lambda^{<\kappa}$ により $|Y| = 2^\lambda$ が帰結できることに注意する．次に，$\lambda^{<\kappa} = 2^\lambda$ だから，$\langle f_\alpha \mid \alpha < 2^\lambda\rangle$ を関数: $[\lambda]^2 \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ の全体の枚挙で，どの関数も共終回現れるようなものとする．25.3 により，各，$C(f_\alpha)$ は閉非有界で，任意の $Z \in \mathcal{C}_{\kappa,\lambda}$ と $\xi < 2^\lambda$ に対し，α で $\xi < \alpha < 2^\lambda$ かつ $C(f_\alpha) \subseteq Z$ となるようなものが存在する．

ここで，X を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ で定常とする．各 $\alpha < 2^\lambda$ に対し，X の互いに異なる元からなる列 $\langle \eta^\alpha_\xi \mid \xi < \alpha\rangle$ を，α に関する帰納により，次のように選ぶ：このような列の要素がすべての $\beta < \alpha$ に対してすでに選ばれているとして，まず $X \cap C(f_\alpha)$ は定常だから，非有界で，したがって，上と同様にして，濃度が 2^λ であることが分かることに注意する．$\langle \eta^\alpha_\xi \mid \xi < \alpha\rangle$ を $(X \cap C(f_\alpha)) - \{\eta^\beta_\xi \mid \beta < \alpha \wedge \xi < \beta\}$ の互いに異なる元とする．

$\xi < 2^\lambda$ に対し，$X_\xi = \{\eta^\alpha_\xi \mid \xi < \alpha < 2^\lambda\}$ とおく．このとき，$\{X_\xi \mid \xi < 2^\lambda\}$ は X の互いに素な部分集合の族となる．各 X_ξ が定常であることを示せば証明が完了する：C が閉非有界なら，前に注意したように，α で $\xi < \alpha < 2^\lambda$ かつ $C(f_\alpha) \subseteq C$ となるものがある．ところが，このとき $\eta^\alpha_\xi \in X_\xi \cap C(f_\alpha) \subseteq X_\xi \cap C$ となる．　⊣

25.12 系　GCH を仮定して，$\kappa \leq \lambda$ とする．このとき：

(a) もし $0^\#$ が存在しないなら，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の任意の定常部分集合は $\lambda^{<\kappa}$ 個の互いに素な定常集合に分割される．

(b) $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ は $\lambda^{<\kappa}$ 個の互いに素な定常集合に分割される．

証明　$\lambda^{<\kappa} = \lambda$ なら，結果は 25.6(a) と 25.7 から帰結でき，$\lambda^{<\kappa} > \lambda$ なら 25.11 から帰結できる．　⊣

$2^{<\kappa} < \lambda$ なら，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ は，$\lambda^{<\kappa}$ 個の定常集合に分割できることを示して Matsubara [88] の結果の改良となっている Donder-Matet [93] での組合せ論的原理に関する仕事から (b) を帰結することもできる．両方の論文とも上のような仮定が何か必要であることを示す結果を含んでいる．

Jech [73] から発生した一つの主要な研究方向は $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ の分割の性質の研究であった．$|\gamma| > \kappa$ なら，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ は $x_1 \subset y_1$, $x_2 \not\subset y_2$ となる要素を含んでいることに注意する．したがって，$n \in \omega$ に対し，

$$[\mathcal{P}_\kappa\gamma]^n_\subset = \{\{x_1,\ldots,x_n\} \mid x_1 \subset \ldots \subset x_n \in \mathcal{P}_\kappa\gamma\}$$

の分割を考えることが自然なことになる．このような集合上の関数 f に対し，$f(x_1,\ldots,x_n)$ と書いて，$x_1 \subset \ldots \subset x_n$ となっていると仮定のもとで，$f(\{x_1,\ldots,x_n\})$ を表すことにする．このような f に対し，

$H \subseteq \mathcal{P}_\kappa\gamma$ は f に関し一様 $\Leftrightarrow$ i が存在して $x \subset y$ が両方とも H の元なら常に $f(x,y) = i$ となる.

次は，イェヒの命題で（$n = 2$ の場合で）用いられていたものの一般化となっている.

$\mathrm{Part}(\kappa,\gamma)^n$ $\Leftrightarrow$ 任意の f: $[\mathcal{P}_\kappa\gamma]^n_\subset \to 2$ に対し，非有界な $H \subseteq \mathcal{P}_\kappa\gamma$ で f に関し一様なものが存在する.

$\mathrm{Part}^*(\kappa,\gamma)^n$ $\Leftrightarrow$ 任意の f: $[\mathcal{P}_\kappa\gamma]^n_\subset \to 2$ に対し，定常な $H \subseteq \mathcal{P}_\kappa\gamma$ で f に関し一様なものが存在する.

イェヒは $\mathrm{Part}(\kappa,\gamma)^2$ なら，κ は弱コンパクトとなることを指摘して，いくつかの問題を提起している.

この方向に関する初期の仕事は，ソロヴェイとメナスによる，ローボトムの $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の 7.17 を正規超フィルターへ一般化することの試みで，これは 1971 年ごろに行われている. U をこのような超フィルターとするとき，

U は分割の性質を持つ $\Leftrightarrow$ すべての f: $[\mathcal{P}_\kappa\gamma]^2_\subset \to 2$ に対し，f に関し一様な U の元が存在する

とする. 25.4 により，この性質から，$\mathrm{Part}^*(\kappa,\gamma)^2$ が導かれる. $\gamma = \kappa$ の場合が 7.17 と 22.5(b) で処理できることを除くと，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターがすべて分割の性質を持つかどうかは，すぐにはわからなかった. メナスは次のような簡明な特徴付けを見いだしている：

25.13 定理 (Menas [76]). $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルター U に対し，U が分割の性質を持つのは，$A \in U$ で，$x \subset y$ が両方とも A の元なら，$|x| < |y \cap \kappa|$ となるようなものが存在する，ちょうどそのときである.

証明 順方向の証明には，f: $[\mathcal{P}_\kappa\gamma]^2_\subset \to 2$ を $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x| < |y \cap \kappa|$ で定義する. $H \in U$ を f に関し一様とすると，$x_0, y_0 \in H$ で $|x_0| < |y_0 \cap \kappa|$ となるものは存在するから，得たい結果が得られる.

逆方向は，ローボトムの 7.17 での議論を用いることで確立できる：A を仮定でのようなものとして，f: $[\mathcal{P}_\kappa\gamma]^2_\subset \to 2$ とする. 各 $x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma$ に対し，f_x: $\{y \in \mathcal{P}_\kappa\gamma \mid x \subset y\} \to 2$ を $f_x(y) = f(x,y)$ で定義する. このとき，各 $x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma$ に対し，$H_x \in U$ と $i_x < 2$ で，$f_x``H_x = \{i_x\}$ となるものが存在する. したがって，$B \subseteq A$ となる $B \in U$ と，$i < 2$ で，すべての $x \in B$ に対し $i_x = i$ となるようなものが存在する. $H = \{x \in B \mid x \in \bigcap\{H_y \mid y \subset x \wedge y \in B\}\}$ とおく. このとき $y \subset x$ が両方とも H の元なら，$f(x,y) = i$ となる. したがって，$H \in U$ が示せればよい：

そうでないとすると，$B - H \in U$ となる. このとき，この集合に属す任意の x に対し，$h(x) \in B$ で，$h(x) \subset x$ かつ $x \notin H_{h(x)}$ となるようなものが存在する. j: $V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V,U)$ とする. このとき，$[h]_U \subset j``\lambda$ となり，$B \subseteq A$ により，$x \in B - H$ に対し常に $|h(x)| < |x \cap \kappa|$ となるから，22.11(a) により $|[h]_U| < \kappa$ が成り立つ. したがって，κ-

完備性を用いると，$s \in \mathcal{P}_\kappa\gamma$ で $[h]_U = j(s)$ となるものが存在することが容易に分かる．ところが，$h(x) = s$ となるような任意の $x \in B - H$ に対し，$x \notin H_s$ とるから，これは $H_s \in U$ に矛盾である．　$\dashv$

7.17 でと同じように帰納的に議論することで，上の論法から U が分割の性質を持つのは，任意の $n \geq 2$ に対し，$f\colon [\mathcal{P}_\kappa\gamma]^n_\subset \to 2$ なら，常に U の元で f に関して一様となるものが存在する，ちょうどそのときとなることが分かる．

さらに，メナスは分割の性質を帰結できる便利な性質を見いだしている．$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルター U に対し，

$$\chi(U) \quad \Leftrightarrow \quad \text{ある } f \in {}^\kappa\kappa \text{ に対し，} \{x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma \mid f(|x \cap \kappa|) = |x|\} \in U \text{ となる}$$

とする．$j_U\colon V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V, U)$, として 22.11(a) を考慮すると，$\chi(U)$ は，ある $f \in {}^\kappa\kappa$ に対し，$j_U(f)(\kappa) = |\gamma|$ となる，という主張であることが分かる．$\chi(U)$ から U が分割の性質を持つことが帰結されることは，23.12 のクーネンによる証明から抽出される，次の補題を用いて示すことができる：

25.14 補題　(Solovay [74: 371]). $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルター U に対し，$E \in U$ で $x \subset y$ が両方とも E の元なら常に $|x| < |y|$ となるようなものが存在する．

証明　f を γ に対する ω-ジョンソン関数として，

$$E = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma \mid f|[x]^\omega \text{ は } x \text{ に対する } \omega\text{-ジョンソン}\}$$

とする．このとき，$x \subseteq y$ で $|x| = |y|$ なら，$x = f``[x]^\omega = y$ となる．したがって，$E \in U$ を示せば十分である：

$j\colon V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V, U)$ とする．このとき ${}^\gamma M \subseteq M$ だから，V と M の区別をしなくてもいいことに注意すると，ウォッシュの定理により，$j(f)|[j``\gamma]^\omega$ が $j``\gamma$ に対し，ω-ジョンソン関数となることを示せばよいことが分かる．(クーネンの 23.12 のもとの証明と同じに）$j(f)``[j``\gamma]^\omega \subseteq j``\gamma$ が成り立っていることは示せる．$y \subseteq j``\gamma$ で $|y| = |j``\gamma| = |\gamma|$ とする．$z = j^{-1}(y)$ とすれば，$f$ は $\gamma$ に対する $\omega$-ジョンソン関数だから，$f``[z]^\omega = \gamma$ となっている．したがって，任意の $\alpha < \gamma$ に対し，$s \in [z]^\omega$ で，$\alpha = f(s)$ となるものが存在する．よって，$j(\alpha) = j(f(s)) = j(f)(j(s))$ となり，一方，$j(s) \in [y]^\omega$ となっていから，$j(\alpha) \in j(f)``[y]^\omega$ となる．したがって，$j(f)``[y]^\omega = j``\gamma$ が成り立つ．　$\dashv$

25.15 命題　(Menas [76]). U を $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターとして，$\chi(U)$ なら，U は分割の性質を持つ．

証明　$f \in {}^\kappa\kappa$ を $X = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma \mid f(|x \cap \kappa|) = |x|\} \in U$ となるようなものとする．$j\colon V \prec M \cong \mathrm{Ult}(V, U)$ として，$\mathrm{crit}(j) = \kappa$ だから，$j(f)``\kappa = f``\kappa \subseteq \kappa$ となることは明らかである．したがって，22.11(a) により，$Y = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma \mid f``|x \cap \kappa| \subseteq |x \cap \kappa|\} \in U$ となる．最後に，25.14 により，$E \in U$ を $x \subset y$ が両方とも E の元なら，常に $|x| < |y|$ が成り立つようなものとする．ここで，$x \subset y$ が両方とも $X \cap Y \cap E \in U$ の元なら，$|x| < |y|$ となるから，X の定義から，$|x \cap \kappa| < |y \cap \kappa|$ となり，さらに Y の定義から

$f(|x\cap\kappa|)=|x|<|y\cap\kappa|$ となる．したがって，25.13 により，U は分割の性質を持つことが分かる． $\dashv$

このことから，$\gamma=\kappa^+$ あるいは $\gamma=2^\kappa$ など γ が κ から簡単に定義できる場合には，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターはすべて分割の性質を持つことが分かる．ソロヴェイによる GCH のもとでの分割の性質に関する最初の最初の指摘も，この方向のものであった．例えば，$\gamma=\kappa^+$ なら，$f(\alpha)=\alpha^+$ で与えられる関数 $f\in{}^\kappa\kappa$ により $\chi(U)$ が $\mathcal{P}_\kappa\kappa^+$ 上の任意の正規超フィルターに対して成り立つことが分かる．ペレティエ Donald Pelletier（Kunen-Pelletier [83] を参照）は後に $\chi(U)$ が U の分割の性質より真に強いことを示している．

メナスは性質 χ を用いて，κ が超コンパクトなら，任意の $\gamma\geq\kappa$ に対し $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターが存在し，しかもそのような超フィルターの数は可能なうち最大のものとなっていることを示している．証明は 22.14 と同様でこれにソロヴェイの 22.13 をひとひねりして加えたものとなっている：

25.16 演習 (Menas [76]). κ を $2^{|\gamma|^{<\kappa}}$-超コンパクトとすとき，任意の $A\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\gamma))$ に対し，$\chi(W)$ を満たす $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルター W で，$A\in M_W$ となるものが存在する．したがって，分割の性質を持つ $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターが $2^{2^{|\gamma|^{<\kappa}}}$ 個存在する．

ヒント ある $\gamma\geq\kappa$ に対し，これが成り立たないと仮定して，γ_0 をそのようなもので最小とする．22.13 の証明をなぞって，U を $\mathcal{P}_\kappa(2^{|\gamma_0|^{<\kappa}})$ 上の正規超フィルターとして，$j\colon V\prec M\cong\mathrm{Ult}(V,U)$ を対応する初等的埋め込みとし，$\overline{\varphi}(v_0,v_1,v_2)$ を，$\overline{\varphi}[A,\kappa,\gamma]\Leftrightarrow$「$A\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\gamma))$ で，$\chi(W)$ となる $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の任意の正規超フィルター W に対し $A\notin M_W$ となる」，とする．このとき前と同じように，$j_0\colon V\prec M_0\cong\mathrm{Ult}(V,U|\gamma_0)$ なら，γ_0 の選び方から $M_0\models$「γ_0 は $\exists v_0\overline{\varphi}[\kappa,\gamma_0]$ となる最小の順序数となる」, が成り立つ．$\chi(U|\gamma_0)$ であることを示せば，これから矛盾が得られる．ところが，β を $\exists v_0\overline{\varphi}[\alpha,\beta]$ となるようなものが存在すれば，そのうち最小なもの，そうでなければ $=0$ として，$f(\alpha)=|\beta|$ により $f\in{}^\kappa\kappa$ を定義すれば，$j_{U|\gamma_0}(f)(\kappa)=|\gamma_0|$ となる． $\dashv$

分割の性質は常に成り立つとは限らないことをソロヴェイが示したことが，この性質に対する関心を高めることになった：

25.17 命題 (Solovay – Menas [76]). $\kappa<\lambda\leq\delta$ で κ と λ は両方とも δ-超コンパクトとする．このとき，$\mathcal{P}_\kappa\delta$ 上の正規超フィルターで分割の性質を持たないものがある．

証明 D を $\mathcal{P}_\kappa\delta$ 上の正規超フィルターとして，$x\supseteq\kappa$ となる各 $x\in\mathcal{P}_\lambda\delta$ に対し，

$$D|x=\{\{s\cap x\mid s\in Z\}\mid Z\in D\}$$

とおく．このとき $D|x$ は $\mathcal{P}_\kappa x$ 上の正規超フィルターとなる（22.12 の後を参照）．ここで，U を $\mathcal{P}_\lambda\delta$ 上の正規超フィルターの一つとして，W を

$$X\in W\quad\Leftrightarrow\quad X\subseteq\mathcal{P}_\kappa\delta\ \wedge\ \{x\in\mathcal{P}_\lambda\delta\mid x\supseteq\kappa\ \wedge\ X\cap\mathcal{P}_\kappa x\in D|x\}\in U$$

で定義する．このとき W は $\mathcal{P}_\kappa\delta$ 上の正規超フィルターとなり（22.9のヒントを参照），これは，D の近似を U を用いて貼り合わせたものとなっている．D は分割の性質を持っているかもしれないが，W はこの性質を持たないものとなっている：

これを示すには，25.13により，任意の $X \in W$ をとるとき，両方とも X の元となっている $x \subset y$ で $|x| \geq |y \cap \kappa|$ となるものが見つかればよい．このような X に対し，

$$Y = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\delta \mid x \supseteq \kappa \ \wedge \ X \cap \mathcal{P}_\kappa x \in D|x\}$$

とおき，各 $x \in Y$ に対し，

$$Z_x = \{s \in \mathcal{P}_\kappa\delta \mid s \cap x \in X\}$$

とする．このとき W の定義から，$Y \in U$ となり，すべての $x \in Y$ に対し，$Z_x \in D$ となる．ここで，$\overline{x} \subset \overline{y}$ を両方とも Y の元として，非有界性から，$s \in Z_{\overline{x}} \cap Z_{\overline{y}}$ を $s \cap (\overline{y} - \overline{x}) \neq \emptyset$ となるようにする．$x = \overline{x} \cap s$, $y = \overline{y} \cap s$ とおけば，$x \subset y$ は両方とも X の元となるが，$\overline{x} \cap \overline{y} \supseteq \kappa$ だから，

$$|x| = |\overline{x} \cap s| \geq |\kappa \cap s| = |\overline{y} \cap \kappa \cap s| = |y \cap \kappa|$$

である．　$\dashv$

$\delta = \lambda$ ととり，$\kappa < \lambda$ で，κ は λ-超コンパクト，λ は可測なら，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の正規超フィルターで分割の性質を持たないものがある．ソロヴェイがこの結果を得た直後，クーネンは，$\kappa < \lambda$ で，κ は λ-超コンパクト，λ は ineffable（$V = L$ と共存できる性質で，これについては第II巻で考察する）なら $\gamma < \lambda$ と $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターで分割の性質を持たないものが存在することを示して，この結果をさらに改良している（Kunen-Pelletier [83] を参照）．また κ が超コンパクトで，$\gamma > \kappa$ で，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上分割の性質を持たない正規超フィルターが存在するなら，γ は Π^2_1-記述不可能であることも，クーネンは示している．したがって，そのような γ が存在しないことは無矛盾である．

分割の性質に関するその他の結果は Menas [76], Di Prisco [77], Pelletier [81], Kunen-Pelletier [83], Barbanel [86, 92, 93, 93a] で得られている．

もっと一般的な命題である $\mathrm{Part}(\kappa,\gamma)^n$ や $\mathrm{Part}^*(\kappa,\gamma)^n$ に目を移すことにすると，メナスの25.16により，κ が $2^{|\gamma|^{<\kappa}}$-超コンパクトなら，$\mathrm{Part}^*(\kappa,\gamma)^2$ が成り立つ（実際，25.13の後のコメントにより，$\mathrm{Part}^*(\kappa,\gamma)^n$ がすべての $n \in \omega$ に対し成り立つ）．これを一方向に引用して，マギドアは，次のような超コンパクト性の組合せ論的特徴付けを与えている：

25.18 定理　(Magidor [74])．κ が超コンパクトとなるのは，$\mathrm{Part}^*(\kappa,\gamma)^2$ がすべての $\gamma \geq \kappa$ に対し成り立つ，ちょうどそのときである．

マギドアは，この特徴付けを与える過程で Jech [73] で定式化された λ-ineffability という概念を用いた超コンパクト性の特徴付けも与えている．ディ・プリスコとツヴィッカーは Di Prisco-Zwicker[80] でこの結果を改良して，強コンパクト性の同様な特徴付けを与えている．同じような手法により，バウムガルトナー，カー Carr [87], ディ・プリスコは独立に，$\mathrm{Part}(\kappa,\gamma)^3$ **がすべての** $\gamma \geq \kappa$ **に対し成り立つなら，**κ **は強コンパクトとなることを**

示している．これの逆が成り立つか，あるいは，3が2に改良できるか，は未解決である：

25.19 未解決問題 κ が強コンパクトのとき，$\mathrm{Part}(\kappa,\gamma)^3$ がすべての $\gamma \geq \kappa$ に対し成り立つか？

25.20 未解決問題 $\mathrm{Part}(\kappa,\gamma)^2$ がすべての $\gamma \geq \kappa$ に対し成り立つとき，κ は強コンパクトとなるか？

$\mathrm{Part}(\kappa,\gamma)^2$ は κ が弱コンパクトであることを特徴付ける $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2$ を一般化するものとなっている．カー Carr [85] は他の特徴付けの一般化を考察して，Carr[86, 87, 87a] では，それらの一般化を細かく調べている（Johnson [88, 88a] も参照されたい）．

最近の仕事では，$\langle \mathcal{P}_\kappa\gamma, \subset\rangle$ の $\langle \kappa, <\rangle$ との類推による扱いがうまくゆかないこを示す方向のものが見られる．ツヴィッカー Zwicker [84] は $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ **の定常コーディング集合**を，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で定常な集合 A に $x \subset y$ が両方とも A の元なら $c(x) \in y$ となるような単射 $c\colon A \to \gamma$ をあわせたものとして定義している．彼は，$\langle \mathcal{P}_\kappa\gamma, \subset\rangle$ の研究をこのような A に制限することで，$\langle \kappa, <\rangle$ との類似性をより強く示す結果を得ている．この後，シェラハ Shelah [86: §§7, 9] は，例えば，$\kappa > \omega_2$ が非極限基数で，$\lambda = \kappa^+$ である場合など，様々な状況における定常コーディング集合の存在を確立している．Zwicker [86] もこれに関連する結果を含んでおり，Zwicker [89] では，定常コーディング集合を用いて，Baumgartner-Taylor-Wagon [82] での κ 上のイデアルの広範囲な研究の精神に則った，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアルの構造的な性質の研究を始めている．

Carr-Pelletier [89] もそのような研究を始めているが，ここでは同様なことが $\langle \mathcal{P}_\kappa\gamma, <\rangle$ を用いて行われている．ここに，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の関係 $<$ は，

$$x < y \quad\Leftrightarrow\quad x \subset y \ \wedge\ |x| < |y \cap \kappa|$$

により定義される．この新しい順序 $<$ は 25.13 がすでに示唆しているものであるが，これがはじめて組織的に用いられたのは Carr [87] においてであった．つぎの練習問題は今までに得られた様々な結果の $<$ によるバージョンを与えるものとなっている．$\langle X_a \mid a \in \mathcal{P}_\kappa\gamma\rangle \in {}^{\mathcal{P}_\kappa\gamma}\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\gamma)$ のとき，これの **$<$-対角共通部分**を $\{x \in \mathcal{P}_\kappa\gamma \mid x \in \bigcap_{a<x} X_a\}$ で定義する．$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上のフィルター F に対し，

$$F \text{ は強正規} \quad\Leftrightarrow\quad \text{任意の } \langle X_a \mid a \in \mathcal{P}_\kappa\gamma\rangle \in {}^{\mathcal{P}_\kappa\gamma}F \text{ に対し，} \\ \text{これの } < \text{-対角共通部分は } F \text{ の元となる}$$

とする．$X \subseteq \mathcal{P}_\kappa\gamma$ に対し，関数 $f\colon X \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ が X 上 **$<$-退行的** $\Leftrightarrow$ すべての $x \in X$ に対し，$f(x) < x$ となる，とする．$n \in \omega$ に対し，

$$[\mathcal{P}_\kappa\gamma]^n_< = \{\{x_1, \ldots, x_n\} \mid x_1 < \cdots < x_n \text{ はすべて } \mathcal{P}_\kappa\gamma \text{ の元}\}$$

とおく．この集合上の関数に対し，部分集合が一様であるということを $[\mathcal{P}_\kappa\gamma]^n_\subset$ での文脈で予想されるような意味に定義する．

25.21 演習 (Carr-Pelletier [89]).

(a) $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の強正規なフィルターは正規である.

(b) $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の良好フィルター F が強正規となるのは，X が F-定常で，f が X 上 $<$-退行的なら，F-定常な $Y \subseteq X$ で f が Y 上定値関数となるようなものが常に存在する，ちょうどそのときである.

(c) $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターは強正規である.

(d) U が $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターで，ある $n \in \omega$ に対し，f: $[\mathcal{P}_\kappa\gamma]^n_< \to 2$ なら U の元で f に対し一様となるものが存在する.

ヒント　(c) と (d) については 25.13 での議論を思い出してみる.　$\dashv$

このように，$[\mathcal{P}_\kappa\gamma]^2_<$ での分割の性質は，$[\mathcal{P}_\kappa\gamma]^2_\subset$ のときとは違い，すべての正規超フィルターに対し成り立つ．他方，$<$ によるアプローチは一般性が高くない．Carr-Levinski-Pelletier [90] で示されたように，ある（したがってすべての）$\gamma \geq \kappa$ に対し，$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の強正規フィルターが存在する　$\Leftrightarrow$　κ はマーロ基数であるかまたは $\kappa = \nu^+$ で $\nu^{<\nu} = \nu$ となる，ことが知られているからである.

$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ の研究はまだやるべきことがたくさん残っており，構造的な解析にむけての定常コーディング集合によるアプローチによっても $<$ 順序によるアプローチによっても，まだ多くの新しい結果が期待できそうである．大雑把な言い方をすると，最初のものは γ が κ に対して小さいときや，調べている性質が写像: $\mathcal{P}_\kappa\gamma \to \mathcal{P}_\kappa\gamma$ から惹き起こされる同型写像に関して普遍である場合に有効であり，二番目のアプローチは κ が大きく，γ が κ に対して大きいか，調べている性質が同型写像に関して普遍でない場合に有効であるように思われる．$\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上のイデアルに関する構造理論もまだ改良の余地がある.

§26　エクステンダー

この章では，時代を飛びこして現代の研究に一瞥を向け，初等的埋め込みの基本的な分析とこれに関連した仮説について調べることにする．これは内部モデルの研究の発展，および 1970 年代後半から始まって現在に至っている強い諸命題の無矛盾性の分析において，決定的な役割を果たすことになるものである（第 II 巻で，特に組合せ論や相対的無矛盾性との関連において系統的に行なわれている 1970 年代以降の強い諸仮説に関する研究について述べる）.

§20 で述べたように，U が κ 上の正規超フィルターなら，$L[U]$ は ZFC の内部モデルとなり，κ はそこで可測基数となる．さらに，このようなモデルは強い典型性を満たし，GCH のような極小条件の相対的無矛盾性を確立する．また，このようなモデルの構造的な一貫性は，可測性の無矛盾性を強く示唆するものとなっている．強い仮説を相対化して，同じような内部モデルの理論を作ろうとするときに，まず思いつく試みは，同様な超フィルター U を $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上にとり，$L[U]$ を考えるということであろう．可測性の場合では，ベースになっている集合 $\kappa \cap L = \kappa$ の絶対性が典型性に関する結果の証明で暗に用いられていた．ところが，$|\gamma| > \kappa$ となる $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルター U が存在するときには，$\mathcal{P}_\kappa\gamma \cap L = \mathcal{P}_\kappa\gamma$ は成り立たない．したがって，$\mathcal{P}_\kappa\gamma \cap L \notin U$ により，$L[U] = L$ となってしまう（25.8 を

参照）.

絶対性の問題は，相対化されるべき仮定を弱めるなら，異なる集合上の超フィルターの絶対的な列で，これらの集合に対し，この対応する超巾の列が順系をなすような**エクステンダー**を用いることで扱うことができるようになる．一般的な枠組でのエクステンダーはPowell [74] で扱われている．しかし，これは，ミッチェル Mitchell [79] が γ-超コンパクト性の弱い変形を内部モデルで扱う標準的手法を発見するまで，巨大基数の理論の関連で考察されることはなかった．この後，ドッド (Dodd) とイェンセン（Dodd [82] を参照) はミッチェルの記述を改良してエクステンダーの概念を導入し，この用語をここで初めて使っている．この章では，エクステンダーの基本的な理論と，これに関連したいくつかの仮説を導入する．ここでのわずかな記述だけからでも，後に確立されることになる内部モデルの理論での，これらの概念の役割の決定的な重要性を想像することができると思う．γ-超コンパクト性のときとは異なり，解析の方法の方を，それによって特徴付けされる仮説より先に記述するが，これは，この方法がここでの主要な動機づけを与えることになるからである．

内部モデルの間の初等的埋め込みは，超巾の反復でのような構成的な性格を持った超巾の順極限によって任意の精度で近似できる，というのが，ここでの基礎となる発見であった．一般的な枠組の中で議論をすすめることにして，

$$N \text{ と } M \text{ は ZFC の内部モデルで，} j\colon N \prec M \text{ とする．}$$

ここでは，j が N での（定義可能な) クラスであることも，$M \subseteq N$ となっていることも仮定していない．5.1(b) により，j は臨界点を持つ．

$$\beta > \kappa = \mathrm{crit}(j) \text{ として，} \zeta \geq \kappa \text{ は，} \beta \leq j(\zeta) \text{ となる最小の順序数とする．}$$

基本的な場合は，$\zeta = \kappa$, つまり，$\beta \leq j(\kappa)$ となる場合であるが，ここでの一般的な設定は大変に強い仮説を扱うときに必要になってくる．各 $a \in [\beta]^{<\omega}$ に対し，E_a を，

$$X \in E_a \quad \Leftrightarrow \quad X \in \mathcal{P}([\zeta]^{|a|}) \cap N \ \wedge \ a \in j(X)\,.$$

で定義する．これは，今までに何度も出てきた，埋め込みから超フィルターを生成するときのアイデアの，もう一つのバリエーションである．$X \in \mathcal{P}([\zeta]^{|a|}) \cap N$ なら，$j(X) \in \mathcal{P}([j(\zeta)]^{|a|}) \cap M$ となるから，$a \in j(X)$ かどうかを問うことは意味のあることとなっている．E_a は N の元とは限らないが，$\langle N, \in, E_a\rangle \models$「$E_a$ は κ-完備な $[\zeta]^{|a|}$ 上の超フィルターである」, となっている．厳密に言うと，$a \in [\kappa]^{<\omega}$ なら，E_a は単項フィルターとなるが，記述を簡単にするために，ここでは，前の取りきめと定義にこだわらずに，このような E_a も許すことにする．ここで，

$\mathcal{E} = \langle E_a \mid a \in [\beta]^{<\omega}\rangle$ を，j **によって惹き起こされた** (κ, β)-**エクステンダー**と呼ぶ．

$a \in [\beta]^{<\omega}$ に対し，

$$j_a\colon N \prec \mathrm{Ult}(N, E_a)$$

を通常の超巾への埋め込みとする．このとき，

$$k_a((f)^0_{E_a}) = j(f)(a)$$

で定義される $k_a\colon \mathrm{Ult}(N, E_a) \to M$ （ここに $(f)^0_{E_a} \in \mathrm{Ult}(N, E_a)$ は $f \in {}^{[\zeta]^{|a|}}N \cap N$ の同値類である）が初等的埋め込みとなり，$k_a \circ j_a = j$ が成り立つことは容易に示すことができる．特に，$\mathrm{Ult}(N, E_a)$ は整順的となり，したがって，推移的崩壊 M_a を持つ．

$$\mathrm{Ult}(N, E_a) \text{ を } M_a \text{ と同一視する．}$$

次に，$a \subseteq b$ を両方とも $[\beta]^{<\omega}$ の元とする．例えば $b = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ で，常に仮定しているように，$\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ となっているとし，$a = \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}\}$ とする．ここに，$1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n$ となっているとする．$\pi_{ba}\colon [\zeta]^n \to [\zeta]^m$ を

$$\pi_{ba}(\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}) = \{\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m}\}$$

で定義する．このとき，$i_{ab}\colon M_a \to M_b$ を，

$$i_{ab}([f]_{E_a}) = [f \circ \pi_{ba}]_{E_b}$$

で定義すると，これが初等的埋め込みになり，

$$i_{ab} \circ j_a = j_b \quad \text{かつ} \quad k_b \circ i_{ab} = k_a$$

となることは容易に確かめられる．

ここで，$\langle\langle M_a \mid a \in [\beta]^{<\omega}\rangle, \langle i_{ab} \mid a \subseteq b\rangle\rangle$ は順系とみなせるから，

$$\langle M_{\mathcal{E}}, \in_{\mathcal{E}}\rangle \text{ をその順極限とする．}$$

また，

$$j_{\mathcal{E}}\colon \langle N, \in\rangle \prec \langle M_{\mathcal{E}}, \in_{\mathcal{E}}\rangle\,,$$
$$k_{a\mathcal{E}}\colon \langle M_a, \in\rangle \prec \langle M_{\mathcal{E}}, \in_{\mathcal{E}}\rangle\,,$$
$$k_{\mathcal{E}}\colon \langle M_{\mathcal{E}}, \in_{\mathcal{E}}\rangle \prec \langle M, \in\rangle$$

を対応する埋め込みとする．したがって，$a \in [\beta]^{<\omega}$ に対し，

$$k_{\mathcal{E}} \circ j_{\mathcal{E}} = j\,,\ k_{a\mathcal{E}} \circ j_a = j_{\mathcal{E}}\,,\ k_{\mathcal{E}} \circ k_{a\mathcal{E}} = k_a$$

となる．特に $\langle M_{\mathcal{E}}, \in_{\mathcal{E}}\rangle$ は整順的となるから，

$$M_{\mathcal{E}} \text{ は推移的で，} \in_{\mathcal{E}} = \in \cap (M_{\mathcal{E}} \times M_{\mathcal{E}}) \text{ となっている}$$

と仮定できる．

初等的埋め込みのエクステンダーによる解析の決定的な特徴は次の補題のように述べることができる．このうち (a) は $M_{\mathcal{E}}$ の便利な表現を与え（19.6 を参照），(b) と (c) は，$M_{\mathcal{E}}$ が M をどれだけ良く近似しているかということの記述となっている．高々 $2^{2^{|\zeta|}}$ 個の異なる M_a があるにすぎないのだが，これらが i_{ab} によって，織りなされることで，このような極立った性質を持つようになるわけである．

26.1 補題

(a) $M_{\mathcal{E}} = \{j_{\mathcal{E}}(f)(a) \mid a \in [\beta]^{<\omega} \ \wedge \ f \in {}^{[\zeta]^{|a|}}N \cap N\}$.

(b) $|V_\gamma|^M \leq \beta$ となる γ に対し，$V_\gamma^M \subseteq \mathrm{ran}(k_{\mathcal{E}})$, $V_\gamma^{M_{\mathcal{E}}} = V_\gamma^M$, となり，$x \in V_\gamma^{M_{\mathcal{E}}}$ なら $k_{\mathcal{E}}(x) = x$ となる．

(c) $\mathrm{crit}(k_{\mathcal{E}}) \geq \beta$ となり，したがって，$\mathrm{crit}(j_{\mathcal{E}}) = \kappa$ で，$\beta \leq j_{\mathcal{E}}(\zeta)$ となる．$\beta = j(\zeta)$ なら，$\mathrm{crit}(k_{\mathcal{E}}) > \beta$ となり，したがって $\beta = j_{\mathcal{E}}(\zeta)$ である．

証明

(a) $x \in M_{\mathcal{E}}$ なら，$a \in [\beta]^{<\omega}$ と $f \in {}^{[\zeta]^{|a|}}N \cap N$ で，$x = k_{a\mathcal{E}}([f]_{E_a})$ となるものがある．したがって，

$$k_{\mathcal{E}}(x) = k_{\mathcal{E}}(k_{a\mathcal{E}}([f]_{E_a})) = k_a([f]_{E_a}) = j(f)(a)$$

である．よって，

$$\mathrm{ran}(k_{\mathcal{E}}) = \{j(f)(a) \mid a \in [\beta]^{<\omega} \ \wedge \ f \in {}^{[\zeta]^{|a|}}N \cap N\}$$

となる．ここで，$k_{\mathcal{E}} \circ j_{\mathcal{E}} = j$ により，求めている結果が得られる．

(b) $g \in {}^{[\zeta]^1}N \cap N$ を，$|V_\alpha|^N \leq \zeta$ なら，ある $\delta \leq \zeta$ に対し，$g|[\zeta]^1$ は $[\zeta]^1$ と V_α^N の間の全単射となるようにとる．このとき，$|V_\gamma|^M \leq \beta$ となる任意の γ と，$x \in V_\gamma^M$ に対し，$\xi < \beta$ で，$j(g)(\{\xi\}) = x$ となるものがある．上の $\mathrm{ran}(k_{\mathcal{E}})$ の特徴付けから，$V_\gamma^M \subseteq \mathrm{ran}(k_{\mathcal{E}})$ となり，残りは $k_{\mathcal{E}}$ が $\mathrm{ran}(k_{\mathcal{E}})$ から $M_{\mathcal{E}}$ への崩壊の同型写像であることから導ける．

(c) $\beta \subseteq \mathrm{ran}(k_{\mathcal{E}})$ であることは明らかであるら，$\beta = j(\zeta) = k_{\mathcal{E}}(j_{\mathcal{E}}(\zeta))$ なら，実際にはさらに $\beta + 1 \subseteq \mathrm{ran}(k_{\mathcal{E}})$ となることに注意すると，この命題も同様にして示せる． ⊣

エクステンダーを，それを与える初等的埋め込みから出発して記述したが，今度はこれの持つ本質的な性質を抽出し，これを定義として与える．N を ZFC の内部モデルとして，κ を N での基数とし，$\beta > \kappa$ で，$\mathcal{E} = \langle E_a \mid a \in [\beta]^{<\omega} \rangle$ とする．このとき，$\mathcal{E}$ が，ある $\zeta \geq \kappa$ に対し次を満たすとき，これを **N-(κ, β)-エクステンダー**（あるいは，$N = V$ のときには単に **(κ, β)-エクステンダー**）と呼ぶ：

(i)　各 $a \in [\beta]^{<\omega}$ に対し，$\langle N, \in, E_a \rangle \models$「$E_a$ は $[\zeta]^{|a|}$ 上 κ-完備な超フィルター」で，

(1)　少なくとも一つの $a \in [\beta]^{<\omega}$ で，$\langle N, \in, E_a \rangle \models$「$E_a$ は κ^+-完備でない」

(2)　各 $\xi \in \zeta$ に対し，$a \in [\beta]^{<\omega}$ で $\{s \in [\zeta]^{|a|} \mid \xi \in s\} \in E_a$ となるものがある．

(ii)　（一貫性）$a \subseteq b$ をそれぞれ $[\beta]^{<\omega}$ の元として，$\pi_{ba}\colon [\zeta]^{|b|} \to [\zeta]^{|a|}$ を前と同じように定義する．つまり，$b = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ で $a = \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}\}$ のとき，$\pi_{ba}(\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}) = \{\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m}\}$ とする．このとき，

$$X \in E_a \quad \Leftrightarrow \quad \{s \mid \pi_{ba}(s) \in X\} \in E_b$$

となる．

(iii)　（整順性）任意の $a_m \in [\beta]^{<\omega}$, $X_m \in E_{a_m}$, $m \in \omega$ に対し，$d\colon \bigcup_m a_m \to \zeta$ で，$d``a_m \in X_m$ がすべての m に対し成り立つようなものが存在する．

(iv)　（正規性）$a \in [\beta]^{<\omega}$, $f \in {}^{[\zeta]^{|a|}}N \cap N$ で，$\{s \in [\zeta]^{|a|} \mid f(s) \in \max(s)\} \in E_a$ のとき，$a \subseteq b$ となる $b \in [\beta]^{<\omega}$ で，π_{ba} を (ii) でのようにとると，

$$\{s \in [\zeta]^{|b|} \mid f(\pi_{ba}(s)) \in s\} \in E_b$$

となるものが存在する．

ここでも $\zeta = \kappa$ が基本的な場合であり，一般的な文脈としては，非常に強い仮説の研究が念頭におかれている．(i) では E_a **は単項であることも許す**．(i)(1) は κ の役割を確立しており，後で明らかになるように，(i)(2) が ζ を特定している．**任意の** $\alpha < \beta$ **に対し，**$[\alpha]^{<\omega}$ **の元** a **たちが (i)(1) と (i)(2) を満たすなら，**$\mathcal{E}|[\alpha]^{<\omega}$ **も** N**-**(κ, α)**-エクステンダーとなることは容易に確かめられる．**

今度はこれらの条件を用いて前と同じように $M_{\mathcal{E}}$ と $j_{\mathcal{E}}\colon N \prec M_{\mathcal{E}}$ を構成する；以下では π_{ba} は常に (ii) でのようなものとする．まず，各 $a \in [\beta]^{<\omega}$ に対し，(i) により超フィルター $\mathrm{Ult}(N, E_a)$ を構成することができる．(iii) を各 $a_m = a$ に適用すると，E_a は可算完備となる（これは 19.11 の前で定義されたような意味での可算完備性である．つまり，任意の $\{X_n \mid n \in \omega\} \subseteq E_a$ に対し，$\bigcap_n X_n \neq \emptyset$ となる）ことが分かる．したがって，$\mathrm{Ult}(N, E_a)$ は整順的となり，（5.3 の後で述べたような）推移的崩壊 M_a が存在する．

$$j_a\colon N \prec M_a \cong \mathrm{Ult}(N, E_a)$$

とする．

次に，$a \subseteq b$ が両方とも $[\beta]^{<\omega}$ の元のとき，(ii) により，$i_{ab}\colon M_a \prec M_b$ を前と同じように，

$$i_{ab}([f]_{E_a}) = [f \circ \pi_{ba}]_{E_b}$$

で定義することができる．したがって，

$$i_{ab} \circ j_a = j_b$$

である．前と同じように，$\langle \langle M_a \mid a \in [\beta]^{<\omega} \rangle, \langle i_{ab} \mid a \subseteq b \rangle \rangle$ は順系となるから，$\langle M_{\mathcal{E}}, \in_{\mathcal{E}} \rangle$

をこの順極限として，

$$j_{\mathcal{E}}\colon \langle N, \in\rangle \prec \langle M_{\mathcal{E}}, \in_{\mathcal{E}}\rangle \quad \text{かつ}$$
$$k_a\colon \langle M_a, \in\rangle \prec \langle M_{\mathcal{E}}, \in_{\mathcal{E}}\rangle$$

を対応する埋め込みの族で，$a \subseteq b$ が両方とも $[\beta]^{<\omega}$ の元なら，

$$k_a \circ j_a = j_{\mathcal{E}} \ \ \text{かつ} \ \ k_b \circ i_{ab} = k_a$$

となっているようなものとする．

(iii) から $\langle M_{\mathcal{E}}, \in_{\mathcal{E}}\rangle$ の整順性が導けることは，すぐに分かる（実は，15.7(a) での論法を用いると，(iii) が整順性の特徴付けとなっていることが示せる）．さらに，19.3 と同じような論法により，$\in_{\mathcal{E}}$ が集合的であることも示せる．したがって,（0.4 により）

$$M_{\mathcal{E}} \text{ は推移的で，} \in_{\mathcal{E}} = \in \cap (M_{\mathcal{E}} \times M_{\mathcal{E}}) \text{ となっている}$$

と仮定してよい．ここでは単一の超巾がとられているわけではないのであるが，前の記法を拡大解釈して，この状況を

$$j_{\mathcal{E}}\colon N \prec M_{\mathcal{E}} \cong \mathrm{Ult}(N, \mathcal{E})$$

と表すことにする．いつものように，下付き文字は文脈から明らかなときには省略することにする．

次の補題の (a) は (iv) に基づくものとなっており，これが正規性と呼ばれるゆえんを示している．(b) は (i) の条件に基づく．$n \in \omega$ に対し，$\mathrm{id}_n\colon [\zeta]^n \to [\zeta]^n$ を恒等写像とする．$a \subseteq b$ が両方とも $[\beta]^{<\omega}$ の元なら，$i_{ab}([\mathrm{id}_{|a|}]_{E_a}) = [\pi_{ba}]_{E_b}$ となることに注意する．

26.2 補題

(a) 任意の $a \in [\beta]^{<\omega}$ に対し，$k_a([\mathrm{id}_{|a|}]_{E_a}) = a$ が成り立つ．

(b) $\mathrm{crit}(j_{\mathcal{E}}) = \kappa$ で，ζ は $\beta \leq j_{\mathcal{E}}(\zeta)$ となるような最小の順序数となっている．

(c) $M_{\mathcal{E}} = \{j_{\mathcal{E}}(f)(a) \mid a \in [\beta]^{<\omega} \ \wedge \ f \in {}^{[\zeta]^{|a|}}N \cap N\}$.

証明 まず，$a \in [\beta]^1$ の場合について証明するが，このために，すべての $\alpha < \beta$ に対し，$k_{\{\alpha\}}([\mathrm{id}_1]_{E_{\{\alpha\}}}) = \{\alpha\}$ となることを α に関する帰納法で証明する．そこで，$\gamma < \beta$ として，$\alpha < \gamma$ に対しては，これが成り立っていると仮定する．ある δ に対し，$k_{\{\gamma\}}([\mathrm{id}_1]_{E_{\{\gamma\}}}) = \{\delta\}$ となるが，$\delta = \gamma$ を示せばよい．

まず，ある $\alpha < \gamma$ をとり，$a = \{\alpha, \gamma\}$ とおく．各 $s \in [\zeta]^2$ に対し，$s = \{\xi_0^s, \xi_1^s\}$ で，$\xi_0^s < \xi_1^s$ とすると，$\pi_{a\{\alpha\}}(s) = \{\xi_0^s\}$ かつ，$\pi_{a\{\gamma\}}(s) = \{\xi_1^s\}$ となる．したがって，定義から，$k_{\{\alpha\}}([\mathrm{id}_1]_{E_{\{\alpha\}}})$ の要素で，これは帰納法の仮定から α となることが分かるものであるが，$k_{\{\gamma\}}([\mathrm{id}_1]_{E_{\{\gamma\}}})$ の唯一の元のより小さいものが一意に決まるが，後者は δ である．したがって，$\gamma \leq \delta$ が分かる．

逆方向には，$\rho < \delta$ と仮定して，例えば $\gamma \in a$ となる $a \in [\beta]^{<\omega}$ と，$f \in {}^{[\zeta]^{|a|}}N \cap N$ に対し，$\rho = k_a([f]_{E_a})$ となっているとする．δ の定義から，

$$(*) \qquad \{s \in [\zeta]^{|a|} \mid f(s) \text{ は } \pi_{a\{\gamma\}}(s) \text{ の唯一の要素より小さい}\} \in E_a$$

である．条件 (iv) により，$a \subseteq b$ となる $b \in [\beta]^{<\omega}$ で，

$$\{s \in [\zeta]^{|b|} \mid f(\pi_{ba}(s)) \in s\} \in E_b$$

となるものがある．したがって，ある i に対し，

$$\{s \in [\zeta]^{|b|} \mid f(\pi_{ba}(s)) = (s)_i\} \in E_b$$

となる，ここで，$(s)_i$ は順序数の集合 s の要素を昇順にならべたときの i 番目の要素を表す．よって，$(b)_i = \alpha$ とすると，

$$\{s \in [\zeta]^{|b|} \mid \{f(\pi_{ba}(s))\} = \pi_{b\{\alpha\}}(s)\} \in E_b$$

となる．ところが，条件 (ii) を $(*)$ に適用すると，$\pi_{b\{\alpha\}}(s)$ の唯一の元 $< \pi_{a\{\gamma\}}(\pi_{ba}(s))$ の唯一の元 となる s の全体は E_b に含まれるから，$\alpha < \gamma$ である．定義と帰納法の仮定により，

$$\{\rho\} = \{k_a([f]_{E_a})\} = k_{\{\alpha\}}([\mathrm{id}_1]_{E_{\{\alpha\}}}) = \{\alpha\}$$

となる．したがって $\delta \le \gamma$ となるから，$\delta = \gamma$ が帰結できる．

一般の $a \in [\beta]^{<\omega}$ に対する結果は上から容易に帰結できる：$\rho = k_b([f]_{E_b})$ として，$a \subseteq b$ とする．このとき上と同様の議論により，

$$\begin{aligned}
\rho \in k_a([\mathrm{id}_{|a|}]_{E_a}) \quad &\Leftrightarrow \quad [f]_{E_b} \in [\pi_{ba}]_{E_b} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{ある } \alpha \in a \text{ に対し，} \{[f]_{E_b}\} = [\pi_{b\{\alpha\}}]_{E_b} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{ある } \alpha \in a \text{ に対し，} \{\rho\} = k_a([\mathrm{id}_1]_{E_{\{\alpha\}}}) = \{\alpha\}
\end{aligned}$$

となる．

(b) $\mathrm{crit}(j_{\mathcal{E}}) = \kappa$ を確かめるには，$\alpha < \kappa$ に対し，$j_{\mathcal{E}}(\alpha) = \alpha$ となることは，E_a の "N-κ-完備性" を用いれば帰納法により容易に示せるから，(i)(1) により，ある a に対し，$\mathrm{crit}(j_{\mathcal{E}}) = \mathrm{crit}(j_a) = \kappa$ となる．

$\beta \le j_{\mathcal{E}}(\zeta)$ となることは (a) から帰結できる：任意の $\alpha < \beta$ に対し，$[\mathrm{id}_1]_{E_{\{\alpha\}}} \in [j_{\{\alpha\}}(\zeta)]^1$ だから，$k_{\{\alpha\}}([\mathrm{id}_1]_{E_{\{\alpha\}}}) \in [j_{\mathcal{E}}(\zeta)]^1$ となるが，(a) により，$k_{\{\alpha\}}([\mathrm{id}_1]_{E_{\{\alpha\}}}) = \{\alpha\}$ である．

最後に，$\xi < \zeta$ なら，(i)(2) から，ある a に対し，$j_a(\xi) \in [\mathrm{id}_{|a|}]_{E_a}$ となり，したがって，(a) により，$j_{\mathcal{E}}(\xi) \in a \subseteq \beta$ となるから，ζ は実際に $\beta \le j_{\mathcal{E}}(\zeta)$ を満たす最小の順序数となっている．

(c) これは 26.1(a) と同様に示せる：$x \in M_{\mathcal{E}}$ なら，$a \in [\beta]^{<\omega}$ と $f \in {}^{[\zeta]^{|a|}}N \cap N$ で，$x = k_a([f]_{E_a})$ となるものがある．ところが，$[f]_{E_a} = j_a(f)([\mathrm{id}_{|a|}]_{E_a})$ だから，

$$x = k_a([f]_{E_a}) = k_a((j_a(f))(k_a([\mathrm{id}_{|a|}]_{E_a})) = j_{\mathcal{E}}(f)(a)$$

となる．最後の等式は，(a) による．　⊣

これで2つの種類のエクステンダーの間の関係が明らかになった：

26.3 演習　N を ZFC の内部モデルとする．

(a) $j\colon N \prec M$ で $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ となっており，$\mathcal{E}$ は j から惹き起こされた (κ, β)-エクステンダーであるとする．このとき $\mathcal{E}$ は N-(κ, β)-エクステンダーである．

(b) $\mathcal{E} = \langle E_a \mid a \in [\beta]^{<\omega} \rangle$ を N-(κ, β)-エクステンダーとする．このとき，$j_{\mathcal{E}}\colon N \prec M_{\mathcal{E}} \cong \mathrm{Ult}(N, \mathcal{E})$ から惹き起こされる (κ, β)-エクステンダーは再び $\mathcal{E}$ となる．

ヒント　(b) には 26.2 を用いる．　⊣

以下の事実は普通の超巾と同様である（5.7 を参照）．§19 で定義されたように，N が ZFC^- の推移的な $\in$-モデルで，U と S は，$\langle N, \in, U \rangle \models U$ は S 上の超フィルター，となっているとき，$\langle N, U \rangle$ が**弱従順**である，というのは，$F \in {}^S N \cap N$ なら，常に $\{i \in S \mid F(i) \in U\} \in N$ となることであった．

26.4 演習　N を ZFC の内部モデルとして，$\mathcal{E} = \langle E_a \mid a \in [\beta]^{<\omega} \rangle$ は N-(κ, β)-エクステンダーで，各 E_a は $[\zeta]^{|a|}$ 上のフィルターとなっており，$j\colon N \prec M \cong \mathrm{Ult}(N, \mathcal{E})$ であるとする．このとき：

(a) すべての $x \in V_\kappa \cap N$ に対し，$j(x) = x$ となる．各 $a \in [\beta]^{<\omega}$ に対し，$\langle N, E_a \rangle$ が弱従順なら，$V_\kappa \cap N = V_\kappa \cap M$, $\mathcal{P}(\kappa) \cap N = \mathcal{P}(\kappa) \cap M$ で，$\kappa^{+N} = \kappa^{+M}$ となる．

(b) すべての ξ に対し，$j(\xi) < (|{}^\zeta\xi \cap N| \cdot |\beta|)^+$ である．

(c) $\theta > \beta$ が基数で，$N \models$「θ は共終数が ζ より大きな強極限である」なら，$j(\theta) = \theta$ となる．

(d) $|X| > \zeta$ となる任意の集合 X に対し，$j``X \notin M$ である．

(e) $\mathcal{E} \notin M$ である．

ヒント　(a) は 19.1(c) のように示すことができ，(b) は 26.2(c) により 19.7(a) のようにして示せる．(c) は 19.7(c) のようにして示せ，(d) は 24.2(c) のように，また (e) は 24.2(d) のようにして示せる．　⊣

エクステンダーの埋め込みが一般には大域的な閉包の性質を持ち得ないことが，次の事実から容易に分かる．

26.5 演習　$\kappa < \lambda$ で，λ は共終数が ω の強極限基数とし，$j\colon V \prec M$ で $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ となるものが存在して，$V_\lambda \subseteq M$ となっているとする．$\mathcal{E}$ を j から定義される (κ, λ)-エクステンダーとして，$j_{\mathcal{E}}\colon V \prec M_{\mathcal{E}} \cong \mathrm{Ult}(V, \mathcal{E})$ とする．このとき，${}^\omega M_{\mathcal{E}} \not\subseteq M_{\mathcal{E}}$ となる．

ヒント　26.1(b) により，$V_\lambda \subseteq M_{\mathcal{E}}$ となるから，$\kappa \leq \beta < \lambda$ なら，(κ, β)-エクステンダー $\mathcal{E}|[\beta]^{<\omega}$ は $M_{\mathcal{E}}$ の元となる．一方，26.4(e) により，$\mathcal{E} \notin M_{\mathcal{E}}$ である．　⊣

強基数，ウディン基数，超強基数

エクステンダーは，必ずしも任意の ω-列をとることに関して閉じた内部モデルを生成しないが，一方，その性質に対応するように補正されたいくつかの仮説が示唆される：

κ はγ-**強基数**　$\Leftrightarrow$　$j\colon V \prec M$ で
(a) $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ かつ $\gamma < j(\kappa)$,
(b) $V_{\kappa+\gamma} \subseteq M$
となるものが存在する.

κ は**強基数**　$\Leftrightarrow$　すべての γ に対し κ は γ-強基数となる.

κ は**超強基数**　$\Leftrightarrow$　$j\colon V \prec M$ で
$\mathrm{crit}(j) = \kappa$ かつ $V_{j(\kappa)} \subseteq M$ となるものが存在する.

したがって, $\gamma \leq \delta$ で, **κ が δ-強基数なら, κ は γ-強基数となる**; また, **κ は可測基数 $\Leftrightarrow$ κ は 0-強基数 $\Leftrightarrow$ κ は 1-強基数**となる. これらの新しい仮定は, 明らかに前出のものの弱い類推となっている：**κ が超コンパクトなら, κ は強基数となる**; また, **κ が膨大なら, κ は超強基数となる**. 前と同じように, $\exists j$ がクラスを走るために直接の定式化ができないにもかかわらず, これらの概念の特徴付けで, 後回しに定義を与えるものが存在する. これにより, κ が超強基数であることは, 実は κ が 2^κ-超コンパクトであることより無矛盾性に関して弱いものとなっていることが示されることになる (26.11(b)). ガイフマン Gaifman [74: 85ff] はすでに強基数と超強基数を考察しているが, これらが注目されるようになったのは, ミッチェル Mitchell [79] とドッドとイェンセン（Dodd [82] を参照）により, 強基数は標準的な内部モデルを持つことが示されてからであった. 我々の γ-強基数の定義に関して言うと, (b) での表現の形が問題となるのは, γ が小さい場合に限られる. $\gamma \geq \kappa \cdot \omega$ なら, $\kappa + \gamma = \gamma$ となってしまうからである. また, 条件 $\gamma < j(\kappa)$ が含まれているのも γ-超コンパクト性のときと同じように, 簡便のためであるにすぎない；γ が非極限基数のときには, この条件は必要でないから, 全面的な強基数の場合にも必要とならない（ガイフマンの, もとの定式化が与えられている 26.7(b) を参照；$j(\kappa) \leq \gamma$ なら κ は超強基数となるが, これは強基数より無矛盾性に関して強い主張となっている (26.12, 26.13)）. $\gamma < j(\kappa)$ なら, $|V_{\kappa+\gamma}| < j(\kappa)$ となることに注意する：$V_{\kappa+\gamma} = V^M_{\kappa+\gamma}$ で $j(\kappa)$ は M で到達不可能であることから, $|V_{\kappa+\gamma}| \leq |V_{\kappa+\gamma}|^M < j(\kappa)$ が成り立つからである.

今までの結果のうち, 行き先のモデルに十分に大きな V_α が含まれていることのみに依存する反映の性質の議論から帰結できるものに対しては, 強基数の性質の仮定で十分である：

26.6 演習

(a) 強基数が存在するなら, 任意の集合 A に対し, $V \neq L(A)$ となる.

(b) κ が 2-強基数なら, κ 上の正規超フィルター U で,

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ は可測基数}\} \in U$$

となるものがある.

(c) κ が γ-強基数で, すべての $\alpha < \kappa$ に対し, $2^\alpha = \alpha^+$ なら, すべての $\beta < \kappa + \gamma$ に対し, $2^\beta = \beta^+$ となる.

(d) κ が強基数なら, $V_\kappa \prec_2 V$ となる.

ヒント　(a) は 5.5 でのスコットの証明の変形により示すことができ, (b) は 22.1 の証明で, (c) は 22.2 の証明で, また (d) は 22.3 での議論により示せる.　⊣

(a) は 5.9 を思い出させるが，強コンパクト性と強基数であるという性質の関係は明らかになっていない．

これらの事実は，超コンパクト性が常に強基数であるという性質で置き換えられるのではないかという印象を与えるかもしれないが，超コンパクト性に基づく重要な相対的無矛盾性の結果で，強基数の性質からだけでは得られそうにないものがいくつか存在する．

次の特徴付けは，γ-超コンパクト性の超フィルターによる特徴付けに対応するものである：

26.7 演習

(a) κ が γ-強基数となるのは，$(\kappa, |V_{\kappa+\gamma}|^+)$-エクステンダー $\mathcal{E}$ で，$V_{\kappa+\gamma} \subseteq M_{\mathcal{E}}$ かつ $\gamma < j_{\mathcal{E}}(\kappa)$ となるものが存在する，ちょうどそのときである．

(b) κ が $(\gamma+1)$-強基数となるのは，ある $\beta > \kappa$ に対し，(κ, β)-エクステンダー $\mathcal{E}$ が存在して，$V_{\kappa+\gamma+1} \subseteq M_{\mathcal{E}}$ となる，ちょうどそのときである．したがって，κ が強基数となるのは，任意の集合 x に対し，$j\colon V \prec M$ で $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ かつ $x \subseteq M$ となるものが存在する，ちょうどそのときである．

(c) κ が超強基数となるのは，ある $\beta > \kappa$ に対し，(κ, β)-エクステンダー $\mathcal{E}$ が存在して，$V_{j_{\mathcal{E}}(\kappa)} \subseteq M_{\mathcal{E}}$ となる，ちょうどそのときである．

ヒント 26.3(b) と 26.1(b)(c) を用いる．(a) では，$j\colon V \prec M$ が κ が γ-強基数であることの例証となっているときには，$|V_{\kappa+\gamma}| \leq |V_{\kappa+\gamma}|^M < |V_{\kappa+\gamma}|^+$ となることに注意する．(b) には，23.15(a) でと同じように議論して，条件 $\gamma < j_{\mathcal{E}}(\kappa)$ が付け加えられることに注意する． ⊣

((b) は，25.15(a) での証明における埋め込みの繰り返しの理論をさらに進めて，$\gamma < j^{\omega+1}(\kappa)$ となる $j^{\omega+1}\colon V \prec M_{\omega+1}$ を得ることにより，$\gamma+1$ を γ に置き換えた若干強い形に改良できる．)

上の特徴付けにより ZFC での定式化が得られる． $V_\alpha \subseteq M_{\mathcal{E}}$ という形の条項は，十分に大きな V_ρ の“エクステンダーによる超巾”により表現できるからである．このような条項は，任意の推移的な集合 Y に対して (κ, Y)-エクステンダーの概念を記述することでさらに明確にすることができる：(κ, β)-エクステンダーの定義で，β を Y で，また，ζ を V_ζ で置き換え，Y が必ずしも自然な整列順序を持たなくてもいいように記法を変更すればよい．26.2(a) での証明により，Y は，結果として得られるエクステンダーの埋め込みでの行き先のモデル $M_{\mathcal{E}}$ に含まれることが分かる．したがって，$V_\alpha \subseteq Y$ なら，$V_\alpha \subseteq M_{\mathcal{E}}$ は自動的に保証される．このようなエクステンダーは Martin-Steel [89] で用いられている．しかしながら，より単純な，$Y = \beta$ となっている場合のエクステンダーの方が，対応する ζ したがって，E_a をのせている $[\zeta]^{|a|}$ の絶対性から，内部モデルには都合がよい．

22.89(b) に類似する次のものは，26.7(a) の帰結として得られる：

26.8 演習 $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \exists\kappa(\kappa$ は強基数$))$ なら，$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \exists\kappa(\kappa$ は強基数 $\wedge \neg\exists\lambda(\lambda > \kappa \wedge \lambda$ は到達不可能$)))$ となる． ⊣

これと対照的に，23.3 の後で与えられた 1-拡張可能性における議論から，超強基数の上

にたくさんの可測基数が存在することが示せる．

γ-超コンパクト性でと同様に，「κ は γ-強基数である」は Δ_2^{ZF} であることが示せ（22.9 の前を参照），膨大基数のときと同じように「κ は超強基数である」は Σ_2^{ZF} であることが示せる．このことから，24.10 との直接的な類似を示す次の命題が導かれる：

26.9 演習　κ が強基数で，それより上に超強基数が存在するとき，κ より下に κ 個の超強基数が存在する．特に，強基数と超強基数が存在するとき，最小の超強基数は最小の強基数より小さい． $\dashv$

これは，超強基数の無矛盾性の強さが強基数のそれより大きいこととは抵触しない．この無矛盾性の強さに関する命題を確立する前にもう一つ新しい仮説を導入しておく：

κ はウディン　$\Leftrightarrow$　任意の $f \in {}^{\kappa}\kappa$ に対し，$f``\alpha \subseteq \alpha$ となる $\alpha < \kappa$ と $j\colon V \prec M$ で，$\mathrm{crit}(j) = \alpha$ かつ $V_{j(f)(\alpha)} \subseteq M$ となるものが存在する．

この概念は 1984 年に抽出されており，注目すべき研究の進展により，無矛盾性の分析で中心的な役割をになわされることになる（§32 を参照）．技術的な仮説であるため，これの重要性は，十分な分析の後はじめて明らかになる．26.7 でと同様に**ウディン基数であることは，エクステンダーの存在を用いて定式化できる**; これはもっと精密な形で後に確立される (26.14).

26.10 演習　κ をウディン基数とすと，κ は正則基数で，$\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ は可測$\}$ は κ で定常となる．したがって，κ は κ-マーロである．

ヒント　κ の正則性を示すには，κ が特異基数で $f \in {}^{\kappa}\kappa$ を，$\langle f(\xi) \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\rangle$ が κ で共終数な上昇列となり $f(0) > \mathrm{cf}(\kappa)$ となるものだったとすると，$\alpha < \kappa$ で，$f``\alpha \subseteq \alpha$ となるものあることに注意すればよい． $\dashv$

新しい仮説の間の階層的な関係を確立し，その過程でウディン基数の便利な特徴付けを与えて，この節を終えることにする．

26.11 命題

(a) κ が 1-拡張可能なら，κ は超強基数となり，κ 上の超フィルター U で，

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ は超強基数}\} \in U$$

となるものが存在する．

(b) κ が 2^{κ}-超コンパクトなら，κ 上の正規超フィルターで，

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ は超強基数}\} \in U$$

となるものが存在する．

証明　(a) $j\colon V_{\kappa+1} \prec V_{j(\kappa)+1}$ が κ の 1-拡張可能性を例証しているとする．$\mathcal{E}$ を "j から惹き起こされた $(\kappa, j(\kappa))$-エクステンダー" とする；今まではエクステンダーは内部モ

デルの間の埋め込みから惹き起こされたもののみを考えていたが，この場合にも E_a たちを，$\mathcal{P}([\kappa]^{|a|}) \subseteq V_{\kappa+1}$ として定義することができる．$\mathcal{E}$ が実際に $(\kappa, j(\kappa))$-エクステンダーとなっていることは容易に確かめられるから，対応する $j_{\mathcal{E}}\colon V$ が $M_{\mathcal{E}} \cong \mathrm{Ult}(V, \mathcal{E})$ に初等的に埋め込める．$g \in V_{\kappa+1}$ が全単射: $[j(\kappa)]^1 \to V_{j(\kappa)}$ なら，26.1(b) での議論により，$V_{j(\kappa)} \subseteq M$ となることが示せる．また，26.1(c) での議論により，$j_{\mathcal{E}}(\kappa) = j(\kappa)$ である．したがって，26.7(c) での特徴付けから，κ は超強基数であることが分かる．最後に，$\mathcal{E} \in V_{j(\kappa)+1}$ だから，U が j からいつものようにして定義された正規超フィルターなら，26.7(c) により，条件 $V_{j_{\mathcal{E}}(\kappa)} \subseteq M_{\mathcal{E}}$ が V_κ の "エクステンダー超巾" によりどのように表現されていたかを思い出すと，$\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ は超強基数 $\} \in U$ が分かる．

(b) これは (a)to $\eta = 1$ としたときの 23.5 から導ける． ⊣

$j\colon V \prec M$ が閉包の性質 ${}^{2^{\mathrm{crit}(j)}}M \subseteq M$ を持つことが，$j'\colon V \prec M'$ で $V_{j'(\mathrm{crit}(j'))} \subseteq M'$ という閉包の性質を持つものの存在の無矛盾性を帰結する，という意味で，(b) はかなり意外な感じがする；$j'(\mathrm{crit}(j'))$ は j' により**後になってから**決定され，$\mathrm{crit}(j')$ よりもずっと大きなものになるので，ユニヴァースの大きな始片は M' に関して絶対的となる．このことが，n-膨大性の強さに関する，この概念の定義のすぐ後で述べた発見法的な議論の $n = 1$ の場合での効果を緩和するものとなる．

これとは対照的に，次のような超強基数の $(n+1)$-膨大性への類推へ移行すると，これは実質的により強いものとなる：$j\colon V \prec M$ で，$\mathrm{crit}(j) = \kappa$ かつ $V_{j^{n+1}(\kappa)} \subseteq M$ となるものが存在する．この命題は 24.8 の議論により κ の n-膨大性を帰結するものとなる．

26.12 命題 κ が超強基数なら，κ はウディン基数で，κ 上の正規超フィルター U で，

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ はウディン基数 }\} \in U$$

となるものが存在する．

証明 $j\colon V \prec M$ が κ が超強基数であることの例証となっているとする．κ がウディン基数であることを確かめるために，$f \in {}^{\kappa}\kappa$ とする．このとき，$j(f) \in {}^{j(\kappa)}j(\kappa)$ で，$j(f)``\kappa = f``\kappa \subseteq \kappa$ となる．$\mathcal{E}$ を j から惹き起こされた $(\kappa, |V_{j(f)(\kappa)}|^M)$-エクステンダーとする．$j(\kappa)$ は M で到達不可能で，$j(f)(\kappa) < j(\kappa)$ だから，$|V_{j(f)(\kappa)}|^M < j(\kappa)$ となる．したがって，$\mathcal{E} \in V_{j(\kappa)} \subseteq M$ となることが容易に分かる．さらに，26.1(b) により，$V_{j(f)(\kappa)} \subseteq M_{\mathcal{E}}$ で，$j(f) = k_{\mathcal{E}}(j_{\mathcal{E}}(f)) = j_{\mathcal{E}}(f)$ となるから，$V_{j_{\mathcal{E}}(f)(\kappa)} \subseteq M_{\mathcal{E}}$ である．したがって，初等的埋め込みにより，$\alpha < \kappa$ で，$f``\alpha \subseteq \alpha$ となるものと，ある β に対する (α, β)-エクステンダー $\mathcal{E}' \in V_\kappa$ で，$V_{j_{\mathcal{E}'}(f)(\alpha)} \subseteq M_{\mathcal{E}'}$ となるものが存在する．したがって，κ はウディン基数である．

$V_\kappa \subseteq M$ でのエクステンダーの存在から $M \models$「κ はウディン基数」となるから，命題の残りは，いつものような反映の性質の議論により導くことができる． ⊣

26.13 命題 κ がウディン基数なら，

$$\{\alpha < \kappa \mid \text{ すべての } \gamma < \kappa \text{ に対し，} \alpha \text{ は } \gamma\text{-強基数 }\}$$

は κ で定常となる．

証明　κ がウディン基数だとして，C を κ で閉非有界とする．C の元で，すべての $\gamma < \kappa$ に対し γ-強基数となるものが見つかればよい．

26.10 により κ は到達不可能であることを思い出して，$g \in {}^{\kappa}\kappa$ を

$$g(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi \text{ がすべての } \gamma < \kappa \text{ に対し} \gamma\text{-強基数となるとき；または，} \\ \gamma & \text{ここに } \gamma \text{ は } \kappa \text{ より小さい強極限基数で} \\ & \xi \text{ が } \gamma\text{-強基数とならないような最小のもの} \end{cases}$$

として定義する．ここで，$f \in {}^{\kappa}\kappa$ を

$$f(\xi) = \max(\{g(\xi) + 5, \min(C - \xi)\})$$

により定義する．仮定から，$f``\alpha \subseteq \alpha$ となる $\alpha < \kappa$ と $j\colon V \prec M$ で $\mathrm{crit}(j) = \alpha$ かつ $V_{j(f)(\alpha)} \subseteq M$ となるものがある．ここで，$j(C)$ は $j(\kappa)$ で閉非有界で，$j(C) \cap \alpha = C \cap \alpha$ となる．また，$f``\alpha \subseteq \alpha$ から，$C \cap \alpha$ は α で閉非有界であることが分かる．したがって，$\alpha \in j(C)$ である．証明を終えるためには，初等的埋め込みから，$M \models$「α はすべての $\gamma < j(\kappa)$ に対し，γ-強基数となる」が示せれば十分である：

$$\mathcal{E} = \langle E_a \mid a \in [j(g)(\alpha) + 1]^{<\omega} \rangle$$

を j から惹き起こされた $(\alpha, j(g)(\alpha) + 1)$-エクステンダーとする．初等的埋め込みから，

$$j(g)(\alpha) < j(f)(\alpha) < j(\alpha)$$

である．二番目の不等式は，$f``\alpha \subseteq \alpha$ と $\alpha < j(\alpha)$ による．したがって，各 E_a は $[\alpha]^{|a|}$ 上のものとなっており，26.1(c) により（そこでの言い方では，$\mathrm{crit}(k_{\mathcal{E}}) \geq j(g)(\alpha) + 1$ ），$j(g)(\alpha) < j_{\mathcal{E}}(\alpha)$ となる．また，$j(g)(\alpha)$ は M で強極限で，$V_{j(f)(\alpha)} \subseteq M$ だから，26.1(b) により，$V_{j(g)(\alpha)} \subseteq M_{\mathcal{E}}$ である．最後に，$\mathrm{rank}(\mathcal{E}) \leq j(g)(\alpha) + 5$ だから，$\mathcal{E} \in V_{j(f)(\alpha)} \subseteq M$ である．さらに，$\mathcal{E}$ の前の性質は M の意味でも成り立つ：

$\mathcal{E}$ は M でのエクステンダーで（整順性の条件に必要な関数は，$V_{j(f)(\alpha)} \subseteq M$ の元となっていることに注意する），$j^M_{\mathcal{E}}\colon M \prec M^M_{\mathcal{E}} \cong \mathrm{Ult}(M, \mathcal{E})$ は，$\mathcal{E}$ から定義可能な M のクラスとなっている．$j_{\mathcal{E}}(\alpha)$ は，

$$\{k_a([f]_{E_a}) \mid a \in [j(g)(\alpha) + 1]^{<\omega} \ \wedge \ f\colon [\alpha]^{|a|} \to \alpha\}$$

の順序型となり，したがって，$j_{\mathcal{E}}(\alpha)$ の計算は M に対し絶対的となる．つまり，$j^M_{\mathcal{E}}(\alpha) = j_{\mathcal{E}}(\alpha)$ で，したがって，$j(g)(\alpha) < j^M_{\mathcal{E}}(\alpha)$ である．最後に，V_α の "エクステンダー超巾" に対する同様の議論により，$j^M_{\mathcal{E}}(V_\alpha) = j_{\mathcal{E}}(V_\alpha)$ となることが分かり，したがって，$j(g)(\alpha) < j_{\mathcal{E}}(\alpha)$ の帰結として得られる $V_{j(g)(\alpha)} \subseteq V^M_{j_{\mathcal{E}}(\alpha)} = j_{\mathcal{E}}(V_\alpha)$ から，$V^M_{j(g)(\alpha)} = V_{j(g)(\alpha)} \subseteq M^M_{\mathcal{E}}$ が分かる．

以上により，g, $M \models$「α はすべての $\gamma < j(\kappa)$ に対し γ-強基数となる」が示せた．　⊣

κ が到達不可能で，$\xi < \kappa$ なら，エクステンダーを用いて上の証明でのように議論することにより，ξ がすべての $\gamma < \kappa$ に対し γ-強基数となるのは，$V_\kappa \models$「ξ は強基数」とな

る，ちょうどそのときであることが分かる．したがって，26.13 により，ウディン基数の強基数上の超越性が得られたことになる．この議論の拡張により，強基数の "太字版" によるウディン基数の便利な特徴付けが得られる．任意の集合 A に対し，

$$\kappa \text{ は } A \text{ に対し } \gamma\text{-強基数} \quad \Leftrightarrow \quad j\colon V \prec M \text{ で}$$

$$\begin{aligned}&\text{(a) } \mathrm{crit}(j) = \kappa\,, \gamma < j(\kappa)\,,\\ &\text{(b) } V_{\kappa+\gamma} \subseteq M\,, \text{ かつ}\\ &\text{(c) } A \cap V_{\kappa+\gamma} = j(A) \cap V_{\kappa+\gamma}\end{aligned}$$

となるものが存在する

とする．これは，26.7(a) での，エクステンダーの存在を用いた γ-強基数の特徴付けの明白な類推となっている．

26.14 定理 (Woodin). 次は同値である：

(a) κ はウディン基数である．

(b) 任意の $A \subseteq V_\kappa$ に対し，

$$\{\alpha < \kappa \mid \text{任意の } \gamma < \kappa \text{ について，} \alpha \text{ は } A \text{ に対し } \gamma\text{-強基数となる}\}$$

は κ で定常となる．

(c) 任意の $A \subseteq V_\kappa$ に対し，$\alpha < \kappa$ で，すべての $\gamma < \kappa$ について，A に対し γ-強基数となるものが存在する．

(d) 任意の $f \in {}^\kappa\kappa$ に対し，$f``\alpha \subseteq \alpha$ となる $\alpha < \kappa$ とエクステンダー $\mathcal{E} \in V_\kappa$ で，$\mathrm{crit}(j_\mathcal{E}) = \alpha$, $j_\mathcal{E}(f)(\alpha) = f(\alpha)$, $V_{j_\mathcal{E}(f)(\alpha)} \subseteq M_\mathcal{E}$ となるものが存在する．

証明 (a) → (b) 26.10 により，κ は到達不可能である．26.13 の証明をなぞって，κ をウディン基数として，$A \subseteq V_\kappa$ かつ，C は κ で閉非有界とする．$g \in {}^\kappa\kappa$ を，

$$g(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi \text{ がすべての } \gamma < \kappa \text{ に対し，} A \text{ に対し } \gamma\text{-強基数となるとき；または，} \\ \gamma & \text{ここに } \gamma \text{ は } \kappa \text{ より小さい強極限基数で} \\ & \xi \text{ が } A \text{ に対し } \gamma\text{-強基数とならないような最小のもの} \end{cases}$$

で定義する．このとき $f \in {}^\kappa\kappa$ を

$$f(\xi) = \max(\{g(\xi) + 5, \min(C - \xi)\})$$

で定義する．仮定より，$f``\alpha \subseteq \alpha$ となる $\alpha < \kappa$ と $j\colon V \prec M$ で，$\mathrm{crit}(j) = \alpha$ かつ $V_{j(f)(\alpha)} \subseteq M$ となるものが存在する．前と同じように，$\alpha \in j(C)$ となるから，$M \models$「α はすべての $\gamma < j(\kappa)$ で，$j(A)$ に対し γ-強基数となる」が示せれば十分である：

ふたたび $\mathcal{E}$ を j から惹き起こされた $(\alpha, j(g)(\alpha)+1)$-エクステンダーとする．このとき，以下の性質が示せれば，$\mathcal{E}$ と $j^M_\mathcal{E}\colon M \prec M^M_\mathcal{E} \cong \mathrm{Ult}(M, \mathcal{E})$ に関する前出の結果により証明が完成する：

$$j(A) \cap V^M_{j(g)(\alpha)} = j^M_\mathcal{E}(j(A)) \cap V^M_{j(g)(\alpha)}\,.$$

このためには，前に注意したように，$j(g)(\alpha) < j(\alpha)$, $j(g)(\alpha) < j_{\mathcal{E}}^M(\alpha)$, また，$V_{j(g)(\alpha)}^M = V_{j(g)(\alpha)} \subseteq M_{\mathcal{E}}^M$ だから，

$$j(A) \cap V_{j(\alpha)}^M = j_{\mathcal{E}}^M(j(A)) \cap j_{\mathcal{E}}^M(V_\alpha)$$

が示せればよい．ここで，

$$j(A) \cap V_{j(\alpha)}^M = j(A \cap V_\alpha) = j_{\mathcal{E}}(A \cap V_\alpha) = j_{\mathcal{E}}^M(A \cap V_\alpha)$$

となることに注意する．二番目の等式は 26.1(b) から得られ，三番目のものは，$V_{\alpha+1}^M = V_{\alpha+1}$ だから，前と同じような絶対性の議論によって得られる．さらに，$\mathrm{crit}(j) = \alpha$ から，$A \cap V_\alpha = j(A) \cap V_\alpha$ となり，したがって，この等式の連鎖は

$$j_{\mathcal{E}}^M(A \cap V_\alpha) = j_{\mathcal{E}}^M(j(A) \cap V_\alpha) = j_{\mathcal{E}}^M(j(A)) \cap j_{\mathcal{E}}^M(V_\alpha)$$

と続けることができて，証明が完了する．

(b) → (c) これは直ちに分かる．

(c) → (d) $g \in {}^\kappa\kappa$ とする．このとき，仮定から，$\alpha \in \kappa$ で，すべての $\gamma < \kappa$ で，$g \subseteq V_\kappa$ に対し，γ-強基数となるものがある．このことから，$g``\alpha \subseteq \alpha$ が帰結される：

$\xi \in \kappa$ に対し，$m_g(\xi) = \max(\{\xi, g(\xi)\}) + 3$ とおく．ここで $\xi < \alpha$ とする．$j\colon V \prec M$ を $\mathrm{crit}(j) = \alpha$, $g(\xi) < j(\alpha)$ かつ，$g \cap V_{m_g(\xi)} = j(g) \cap V_{m_g(\xi)}$ となるものとする．$\langle \xi, g(\xi) \rangle \in g \cap V_{m_g(\xi)}$ だから，$j(g)(\xi) = g(\xi) < j(\alpha)$ となり，したがって，$g(\xi) < \alpha$ である．

ここで様々な g を用いることで，26.10 の議論により κ が到達不可能であることが示せる．

証明を完了させるために，$f \in {}^\kappa\kappa$ とする．前と同じように，$\alpha < \kappa$ をすべての $\gamma < \kappa$ で $f \subseteq V_\kappa$ に対し γ-強基数となるものとする．したがって，特に $f``\alpha \subseteq \alpha$ である．κ は到達不可能だということがわかっているから，エクステンダーによる特徴付け（26.7 を参照）から，エクステンダー $\mathcal{E} \in V_\kappa$ で，$\mathrm{crit}(j_{\mathcal{E}}) = \alpha$, $V_{f(\alpha)} \subseteq M_{\mathcal{E}}$ かつ，$f \cap V_{m_f(\alpha)} = j_{\mathcal{E}}(f) \cap V_{m_f(\alpha)}$ となるものがある（ここで $m_f(\alpha)$ は二番目のパラグラフでと同じように定義されるものとする）．ところが前と同じように，$j_{\mathcal{E}}(f)(\alpha) = f(\alpha)$ だから，目的の結果が帰結できる．

(d) → (a) これは直ちに分かる．　⊣

ウディン基数は，その本質をある種の反映の性質としてとらえている (c) によりもっともよく把握することができる．(d) は，κ がウディン基数であることが $\langle V_\kappa, \in \rangle$ の Π_1^1 の性質であることを示している．したがって，**最小のウディン基数は弱コンパクトではない**．

26.14(c) は 24.19 でのヴォピェンカの原理との類似性を示しており，これにより，ウディン基数の強基数との関係と，ヴォピェンカの原理の超コンパクト基数との関係との類似性が示唆される．ヴォピェンカの原理のときと同じように，ウディン基数も対応するフィルターを考察することで，さらに進んだ解析が可能となる：$X \subseteq \kappa$ に対し，

X は κ でウディン	⇔	任意の $f \in {}^\kappa\kappa$ に対し，$\alpha \in X$ で， $f``\alpha \subseteq \alpha$ となるものと $j\colon V \prec M$ で， $\mathrm{crit}(j) = \alpha$ かつ $V_{j(f)(\alpha)} \subseteq M$ となるものが存在する

とする．κ がウディン基数となるのは，

$$\{X \subseteq \kappa \mid \kappa - X \text{ は } \kappa \text{ でウディンでない}\}$$

が（真の）フィルターになる，ちょうどそのときであることは容易に示せる．このフィルターを κ 上の**ウディン・フィルター**と呼ぶ．

以下の命題は対応するヴォピェンカの原理での命題に類似するものであるが，証明は，部分的に，そこでよりもう少し難くなる．

26.15 演習 κ をウディン基数として，F を κ 上のウディン・フィルターとする．

(a) F は正規フィルターである．

(b) 任意の $A \subseteq V_\kappa$ に対し，$\{\alpha < \kappa \mid$ すべての $\gamma < \kappa$ で α は A に対する γ-強基数$\} \in F$ となる．

(c) $X \in F$ なら，$\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ は可測で $X \cap \alpha$ を含む α 上の正規超フィルターが存在する$\} \in F$ となる．

ヒント (a) 24.14 を思い出す．(b) は，26.14(a) → (b) でのように議論するが，j は $g(\alpha) = j(g)(\alpha)$ も満たすようにとる；これは 26.14(c) → (d) での議論により可能である．(c) は 24.16 を思い出して 26.14(c) を用いればよい． ⊣

このエクステンダーとそれに関連したいくつかの仮説の考察で，我々は，歴史的発展を飛びこえて 1980 年代の主要な展開における研究の結果を垣間見ることになった．これは，広域にわたる最前線の研究での発展であり，ここでは内部モデルの理論の劇的な進展と，1960 年代での全く異なる戦線で発生した仮説である**決定性の公理**に関する研究での，はなばなしい成果が得られることになる．

第 6 章　決定性

ゲームの決定性の研究は，現代集合論における，もっとも極立った面白い発展と言えるであろう．また，次第に明らかになってきた巨大基数との関連は，実に驚くべき統合的な発展であった．ここでの問題の焦点は実数の全体の集合であるにもかかわらず，組合せ論や強制法から巨大基数や内部モデルの理論にいたる広範囲にわたる集合論の分野が総動員されることになる．この巻に一段落をつけ，これに続く話題の予告をするという意味で，本章では，この決定性に関わる展開について述べることにする．§27 では無限ゲームの研究の歴史の始まりと決定性の仮説の定式化にいたる初期の仕事について論じる．§28 はソロヴェイによる巨大基数との関係に関する画期的な結果から始めて，この方向の組合せ論的理論を発展させる．§29 と§30 では，モショヴァキスとマルティンによって始められた決定性の記述集合論での構造的帰結の探究について述べる．§31 では，マルティンの画期的な仕事の記述をもって，決定性の仮説の無矛盾性に関する議論が開始される．最後に，§32 で，マルティン，スティール，そして特にウディンによる相対的無矛盾性に関する最近の結果の概論的な展望を与える．

§27　無限ゲーム

実際のゲームの研究を発端として，無限ゲーム，必勝法，および決定性（つまり，必勝法の存在すること）は，集合論全般にわたる二分律を述べるための，豊饒なパラダイムとなった．この方向での初期の諸結果をふまえて，ポーランドの数学者たちは 1962 年に，任意の実数の集合に対応するゲームの決定性を主張する**決定性の公理** (AD) を導入したが，ここでの動機は，主に，この公理が**すべての**実数の集合の正則性 (§12) を確立するという理由によるものであった．この選択公理と矛盾する結論とともに，AD は最初のうちは，強制法と巨大基数の仮説によって得られた種々の結果によってもたらされた海流の変化に乗りきれずにいる漂流船の体をなしていた．一方では，$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合の正則性が可測基数の存在から帰結できることを，1965 年にソロヴェイが示して以来，記述集合論の問題を解決するために，強い仮説を積極的に用いるという気風がおこっていた．

1967 の二つのできごとがさらに決定性の研究をうながし，ほどなくこの研究を集合論の主流の一つへと変えてゆくことになった．最初のものは，AD が ω_1 の可測性を帰結することの，ソロヴェイによる証明であった．この結果は，それによって得られる巨大基数の

理論での，超限に対する予想のできないようないくつもの帰結の錨をおろし．二番目のものは，ブラックウェル David Blackwell [67] による，記述集合論の古典的な結果のゲームを用いたエレガントな新証明で，決定性に基づくこの理論の手法と結果の拡張への組織的なアプローチで，この漂流船を港へつなぎとめた．

新しいパラダイムに基づく明らかに強い仮説に気付き，超限基数と定義可能な実数の集合に関する，より必然的な構造の発掘の可能性に魅せられて，一群の優れた数学者たちが乗船して精力的な研究を開始した：ソロヴェイ，マルティン，モショヴァキス といった面々がそれで，1970 年代初めにさらにクーネンやケクリスがこれに加わった．帰納関数論から超巾の理論にいたる広域のテクニックが，AD やその他の決定性の仮説から帰結される，しばしば奇妙な，しかし内的な一貫性を持った関係の織物を生みだすために投入された．これらの仮説が，特に何の正当化の理由も持たない，ということは，広く認識されていたが，それらからの帰結と，議論の方法，特に記述集合論でのそれが，これらの仮説をさらに研究することの動機として十分なものと見なされたのである．

1970 年代の終わりには，射影的集合に関するほぼ完全な理論の，強固なアーチと繊細な細部を持つ強固な大伽藍ができあがっていた（射影的順序数と呼ばれるものの決定が一つの空隙としてまだ残されていたが，これは超絶的な技巧を駆使してジャクソン Steve Jackson が解決することになる）．この研究それ自身としての，こういった意味での正当性にささえられて，ロスアンジェルス周辺の研究者たちはカバル・セミナーを発足させ，特に，このセミナーの錚々たるメンバーに加わった二人の若い数学者スティールとウディンにより，注意の対象は，射影的集合の先の実数の集合，内部モデル，全面的な無矛盾性などに移行しはじめた．

決定性の研究の初期から，この仮説からの帰結のみでなく，どれだけの決定性を導くことができるのか，という問題も考えられていた．初めのころにマルティンは，可測基数の存在から，大きな量の決定性が導かれる，という，もう一つの決定性と巨大基数の統合的な関係を確立している．マルティンは，1974 年にフリートマン Harvey Friedman の初期の仕事を補足して，ZFC で導出可能な決定性の量を本質的にはほぼ確定している．さらに数年後には，ソロヴェイとハリントンの仕事に基づいて，決定性の成り立つ量とたくさんの可測基数の存在の間の関係が，マルティンにより厳密決定されている．

その強さは際限のないように見えるが，決定性は巨大基数の階層を凌駕するものなのか？あるいは，決定性の仮説の無矛盾性は最後には巨大基数から導くことができるのであろうか？ はたまたこれらの二つは高い領域で互いに直交する概念なのであろうか？ この中心的問題が 1980 年代後半に次第に解けてゆくさまは，さながらエキサイティングなミステリー小説のようであった：進展にスパートがかかったり，ないだり，気をそらせる展開，長距離電話，... そしてパズルの部分部分がうまくかみあいだして，ストーリーの大詰め．結局，巨大基数，それもそのうちの比較的小さなものが，必要になる強さを提供することがマルティンとスティールにより示され，最終的には，ウディンにより，驚くべき無矛盾等価性の結果が得られたのであった．これは，集合論の現代的な手法の高らかな勝利であり，意外な形での巨大基数の重要性に対する是認であった．

この概説は我々の歴史的な枠をはみ出してしまったし，上記の事柄に十分な数学的説明

を加えることはいずれにしても本巻の限界を越えている．それで以下では次のようなアプローチをとることにする： この節で決定性の歴史的な発端と，決定性の仮説の定式化にいたる初期の仕事について述べる．次の節では，決定性のもっと組合せ論的な帰結，とくにそれらのうち巨大基数に関わる性格のものについて考察する．§29 と§30 は記述集合論での決定性の仮説の構造的な帰結について述べる．§31 では，決定性の仮説の無矛盾性に関する初期の仕事について述べ，終わりに，§32 では，1980 年代のこの方向で達成されたはなばなしい結果ついての概説を行う．ここでは，ほとんどの証明ははぶいて，むしろ，全体像やアイデアの歴史的な進化が見えるような記述を試みる．モショヴァキスの教科書 Moschovakis [80] が記述集合論について述べた部分での参考書となり，§§28, 31, 32 がそれを補足する役割をはたす．前者は組合せ論と巨大基数にアクセントをおいたものになっているのに対し，後者では相対的無矛盾性に焦点があてられている．

決定性に関する仕事の多くの部分は AC なしで行わなければならなくなるため，

この節では前提となる理論は ZF とする．

したがって，今までとは逆に，AC を用いるときに，それを明言することにする．

基本的な文脈を確立するために，X を空でない集合とする．$A \subseteq {}^{\omega}X$ に対し，$G_X(A)$ で次のような “完全情報を持つ無限二人ゲーム” を表すことにする：プレイヤー I と II がいる．まず I が $x(0) \in X$ を選び，続いて II が $x(1) \in X$ を選ぶ，次に I が $x(2) \in X$ を選び，その後 II が $x(3) \in X$ を選ぶ，等々：

$$\begin{array}{lcccccc} I: & x(0) & & x(2) & & \ldots \\ II: & & x(1) & & x(3) & \ldots \end{array}$$

各選択は，このゲームでの**手**とよばれ，各プレイヤーは，彼の手を指すときには，前の手をすべ知っているものとする（“完全情報” ゲーム）．結果として得られる $x \in {}^{\omega}X$ はこのゲームの**プレイ**と呼び，x の始片は**部分プレイ**と呼ぶ．$x \in A$ のとき I の勝ちとし，そうでないときは II の勝ちとする．A をゲーム $G_X(A)$ のペイオフと呼ぶ．

I の**戦略**とは，それまでの手が与えらえたとき，彼のとるべき手を教える関数 σ: $\bigcup_{n\in\omega} {}^{2n}X \to X$ のことである．したがって，σ **による（部分）プレイ**は，

$$\begin{array}{llll} I: & \sigma(\emptyset) & \sigma(\langle\sigma(\emptyset), y(0)\rangle) & \sigma(\langle\sigma(\emptyset), y(0), \sigma(\langle\sigma(\emptyset), y(0)\rangle), y(1)\rangle) \\ II: & \quad y(0) & \quad y(1) & \ldots \end{array}$$

という形のものとなる．II の手を $y \in {}^{\omega}X$ と枚挙するとき，このプレイを

$$\sigma * y$$

で表すことにする．戦略 σ が I の**必勝法**であるとは，$\{\sigma * y \mid y \in {}^{\omega}X\} \subseteq A$, つまり，$II$ がどんな手を打っても，σ によるプレイは A の元になることとする．同様に，II の**戦略**とは関数 τ: $\bigcup_{n\in\omega} {}^{2n+1}X \to X$ のこととし，τ **による（部分）プレイ**とは，ある $z \in {}^{\omega}X$ に対し，

$$\begin{array}{llll} I: & z(0) & & z(1) & \ldots \\ II: & & \tau(\langle z(0)\rangle) & & \tau(\langle z(0), \tau(\langle z(0)\rangle), z(1)\rangle) \end{array}$$

という形をしたものとする．このような（部分）プレイを

$$z * \tau$$

と表す．τ が II の**必勝法**であるとは，$\{z * \tau \mid z \in {}^{\omega}X\} \cap A = \emptyset$ となることである．σ を I の任意の必勝法とするとき，$y \in {}^{\omega}X$ に $\sigma * y \in {}^{\omega}X$ を対応させる関数は単射となるから，もし $|A| < |X|^{\omega}$ なら，I は必勝法を持ち得ないことに注意する．同様の注意は II と $|{}^{\omega}X - A|$ に対しても言える．ここで，

$G_X(A)$ が**決定的**であるとは，プレイヤーの一人が必勝法を持つことである

とする．両方のプレイヤーが同時に必勝法を持つことはあり得ないことに注意する．主要な場合である $X = \omega$ で $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ のときには，簡単のために，

A が**決定的**であるとは，$G_{\omega}(A)$ が決定的であること

とする．このようなセッティングで次の記法は便利である：$x \in {}^{\omega}X$ に対し，$x_I, x_{II} \in {}^{\omega}X$ を

$$x_I(i) = x(2i),$$
$$x_{II}(i) = x(2i+1)$$

とする．σ が上のような I の戦略で，$y \in {}^{\omega}X$ のときには，$(\sigma * y)_{II} = y$ となり，τ が II の戦略で，$z \in {}^{\omega}X$ のときには $(z * \tau)_I = z$ となる．

ゲーム $G_X(A)$ がここでの主要な考察の対象となるが，他のもっと複雑な規則を持つ様々なゲームも考察することになる．上記の用語はこの場合にも自然に定義できるので，説明なしに用いることにする．対応する A が何かを明言することなしに "ペイオフの図式" の記述のみを与えることもあるが，このようなときには A が何になるべきかは明らかであるはずである．

ゲームの決定性は現代の集合論で重要な研究領域となってゆくのであるが，最初は数学の基礎の研究での主要人物たちが，実存するゲームや，これに類似のものの分析の可能性について余興で考察していることが，注目される．チェスに関心が集中した初期の予兆では，ツェルメロ Zermelo [13: 502-503] が，もし一人のプレイヤーがある局面 q から必勝するなら，対戦者がどのような手をさしても，多くとも $t(q)$ 手で勝てるような $t(q) \in \omega$ が存在することを示している．このことは後にハンガリーの数学者によってふたたびとりあげられている：ケゥーニッヒは，よく知られた彼の木の補題を導入している論文 König [27] で，フォン・ノイマンの示唆によって，ツェルメロの証明の穴をうめている．この論文の終わり König [27: 130] には，ツェルメロが彼に書き送った，やはりこの証明の穴をうめるより簡単な証明が与えられている．ツェルメロがここで示しているのは，$G_X(A)$ の**様々な有限版は決定的である**ということであった．ケゥーニッヒは無限のチェス盤を考察しており，カルマー Lázló Kalmár [28] は超限への一般化を研究している．

これより前に，ボレル Borel [21] は有限ゲームの理論について全般的な考察をしており，一般的な戦略の概念を導入して，現在ミニマックス戦略としてよく知られているものを定式化している．この後，フォン・ノイマン von Neumann [28] は，ミニマックス定理を証明しているが，この結果がゲームの数学理論を真の意味でスタートさせたと言っていい．この定理の一つの帰結は，再び，$G_X(A)$ の様々な有限版は決定的である，ということであった．チェスに関しては，アウエ Max Euwe [29] もミニマックス戦略を考察している；ついでながら，彼は 1935-1937 のチェスの世界チャンピオンでもあった．

実数の集合に対する帰結の可能性を期待して，実数に関連した無限ゲームを最初に考察したのはポーランドの数学者たちであった．シュタインハウス Hugo Steinhaus [25] の提出したゲームの理論での別の予想の追究から，(Steinhaus [65: 464] によると) 1925 年にバナッハとマズーア Stanisław Mazur は（AC を用いて；27.2 を参照）$G_X(A)$ の形のゲームで決定的でないものを見つけている．スコッティシュ・ブックで（Mauldin [81: 113ff] を参照），マズーアは無限ゲームの定式化をして，それのベールのカテゴリーとの関連を予想している．この予想は，バナッハによって 1935 年に肯定されることになる．この問題を変形して，ウラムは本質的には次のことを問うている：**どのような $A \subseteq {}^\omega\omega$ に対し，I（または II）は $G_\omega(A)$ で必勝法を持つか？ これと関連した I か II のどちらかが $G_\omega(A)$ で必勝法を持っている，つまりこのゲームが決定的ような A は何か？** にちゃんとした答を与えるのに集合論の研究者たちはこの後の半世紀を費やすことになる．

1940 年代の中頃までには，フォン・ノイマンとモーゲンスターンは，ゲームとそれによる経済活動の解析へのアプローチの理論を彼等の大著 von Neumann and Oskar Morgenstern [44] に書き表していたが，この本は，後に続く何十年にもわたって，この方向の研究を活性化し続けることになる．この背景のもとに，無限ゲームの決定性のより組織的な研究が行われだした．

ゲイル David Gale とスティウワート Frank Stewart がゲーム $G_X(A)$ の研究を始めた．空でない X と $s \in {}^{<\omega}X$ に対し，$O(s) = \{x \in {}^\omega X \mid s \subseteq x\}$ とする．$A \subseteq {}^\omega X$ が**開集合**であるとは，A が $O(s)$ の形をしたものの和集合となっていることとする．また，X が**閉集合**であるとは，${}^\omega X - A$ が開集合であることとする．X を離散位相で考えるとき，これらは，ちょうど積位相での開集合と閉集合となっており，$X = \omega$ の場合とも一致する．次の結果は簡単ではあるが，ここでの話題全般に対して基本的なものである；証明は，開集合の要素であるという関係は有限ステップで保存されるということから，関連する有限ゲーム（実質的には上で述べたツェルメロとフォン・ノイマンによって与えられたようなもの）でと同様である．

27.1 命題　(AC)(Gale-Stewart [53]). $A \subseteq {}^\omega X$ が開集合または閉集合であるとき，$G_X(A)$ は決定的である．

証明　任意の $B \subseteq {}^\omega X$ と $s \in {}^{<\omega}X$ に対し，

$$B/s = \{x \in {}^\omega X \mid s^\frown x \in B\}$$

とおく．もし I が $G_X(B/s)$ で必勝法を持たないとすれば，すべての $i \in X$ に対し，$j \in X$

で，I が $G_X(B/s^\frown\langle i,j\rangle)$ で必勝法を持たないようなものが存在する：そうでなければ，$i\in X$ をすべての $j\in X$ に対し，I が $G_X(B/s^\frown\langle i,j\rangle)$ での必勝法を σ_j 持つようなものとする．このとき I は $G_X(B/s)$ でも必勝法を持ってしまう：まず，i という手を打って，次の応酬 j があったところで，σ_j によってプレイを続ければよい．

ここで，$A\subseteq {}^\omega X$ が開集合として，I が $G_X(A)$ で必勝法を持たないと仮定してみる．上の注意により，II の戦略 τ を，σ による任意の部分プレイ $s\in\bigcup_{n\in\omega}{}^{2n}X$ に対し，I が $G_X(A/s)$ で必勝法を持たないように，帰納的にとることができる．x を τ によるプレイとして，$x\in A$ だったとすると，A が開集合であることから，$2n\in\omega$ で $O(x|2n)\subseteq A$ となるものが存在する，ところが，このときには I の $G_X(A/x|2n)$ での任意の戦略が必勝法になってしまうが，これは矛盾である．したがって，τ は $G_X(A)$ での II の必勝法となっている．

A が閉集合である場合には，I と II の役割を交換することで同様に示せる． ⊣

この証明でのように，必勝法は，形式的な定義を与えることはせずに，ラフな記述のみによって提示されることが多い．ここで主に問題となる場合は $X=\omega$ であるが，決定性の証明は，しばしばある X での開集合 $A\subseteq{}^\omega X$ に対応する補助的なゲームに帰着させられることが多く，この場合の要点は A の要素であることが，ある有限のステップで保証されるということである．

ACがあるときには，決定的であることの可能性は制限されたものとなる：

27.2 命題 (AC)(Gale-Stewart [53]). 決定的でないような集合が存在する．

証明 $G_\omega(A)$ のゲームの戦略は $2^{\aleph_0}$ 個あるから，$\langle\sigma_\alpha\mid\alpha<2^{\aleph_0}\rangle$ を I の戦略の枚挙とし，$\langle\tau_\alpha\mid\alpha<2^{\aleph_0}\rangle$ は II の戦略の枚挙とする．$a_\alpha,b_\alpha\in{}^\omega\omega$, $\alpha<2^{\aleph_0}$ を次のように帰納的に選ぶ：a_β と b_β がすべての $\beta<\alpha$ に対しすでに選ばれたとき，b_α を，ある y に対し $b_\alpha=\sigma_\alpha * y$ だが，$b_\alpha\notin\{a_\beta\mid\beta<\alpha\}$ となっているように選ぶ．$y\in{}^\omega\omega$ に対し $\sigma_\alpha * y$ を対応させる関数は単射だから，$|\{\sigma_\alpha * y\mid y\in{}^\omega\omega\}|=2^{\aleph_0}$ となり，したがって，このように選ぶことは可能である．同様に，a_α を，ある z に対し $a_\alpha=z*\tau_\alpha$ だが，$a_\alpha\notin\{b_\beta\mid\beta<\alpha\}$ となるように選ぶ．このとき，$A=\{a_\alpha\mid\alpha<2^{\aleph_0}\}$ と $B=\{b_\alpha\mid\alpha<2^{\aleph_0}\}$ は互いに素となり，このことから，I も II も $G_\omega(A)$ で必勝法を持たないことが容易に確かめられる． ⊣

Gale-Stewart [53] では，すべてのボレル集合が決定的であるか？という重要な問題も提示されている．27.1 により開集合は決定的である；Philip Wolfe [55] では $\boldsymbol{\Sigma}^0_2$ 集合が決定的であることが示され，ほぼ 10 年後に Morton Davis [64] で $\boldsymbol{\Sigma}^0_3$ の決定性が示されている．ここで現れた困難はやがて超数学的な議論により理由が解明され（31.2 の後を参照），そのことでさらに進歩が促されることになる．それより前の展開で，新しい集合論でのいくつかの仮説の定式化の動機付けとなるものを次に議論することにする．

ゲームと正則性

実数の集合の正則性に新しい光をあてる，ベールの性質，完全集合の性質，ルベーグ可測

にそれぞれ深く関連した三つのゲームを考察する．

$A \subseteq {}^\omega\omega$ に対し，前に述べたマズーアのスコッティシュ・ブックでのゲームは，実質的には次に定式化するゲーム $G^{**}_\omega(A)$ であった：二人のプレイヤー I, II がいるが，彼等は ω の元を選ぶかわりに，${}^{<\omega}\omega - \{\emptyset\}$ の元を選んでゆく：

$$\begin{array}{llllll} I\ : & s_0 & & s_2 & & \ldots \\ II: & & s_1 & & s_3 & \ldots \end{array}$$

前出の用語を再び用いて，x を，この結果として得られるプレイを繋げてできる：$s_0{}^\frown s_1{}^\frown s_2{}^\frown \ldots$ とし，$x \in A$ なら I の勝ちで，そうでないなら II の勝ちとする．次の結果は，マズーアがまず順方向に気がつき，バナッハがそれの逆を与え，オクストビー John Oxtoby がこれの任意の位相空間への一般化を与えている．

27.3 命題　(Mazur, Banach – Mauldin [81: 113ff]; Oxtoby [57]). $A \subseteq {}^\omega\omega$ に対し，

(a) A が疎集合となるのは II が $G^{**}_\omega(A)$ で必勝法を持つ，ちょうどそのときである．

(b) ある $s \in {}^{<\omega}\omega$ に対し，$O(s) - A$ が疎集合となるのは，I が $G^{**}_\omega(A)$ で必勝法を持つ，ちょうどそのときである．

証明　(a) まず A が疎集合であるとしてみる．したがって，ある閉全疎集合の列 $C_n, n \in \omega$ で，$A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} C_n$ となっているものがとれる．このとき，II の戦略 τ を，$\tau(\langle s_0 \rangle)$ は $O(s_0{}^\frown t) \cap C_0 = \emptyset$ となる t で，一般には，$\tau(\langle s_0, s_1, \ldots, s_{2n}\rangle)$ は $O(s_0{}^\frown s_1{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n}{}^\frown t) \cap C_n = \emptyset$ となるような t になるようにとれる．このような τ は II の必勝法となる．

次に II が τ の必勝法であるとしてみる．τ による部分プレイで $p = \langle s_0, \ldots, s_{2n}\rangle$ という形をしているものに対し，$p_* = s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n}$ として，

$$D_p = \{x \in {}^\omega\omega \mid p_* \subseteq x \rightarrow \exists t \in {}^{<\omega}\omega - \{\emptyset\}(p_*{}^\frown t^\frown \tau(p^\frown \langle t \rangle) \subseteq x)\}$$

とおく．このとき各 D_p は開集合で（$O(p_*)$ が開閉集合であることに注意する），稠密である（$u \in {}^{<\omega}\omega$ なら，$u \not\supseteq p_*$, したがって，$O(u) \subseteq D_p$ となるか，あるいは，$t \in {}^{<\omega}\omega - \{\emptyset\}$ で $p_*{}^\frown t = u$ となるものがあり，したがって $x \supseteq p_*{}^\frown t^\frown \tau(p^\frown \langle t \rangle)$ となる任意の $x \in {}^\omega\omega$ は $x \in O(u) \cap D_p$ を満たすからである）．さらに，任意の $x \in \bigcap_p D_p$ に対し，τ によるプレイ $\langle s_i \mid i \in \omega \rangle$ を $x = s_0{}^\frown s_1{}^\frown s_2{}^\frown \ldots$ となるようにとれるから，$x \notin A$ となる．よって，$A \subseteq \bigcup_p ({}^\omega\omega - D_p)$ は全疎集合の可算和であることが分かる．

(b) まず，$O(s) - A$ が，ある $s \in {}^{<\omega}\omega$ に対し疎集合となっているとしてみる．$O(s) - A$ は空でないとしてよい．このとき I は最初の手で s をとり，この後 (a) の順方向でのように $O(s) - A$ を避ける，という必勝法を持つ．

逆方向は，I が必勝法 σ を持っていて，$\sigma(\emptyset) = s$ となっているとすると，II は $G^{**}_\omega(O(s) - A)$ で σ から得られる必勝法を持っていることが容易に分かる．したがって，(a) により $O(s) - A$ は疎集合である．　⊣

27.4 系　$A \subseteq {}^\omega\omega$ に対し，

$$O_A = \bigcup \{O(s) \mid s \in {}^{<\omega}\omega \ \wedge\ O(s) - A \text{ は疎集合}\}$$

とする．$G^{**}_\omega(A - O_A)$ が決定的なら，A はベールの性質を持つ．

証明　I が $G^{**}_{\omega}(A-O_A)$ で必勝法を持つなら，ある $t\in{}^{<\omega}\omega$ に対し，$O(t)-(A-O_A)$ は疎集合でなくてはならない．すると $O(t)-A$ も疎集合となるから，$O(t)\subseteq O_A$ となる．したがって $O(t)-(A-O_A)=O(t)$ となってしまい矛盾である (0.11)．したがって II が $G^{**}_{\omega}(A-O_A)$ で必勝法を持つから，$A-O_A$ は疎集合である．ところが，O_A の定義から，O_A-A も疎集合だから，A はベールの性質を持っていることが分かる．　$\dashv$

完全集合の性質のためのゲームは，$X=2$ に基づくものとなっている．$A\subseteq{}^{\omega}2$ に対し，$G^*_2(A)$ を次のように定式化されるゲームとする：I は ${}^{<\omega}2$ の元を選び，II は 2 の元を選ぶ：

$$\begin{array}{llllll} I: & s_0 & & s_2 & & \ldots \\ II: & & k_1 & & k_3 & \ldots \end{array}$$

前出の用語を再び用いて，x をこの結果として得られるプレイを繋げて得られる $s_0{}^\frown\langle k_1\rangle{}^\frown s_2{}^\frown\langle k_3\rangle{}^\frown\ldots$ とし，$x\in A$ なら I の勝ち，そうでなければ II の勝ちとする．${}^{\omega}2$ を基本開集合系 $O(s)=\{x\in{}^{\omega}2\mid s\subseteq x\}$, $s\in{}^{<\omega}2$ で位相化する．完全集合は，前と同じように，孤立点を持たない空でない閉集合である．

27.5 命題　(Davis [64])．$A\subseteq{}^{\omega}2$ に対し，

(a) A が可算となるのは，II が $G^*_2(A)$ で必勝法を持つ，ちょうどそのときである．

(b) A が完全な部分集合を持つのは，I が $G^*_2(A)$ で必勝法を持つ，ちょうどそのときである．

証明　(a) まず，A の枚挙で $\langle a_i\mid i\in\omega\rangle$ という形のものがあると仮定する．このときには，II は次のような簡単な必勝法を持つ：I は彼の i 番目の手で，結果として得られるプレイの連結が a_i と異なるようにする．

次に II が必勝法 τ を持つとしてみる：27.3(a) の証明でのように，τ による部分プレイで $p=\langle s_0,k_1,\ldots,s_{2n},k_{2n+1}\rangle$ という形をしているものに対し，$p_*=s_0{}^\frown\langle k_1\rangle{}^\frown\ldots{}^\frown s_{2n}{}^\frown\langle k_{2n+1}\rangle$ とし，

$$D_p=\{x\in{}^{\omega}2\mid p_*\subseteq x\to\exists t\in{}^{<\omega}2(p_*{}^\frown t^\frown\tau(p^\frown\langle t\rangle)\subseteq x)\}$$

とおくと，前と同じように $A\subseteq\bigcup_p({}^{\omega}2-D_p)$ が示せる．

ここで，各 p に対し，$x\in{}^{\omega}2-D_p$ となるのは，$p_*\subseteq x$ で，$\forall t\in{}^{<\omega}2(p_*{}^\frown t^\frown\tau(p^\frown\langle t\rangle)\not\subseteq x)$ となる，ちょうどそのときである．したがって，${}^{\omega}2-D_p$ はただ一つの要素 x_p を持つ：$|p_*|=m$ とすると，$x_p|m=p_*$ である；$x_p(m)=1-\tau(p^\frown\langle\emptyset\rangle)$ でなければならないが，帰納的に，$e>m$ に対し，

$$x_p(e)=1-\tau(p^\frown\langle x_p(m),\ldots,x_p(e-1)\rangle)$$

となる（この議論は，${}^{\omega}\omega$ から ${}^{\omega}2$ に移行したことで可能になっている）．したがって，A は可算である．

(b) まず A は完全な部分集合 P を持つと仮定してみる．

$$T=\{x|n\mid x\in P\ \wedge\ n\in\omega\}$$

とおくと，I 戦略が次のように規定できる： 最初の手は $s \in T$ で $s^\frown\langle 0\rangle$ と $s^\frown\langle 1\rangle$ の両方が T の元となるようなものとする；P は孤立点を持たないから，このような s は存在する．一般に，部分プレイ p でそれの連結 p_* が T の元となるものに対し，I の手 s は $p_*{}^\frown s^\frown\langle 0\rangle$ と $p_*{}^\frown s^\frown\langle 1\rangle$ の両方が T の元になるようなものとする；ふたたび，そのような s は P が孤立点を持たないことから存在する．P は閉集合だから，これは I の必勝法となる．

逆は，σ が I の必勝法なら，$\{\sigma * y \mid y \in {}^\omega 2\}$ は A の完全集合となることに注意すればよい．　$\dashv$

${}^\omega 2$ から ${}^\omega\omega$ への移行は容易である．これはもっと一般的にも示せるが，ここでは次のような写像を用いてできる：

$n, k \in \omega$ に対し，$b^k_n\colon n+1 \to 2$ を次のように定義する：k が偶数なら，$i < n$ に対し $b^k_n(i) = 1$ として $b^k_n(n) = 0$ とする；k が奇数なら，$i < n$ に対し $b^k_n(i) = 0$ として $b^k_n(n) = 1$ とする．ここで，$\Psi\colon {}^\omega\omega \to {}^\omega 2$ を，

$$\Psi(x) = b^0_{x(0)}{}^\frown b^1_{x(1)}{}^\frown b^2_{x(2)}{}^\frown \ldots$$

により定義する．このとき，値域は最後には定値になるような可算個のものを除くすべての ${}^\omega 2$ の元となっており，Ψ はその値域を ${}^\omega 2$ の部分空間と見たとき，そこへの位相同型になっていることが，すぐに確かめられる．また，$B \subseteq {}^\omega 2$ に対し，B が完全集合となるのは，$\Psi^{-1}(B)$ が完全集合となる，ちょうどそのときで，B が可算となるのは $\Psi^{-1}(B)$ が可算となる，ちょうどそのときとなっている．このことから，次のことが分かる：

27.6 系　$A \subseteq {}^\omega\omega$ に対し，$G^*_2(\Psi``A)$ が決定的となるのは，A が完全集合の性質を持つ，ちょうどそのときである．　$\dashv$

ルベーグ可測性については，Mycielski-Swierczkowski [64] で最初のゲームによる議論がなされている．その後，ハリントンは彼の**被覆ゲーム**を用いてより簡単なアプローチを見いだしている．これは ${}^\omega 2$ でのゲームとして記述するのが一番自然なのであるが，ちょっとした工夫を加えて，${}^\omega\omega$ の文脈の中に留まって述べることにする： $A \subseteq {}^\omega\omega$ と $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ に対し，被覆ゲーム $G(A, \epsilon)$ は自然数の手を打って争われる：

I :	$x(0)$		$x(2)$		$\ldots$
II :		$x(1)$		$x(3)$	$\ldots$

しかしながら，ペイオフの図式は多少複雑である．$\Psi\colon {}^\omega\omega \to {}^\omega 2$ を上と同じものとして，Ψ^{-1} をこの値域上での逆関数とする．I は常に 0 か 1 を選び，x_I がいつまでも定数値をとることはないようにする．II の手の一つ一つはそれぞれ基本開集合の有限和をコードしているとみなされる；記法を固定するために,, $\langle \mathbf{s}_i \mid i \in \omega\rangle$ を ${}^{<\omega}\omega$ の帰納的な枚挙として，

$$N_i = O(\mathbf{s}_{\mathbf{s}_i(0)}) \cup \ldots \cup O(\mathbf{s}_{\mathbf{s}_i(|\mathbf{s}_i|-1)})$$

とおく．このとき II の手 $x(2n+1)$ は

$$m_L(N_{x(2n+1)}) < \epsilon/2^{2(n+1)}$$

を満たすものとする．ここで I か II がこれらの条件を満たせなかったときには，最初にそうだった方が負けということにする．これが起こらなかった場合には，アイデアとしては II は $\bigcup_{n\in\omega} N_{x(2n+1)}$ が A の被覆になるように試みる．したがって，I が勝つのは，$\Psi^{-1}(x_I) \in A - \bigcup_{n\in\omega} N_{x(2n+1)}$ となるときで，そうでなければ II の勝ちとする．

27.7 補題 $G(A,\epsilon)$ で，

(a) I が必勝法を持てば，ルベーグ可測な $B \subseteq A$ で $m_L(B) > 0$ となるものが存在する．

(b) II が必勝法を持てば，開集合 $O \supseteq A$ で，$m_L(O) < \epsilon$ となるものが存在する．

証明 (a) σ を I の必勝法とする．このとき，σ による I の手の結果

$$B = \{\Psi^{-1}((\sigma * y)_I) \mid y \in {}^\omega\omega,\ y \text{ は } II \text{ の手に関する上の条件を満たす}\}$$

は（σ をコードするパラメタを持つ）$\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合となり，したがってルベーグ可測である．ゲームの規則から，$m_L(B) > 0$ となる：そうでないとすると，(0.8(d) と 0.9(a) により）$\langle x(2n+1) \mid n \in \omega\rangle$ で，σ によっていても II が勝ってしまうものが容易に見つかる．

(b) τ が II の必勝法だったとする．任意の $s \in {}^{<\omega}2 - \{\emptyset\}$ に対し，$|s| = n+1$ として，$d(s)$ を I の手が，$s(0), \ldots, s(n)$ となっていような τ による部分プレイでの II の（このゲームで $(2n+1)$ 番目の手となっている）対応とする．このとき τ が II の必勝法であることから，任意の $x \in A$ に対し，ある $n \in \omega$ で $x \in N_{d(\Psi(x)|(n+1))}$ となるものが存在しなければならない．したがって，

$$O = \bigcup\{N_{d(s)} \mid s \in {}^{<\omega}2 - \{\emptyset\}\}$$

とすると，$A \subseteq O$ となる．さらに，このゲームのルールから，$|s| = n+1$ として $m_L(N_{d(s)}) < \epsilon/2^{2(n+1)}$ となる，また，この長さの s は 2^{n+1} 個しかない．したがって，

$$m_L(O) < \textstyle\sum_{n\in\omega}(\epsilon/2^{2(n+1)}) \cdot 2^{(n+1)} = \sum_{n\in\omega}\epsilon/2^{(n+1)} = \epsilon$$

となる． ⊣

$A \subseteq {}^\omega\omega$ に対し，$B \subseteq {}^\omega\omega$ が A の**極小被覆**であるというのを，$A \subseteq B$ で，B はルベーグ可測となり，$Z \subseteq B - A$ がルベーグ可測なら，常に $m_L(Z) = 0$ となることとして定義する．任意の $A \subseteq {}^\omega\omega$ に対し A の極小被覆が存在する：任意の可測な $B \supseteq A$ で $m_L(B)$ が極小になるようなものをとればよい．実際には 0.9(b) により，B は G_δ としてとることができる．14.4 でのすべての $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合が可測であることの証明は ZF でできるので，27.7 も我々のここで基礎としている ZF で確立できることに注意して，次のような系が得られる：

27.8 系 $A \subseteq {}^\omega\omega$ で，$B \subseteq {}^\omega\omega$ を A の極小被覆とする．任意の $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ に対し，$G(B - A, \epsilon)$ が決定的なら，A はルベーグ可測となる．

証明 B の選び方から 各ゲーム $G(B - A, \epsilon)$ では II が必勝法を持っていなければならない．したがって，$\mathbf{\Pi}^0_2$ 集合 G で $m_L(G) = 0$ かつ $B - A \subseteq G$ となるものがとれる． ⊣

決定性の仮説

ポーランドで，無限ゲームに対する関心が再び高まってきたとき (Mycielski-Zieba [55], Mycielski-Swierczkowski-Zieba [56]) に，ミシェルスキーとシュタインハウス Mycielski-Steinhaus [62] は，現在では**決定性の公理** (Axiom of Determinacy) として知られている次のような公理を提唱している：

(AD)　　すべての実数の集合は決定的である．

(Steinhaus [65: 465]) ではこの公理がどのようにして定式化されたかが回想されている（彼はそこで “determinacy” という用語を用いているが，この分野の初期の論文では “determinatedness” という用語が用いられていた．1970 年代には “determinacy” が主流になっている）．AD の基礎理論は，間もなく Mycielski [64, 66] と Mycielski-Swierczkowski [64] で確立されている．

Mycielski [66] では，さらに次の仮説が考察されている：

($\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$)　　すべての $A \subseteq {}^{\omega}({}^{\omega}\omega)$ に対し，$G_{{}^{\omega}\omega}(A)$ は決定的である．

AD は $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ から直接に導き出せる．主な考察の対象は AD となるが，後の展開では $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ が適切な強さを持った仮説として浮上してくる．

正則性に関しては，上で考察したゲームはすべて $G_{\omega}(B)$ という形のゲームに帰着させることができる．例えば，$G^{**}_{\omega}(A)$ は，${}^{<\omega}\omega$ の帰納的な枚挙 $\langle \mathbf{s}_i \mid i \in \omega \rangle$ で，$\mathbf{s}_0 = \emptyset$ となるものを用いて，$B \subseteq {}^{\omega}(\omega - \{0\})$ を

$$x \in B \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{s}_{x(0)}{}^\frown\mathbf{s}_{x(1)}{}^\frown\mathbf{s}_{x(2)}{}^\frown \ldots \in A$$

と定義すると，I が $G^{**}_{\omega}(A)$ で必勝法を持つのは，I が $G_{\omega}(B)$ で必勝法を持つ，ちょうどそのときとなり，II についても同様である．これをまとめると次の結果になる：

27.9 定理　(Mycielski-Swierczkowski [64]; Mazur, Banach; Davis [64]) AD を仮定すると，すべての実数の集合はルベーグ可測で，ベールの性質と完全集合の性質を持つ．　⊣

これが AD の定式化の背景にあった主要動機であった．このように，AD は非可測集合などの AC の無制限な適用によって得られる “病的な” 集合の存在を許さないことで，AC と矛盾するものとなっているわけである．しかし AC を受け入れて，ミシェルスキーとシュタインハウスは Mycielski-Steinhaus [62: 2] で，彼等の公理について，それが良い性質を持つ部分モデルを導くものと考えることができる，書いている：

> 本論文では，集合のユニヴァースに対する基本的で ‘絶対的’ な直観を持つ古典的な数学（これには選択公理も属すわけであるが）に異議をはさむつもりはなく，その無矛盾性については問題が残るが，非常に興味深いものに思える別の理論を提示しているにすぎない．我々の公理は，古典的な集合の概念に制限を加え，より小さなユニヴァース —— つまり，（古典的な集合では満たされていなかったような，ある種の物理的な直観に対応する）決定的な集合からなるもの —— を導くものと考えることもできる（例えば，病的な球の分割は [AD] により除外される）．我々の公理は，[AD] と選択公理を除く古典的な公理を満たすような集合のクラスが存在するという形で古典的な集合論に付加されるものとして考えることもできる．

ミシェルスキーは Mycielski [64: 205] で内部モデルの存在に期待をかけている：“すべての集合のクラスの部分クラスで同じ要素関係を持つもの．このような部分モデルがすべての実数を含んでいるとしたら申し分ない．” ソロヴェイと竹内外史が指摘しているように，このようなものの自然な候補は，実数をすべて含む最小の内部モデル $L(\mathbb{R})$ である．もし AD が成り立つなら，$\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ も成り立つ：すべての必勝法は実数でコードできるから，したがって $L(\mathbb{R})$ に属し，$A \in L(\mathbb{R})$ として，ゲーム $G_\omega(A)$ の必勝法であるという性質は $L(\mathbb{R})$ に対し絶対的である．

1960 年代の終わりに，ソロヴェイは $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ が何らかの巨大基数の仮説のもとで成り立つ，という仮説を立てた（書かれたものでは，Solovay [69: 60] で超コンパクト基数が存在するなら $L(\mathbb{R})$ で実数の集合は完全集合の性質を持つ，という仮説が述べられている）．ZF + AD が ZFC を置き換えるものとなる，と広く信じられることはなく，1970 年代初期あたりからは，ZF + AD からの帰結は $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ を仮定したときに，$L(\mathbb{R})$ で成り立つもの，という風な見方をされることが多くなってきた．この妥協案は，ZFC を基礎となる理論として再認識する一方，ある種の最大原理により，正則性を持つ実数の集合の量を過激に増大させるもの，と見ることができる．

AD 自身は，§§12, 13 で述べた可算選択公理 $\mathrm{AC}_\omega({}^\omega\omega)$ を与える：

27.10 命題 (Swierczkowski, Mycielski [64], Scott). AD を仮定する．このとき $\mathrm{AC}_\omega({}^\omega\omega)$ が成り立つ．つまり，空でない実数の集合からなる任意の可算集合は選択関数を持つ．したがって，ω_1 は正則基数となる．

証明 $\{Z_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}({}^\omega\omega) - \{\emptyset\}$ とするとき，$A \subseteq {}^\omega\omega$ を，$x \in A \;\Leftrightarrow\; x_{II} \notin Z_{x(0)}$ により定義する．明らかに I は $G_\omega(A)$ で必勝法を持ちえない．そこで，τ を II の必勝法とすると，$f(n) = (\langle n, 0, 0, \ldots\rangle * \tau)_{II}$ で定義される 関数 $f\colon \omega \to {}^\omega\omega$ は求めている選択関数となる． ⊣

§§12, 13 で注意したように，これらの節の結果を得るには $\mathrm{AC}_\omega({}^\omega\omega)$ で十分であるから，これらは ZF + AD で結果の証明をしているときにはどんどん使ってかまわない．しかしながら，まもなく，AD の研究ではこれより強い DC を仮定することが慣習となってくる．DC は，整順性の無限下降列の非存在による特徴付けを用いなければならないような記述集合論での AD からの帰結の導出で必要となるからである．さらに，DC は 自然な AD の内部モデルである $L(\mathbb{R})$ に相対化できる (11.13).

§11 で述べたように，完全集合の性質による連続体仮説への実践論的アプローチを最初に試みたのはカントルであった．AD はすべての実数が完全集合の性質を持つことを帰結するから，$\aleph_0 < |X| < 2^{\aleph_0}$ となる集合 X が存在しないという意味で AD はこの計画を完成させたと言える（ここで，ZF の枠組での “基数” の間の $<$ は単射的な埋め込みの可能性によって定義される）．しかしながら，カントルが確立したいと思っていたのはこれより強い，$2^{\aleph_0} = \aleph_1$，つまり順序型が ω_1 の連続体の整列順序が何か存在する，であったことは強調しておく必要があるだろう．§11 で用いられた事実が最初に用いられたのは，AD のもとで，スペッカー Specker [57] による論法との組みわせによってであった：

27.11 命題　(Mycielski [64]).

(a) AD を仮定する．このとき，$\omega_1 \not\preceq 2^{\aleph_0}$ である，つまり，整列可能な実数の非可算集合は存在しない．

(b) Con(ZF + AD) なら，Con(ZFC + $\exists\kappa$(κ は到達不可能)) である．

証明　(a) は 11.4(b) から導かれ，(b) は (a) と，ω_1 が正則基数であること (27.10) と，11.6 の (c) → (a) から導かれる．　⊣

(b) は巨大基数との関係のうち最初に明らかになったものであった．AD を $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ の方向へ拡張しようとすると，ZF と矛盾するものとなってしまうことが，(a) から示せる：

27.12 演習　(Mycielski [64]). $A \subseteq {}^{\omega}\omega_1$ で $G_{\omega_1}(A)$ が決定的でないものが存在する．

ヒント　$A \subseteq {}^{\omega}\omega_1$ を，$x \in A \;\Leftrightarrow\; x(0) \geq \omega$ かつ x_{II} は $x(0) = \{\xi \mid \xi < x(0)\}$ の単射的な枚挙でない，により定義する．$G_{\omega_1}(A)$ が決定的であるとすると，ここで必勝法を持っているのは II でなければならない．この必勝法を τ とする．このとき，任意の $z \in {}^{\omega}\omega_1$ で $z(0) \geq \omega$ となるものに対し，$\{\langle m, n\rangle \mid z * \tau(2m+1) < z * \tau(2n+1)\}$ は $z(0)$ の順序型を持つ整列順序となる．したがって，単射 $\omega_1 \to {}^{\omega}\omega$ が τ から定義可能となり，27.11(a) により AD は成り立たない．　⊣

この証明は $G_{\omega_1}(A)$ が決定的でないような $A \subseteq {}^{\omega}\omega_1$ を与えない，しかも，奇妙なことに，これは可能でないかもしれないのである（Harrington-Kechris [81: 133-134] を参照）．

全面的な AD は AC と衝突してしまい，問題のある状況も生じるのだが，ZFC の文脈での自然なアプローチは，決定性を単に実数の集合のもう一つの正則性と見なすことであり —— 27.9 の局所的なバージョンにより，これは他のものを包含するものとなる —— その可能な範囲を研究することである．

(Det(Λ))　　Λ に含まれるすべての実数の集合は決定的である．

を考えてみる．したがって，AD は $\mathrm{Det}(\mathcal{P}({}^{\omega}\omega))$ となり，絶対性から，$\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ は $\mathrm{Det}(L(\mathbb{R}))$ となる．$\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_n)$ は $\mathbf{\Pi}^1_n$ **決定性**とよばれている，等々．ここで中心的なものとなる仮説は**射影的決定性** (Projective Determinacy) である：

(PD)　　$\mathrm{Det}(\bigcup_{n\in\omega}\mathbf{\Pi}^1_n)$.

PD からの帰結については§29 で詳しく分析する．また**ボレル決定性**については 31.2 の後で議論する．27.11(b) により，$\mathbf{\Pi}^1_1$ 決定性が ZF 上の超越性を持つことは間もなく分かっている：

27.13 演習　($\mathrm{AC}_\omega({}^{\omega}\omega)$). $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_1)$ から $\forall a \in {}^{\omega}\omega$($\omega_1$ は $L[a]$ で到達不可能) が帰結される．

ヒント　11.5 により，すべての $a \in {}^{\omega}\omega$ に対し，$\omega_1^{L[a]} < \omega_1$ となることを示せば十分である．ところが，$\omega_1^{L[a]} = \omega_1$ なら，13.12 をここに相対化したものにより，完全集合の性質を持たない $\Pi^1_1(a)$ 集合 A が存在する．ここで $G^*_2(\Psi``A)$ が適当な実数の $\Pi^1_1(a)$ 集合 B によって $G_\omega(B)$ と表せることを確かめて 27.6 を適用すればよい．　⊣

決定性の概念が確立され，その基本的な帰結と関係が明らかにされたところで，1967 年に本節の初めに述べた二つの画期的な結果が現れたのであった．ブラックウェルの結果 Blackwell [67] は§29 で述べる展開の出発点となった．もう一つの方の結果からの発展は次の節以降で論じる．しかし，この節を終える前に，関連したもう少し後の結果をいくつか挿入しておく．次のコメントがそれらの対旋律となる．

27.9 の一つの局所的なバージョンは，Det($\mathbf{\Pi}^1_n$) なら，**すべての実数の $\mathbf{\Pi}^1_n$ 集合はルベーグ可測で，ベールの性質と完全集合の性質を持つ**，である．予期されるように，これを示すには，$n > 0$ に対し，任意の実数の $\mathbf{\Pi}^1_n$ 集合 A で，対応する A の正則性が，ある実数の $\mathbf{\Pi}^1_n$ 集合 B によって $G_\omega(B)$ の決定性の形に帰着できることを確かめればよい．

実は，“押し広げ” と呼ばれるソロヴェイによる簡単なゲームの変形の方法を用いると，もっと強い結論が導けることが，1970 年代の初めに気付かれている：

27.14 演習 ($\mathrm{AC}_\omega({}^\omega\omega)$)(Kechris, Martin). Det($\mathbf{\Pi}^1_n$) とする．このとき，すべての実数の $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ 集合はルベーグ可測で，ベールの性質と完全集合の性質を持つ．

ヒント $A \subseteq {}^\omega\omega$ が $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ 集合だとする．A がベールの性質を持つことを示すためには，ソロヴェイの押し広げのアイデアを次のように用いればよい：

O_A を 27.4 でのような開集合として，$B = A - O_A$ とおく．$C \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ を $\mathbf{\Pi}^1_n$ 集合で $B = pC$ となるものとする．$G^{**}_\omega(B)$ の押し広げ版は次のようなものとなる：

$$\begin{array}{lllll} I: & \langle y(0), s_0\rangle & & \langle y(1), s_2\rangle & \ldots \\ II: & & s_1 & & s_3 \quad \ldots \end{array}$$

$G^{**}_\omega(B)$ でと同じように，I と II は ${}^{<\omega}\omega - \{\emptyset\}$ の元 s_i を選んでゆくが，I はそれに加えて $y(i) \in \omega$ を選ぶ．x を連結 $s_0{}^\frown s_1{}^\frown s_2{}^\frown \ldots$, $y \in {}^\omega\omega$ を I の自然数の選択の結果として，I が勝つのは，$\langle x, y\rangle \in C$ となるときとし，そうでないときには II の勝ちとする．C は $\mathbf{\Pi}^1_n$ だから，この押し広げられたゲームは，ある実数の $\mathbf{\Pi}^1_n$ 集合に対する $G_\omega(D)$ という形のものとして捉え直すことができる．したがって仮定によりこのゲームは決定的である．

まず II が必勝法 τ を持つとしてみる．このときには，27.3(a) でと同じように議論すると B が疎集合であることが示せる：I の選んだ自然数を忘れて，開稠密集合 D_p を前と同じように定義し，$x \in \bigcap_p D_p$ なら $x \notin B$ となることを示せばよい．(もし反対に $x \in B$ となっていたとすると，$y \in {}^\omega\omega$ で $\langle x, y\rangle \in C$ となるものがある．ところがこのときには，τ によるプレイで，$y(i)$ は I の自然数の手で，x はこのプレイでの有限列の連結となっているようなものを帰納的に定義できるから，τ が必勝法であることに矛盾する)．

次に I が必勝法 σ を持つとしてみる．このときには，I はもともとのゲーム $G^{**}_\omega(B)$ でも必勝法を持つ：彼は 単に $y(i)$ を秘密にして $s(2i)$ だけをプレイすればよい．したがって，27.3(b) により，ある $s \in {}^{<\omega}\omega$ に対し $O(s) - B$ は疎集合になる．

ここで，27.4 での議論により，A がベールの性質のを持つことを帰結すればよい．

完全集合の性質には，ゲーム $G^*_2(\Psi``A)$ の押し広げ版で，I はもとの手に加えて $y(i)$ を選んでゆくようなものを用いて，同様の議論をすればよい（27.5 と 27.6 を参照）．ここで

結果として得られる"証人" y は $\Psi\colon {}^\omega\omega \to {}^\omega 2$ を最初に適用するかどうかで，${}^\omega 2$ の元となるようにとるか，あるいはもっと簡単に ${}^\omega\omega$ の元となるようにとるかのどちらかである．

最後に，次のようにして補集合 $\tilde{A} = {}^\omega\omega - A$ のルベーグ可測性が確立できる：27.8の前でのように B を $\tilde{A}$ の G_δ 極小被覆として，有理数 $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ に対し，$G(B - \tilde{A}, \epsilon)$ の押し広げ版で，I はもとの手に加えて $y(i)$ を選んでゆくようなものを考えればよい（26.7と26.8を参照）．A でなく $\tilde{A}$ を扱っていることから，このゲームは，ある実数の $\mathbf{\Pi}^1_n$ 集合 D に対する $G_\omega(D)$ の形にとらえなおすことができる．前と同様に，ここで結果として得られる"証人" y は ${}^\omega 2$ の元，あるいは ${}^\omega\omega$ の元となるようにとることができる． ⊣

これの素敵な応用として，$n = 0$ の場合に閉集合ゲームの決定性を用いると，解析集合が正則性を持つことの新しい証明が得られることに注意する．

次の一連の考察は，より強い仮説でADの後に未踏峰としてそそり立つ $\mathrm{AD}_\mathbb{R}$ に関するものである．27.10と同じように，$\mathrm{AD}_\mathbb{R}$ から，すべての ${}^\omega\omega$ で添数付けされた空でない実数の集合の族は選択関数を持つことが導ける：

27.15 演習　$\mathrm{AD}_\mathbb{R}$ を仮定する．このとき，すべての ${}^2({}^\omega\omega)$ の部分集合は単層化できる．

ヒント　$A \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ として，I が実数 x を選び，II が勝つのは，彼が次の手で選んだ実数 y により $\langle x, y\rangle \in A$ となるときとする，という2手からなるゲームを考える．$\mathrm{AD}_\mathbb{R}$ から II はこのゲームで必勝法を持たなければならないが，そのような必勝法が単層化を与える． ⊣

これに対し，ADでとは異なり，$\mathrm{AD}_\mathbb{R}$ は 自然な内部モデルとしての $L(\mathbb{R})$ に相対化できないことを示している次の制約が，対角化の論法により得られる．

27.16 命題　(Solovay [78a: 176])．$V = L(\mathbb{R})$ を仮定し，実数の全体が整列できないとする．このとき，${}^2({}^\omega\omega)$ の部分集合で単層化されないものが存在する．

証明　任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，$\mathrm{OD}(x)$ で $\mathrm{On} \cup \{x\}$ の元をパラメタとして用いて定義可能な集合のクラスを表すことにする．よく知られた，順序数定義可能な集合のクラスODと同じように，$\mathrm{OD}(x)$ は定義可能な整列順序を持ち，二項関係「$y \in \mathrm{OD}(x)$」はZFでの反映の原理により定義可能である．$A \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ を

$$\langle x, y\rangle \in A \ \leftrightarrow y \notin \mathrm{OD}(x)$$

で定義する．仮定により，実数の全体は整列できないから，$\forall x \exists y(\langle x, y\rangle \in A)$ が成り立つ．

ここで逆に $B \subseteq A$ で A を単層化するものが存在すると仮定してみる．仮定により $V = L(\mathbb{R})$ で，定義可能な上射 $\mathrm{On} \times {}^\omega\omega \to L(\mathbb{R})$ が存在するから（11.13の証明を参照），ある $x_0 \in {}^\omega\omega$ に対し，$B \in \mathrm{OD}(x_0)$ となる．ところが，このとき，$B(x_0, y_0)$ となるように一意に決まる y_0 は $\mathrm{OD}(x_0)$ の元となってしまい，矛盾である． ⊣

任意の $S \subseteq {}^\omega\omega$ に対し，$x \in {}^\omega\omega$ で同様の概 $\mathrm{OD}(S \cup \{x\})$ を考え，$\{y \in {}^\omega\omega \mid y \in \mathrm{OD}(S \cup \{x\})\}$ が整列可能であることに留意すると，27.16は $L(\mathbb{R} \cup \{S\})$ に対して拡張できることが分かる．このことから次が導かれる：

27.17 命題 (Solovay [78a: 177]). $AD_{\mathbb{R}}$ を仮定する．このとき，任意の $S \subseteq {}^{\omega}\omega$ に対し，$V \neq L(\mathbb{R} \cup \{S\})$ である． ⊣

ソロヴェイ Solovay [78a] はさらに実数の集合に対するシャープを定式化して，$AD_{\mathbb{R}}$ から，任意のそれらの集合に対するシャープの存在が帰結できることが示されている．AD での状況と対照的に，すべての実数を含む $AD_{\mathbb{R}}$ の自然な内部モデルが存在するかどうかは長く不明であった．この問題は，最後の節で触れるように（32.19 を参照）1980 年代になってから解決されている．

最後に§11 の終わりで論じたラムズィーの性質に関する注意を述べる；ここでは，§11 の $\mathcal{P}(\omega)$ による文脈を ${}^{\omega}\omega$ に移行して考える．ラムズィーの性質を持つことも実数の集合の正則性と見なすことができる．他の正則性の同じように，ソロヴェイのモデルではすべての実数の集合はラムズィーの性質を持つ (11.5) が，射影的階層の初めの方のレヴェルでの進歩がみられた：Galvin-Prikry [73] ではすべてのボレル集合がラムズィーの性質を持つことが示され，Silver [70a] ではすべての解析集合がラムズィーの性質を持つことが示されている．さらに，もし可測基数が存在するなら，すべての $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合はラムズィーの性質を持つことも示されている．エレントゥック Erik Ellentuck [74] はこれらの結果の証明を使って，マサイアス強制に基づく位相を用い，実数の集合がラムズィーの性質を持つのは，それが（ある同一視をすることにより）この位相でベールの性質のを持つことと同値になる，ということを指摘している．Prikry [76] では，決定性との関連が初めて現れていて，そこでは実数の手による対応する **-ゲーム (27.3) の決定性を用いて，$AD_{\mathbb{R}}$ **を仮定すると，すべての実数の集合がラムズィーの性質を持つことが帰結される**ことが示されている（カスタナス Ilias Kastanas [83] もこれに関連した結果を得ている）．後の展開からの帰結としては，PD **からすべての実数の射影的集合がラムズィーの性質を持つ** (Harrington-Kechris [81]) ことや，AD と $V = L(\mathbb{R})$ **からすべての実数の集合がラムズィーの性質を持つ** (Martin-Steel [83]) ことが示されている．しかしながら，ここで自然に対応するのは実数の手を持つゲームであるため，次の問題が未解決のまま残っている：

27.18 未解決問題 AD からすべての実数の集合がラムズィーの性質を持つことが帰結できるか？

§28 ADと組合せ論

ソロヴェイは 1967 年に，巨大基数での直観やテクニックや結果を AC なしの新しい環境に投入することで，ω_1 が可測基数となることが AD から帰結されることを明らかにした．AD が超限に対して及ぼす影響はまったく予想外で，巨大基数と関連した帰結の可能性は実に魅力的であった．他の研究者はすぐにこの方向の研究に参加してきたが，特にマルティンはここで広域的な組合せ論的研究に発展してゆくものの第一波において，鋭い貢献をしている．本節では，多様な可能性を持つ様々なゲームのパラダイムの豊饒さに焦点をあてて，この展開を追ってみる．§27 と同じように，

この節でも前提となる理論は ZF とする．

ここで問題とするのは AD からの直接の帰結だが，これらの帰結は，ZFC で $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ を仮定するときに $L(\mathbb{R})$ で成り立っていることである，という視点からの見方が強くなってきていることを，ここでも注意しておく．

次は，超フィルターに関して初期に指摘された事実の一つであった．

28.1 命題　AD を仮定する．このとき，ω 上に（非単項）超フィルターは存在しない．したがって，すべての超フィルターは ω_1-完備となる．

証明　逆に ω 上に超フィルター U が存在すると仮定してみる．ここで各プレイヤーが $[\omega]^{<\omega}$ の元をとるようなゲームを考える：

$$\begin{array}{llllll} I: & s_0 & & s_2 & & \ldots \\ II: & & s_1 & & s_3 & \ldots \end{array}$$

手 s_n が $\bigcup_{i<n} s_i$ と素でないなら，そのような手を最初に打ったプレイヤーが負けとする．これが起こらないときには，$\bigcup_{i\in\omega} s_{2i} \in U$ なら I の勝ち，そうでなければ II の勝ちとする．どちらのプレイヤーの必勝法も他のプレイヤーの必勝法に変換できることを示して矛盾を導く：

まず，σ が I の必勝法であるとしてみる．II の戦略 τ_σ を，$\tau_\sigma(\langle s_0\rangle) = \sigma(\emptyset)$, $0 < i \in \omega$ に対しては，

$$\tau_\sigma(\langle s_0, \ldots, s_{2i}\rangle) = \sigma(\langle s_1, \ldots, s_{2i}\rangle) - s_0$$

として定義する．つまり，最初の手 s_0 を無視して，σ によってプレイを進め，手が互いに素になるように s_0 を取り去る．τ_σ による任意のプレイ $\langle s_0, s_1, s_2, \ldots\rangle$ に対し，σ が I の必勝法であることから，$s_0 \cup \bigcup_{i\in\omega} s_{2i+1} \in U$ が成り立つ．したがって，U が非単項な超フィルターであるという前提から，$\bigcup_{i\in\omega} s_{2i+1} \in U$ となる．よって，U がフィルターであることから τ_σ が II の必勝法であることが帰結できて，この場合での矛盾が得られる．

次に，τ が II の必勝法であると仮定してみる．まず τ を

$$\overline{\tau}(\langle s_0, \ldots, s_{2i}\rangle) = \begin{cases} \tau(\langle s_0, \ldots, s_{2i}\rangle) \cup \{i\} & i \notin \bigcup_{j\le 2i} s_j \text{ のとき} \\ \tau(\langle s_0, \ldots, s_{2i}\rangle) & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

として II の別の戦略 $\overline{\tau}$ に変形する．このとき，$\overline{\tau}$ もまた II の必勝法となっており，さらに，$\overline{\tau}$ による任意のプレイ $\langle s_0, s_1, s_2 \ldots\rangle$ で，$\bigcup_{i\in\omega} s_i = \omega$ となり，U は超フィルターだから，$\bigcup_{i\in\omega} s_{2i+1} \in U$ である．

ここで I の戦略 σ_τ を

$$\sigma_\tau(\langle s_0, \ldots, s_{2i-1}\rangle) = \overline{\tau}(\langle \emptyset, s_0, \ldots, s_{2i-1}\rangle)$$

として定義する．つまり，I は最初の手で $\emptyset$ をとり，それから先は $\overline{\tau}$ によってプレイする．このとき，前と同じような議論によって σ_τ は I の必勝法となっていることが示せるが，これはこの場合でも矛盾が生じることを示している．

二番目の主張については，W が集合 S 上の ω_1-完備でない超フィルターだったとすると，関数 $f\colon S \to \omega$ で，

$$f_*(W) = \{X \subseteq \omega \mid f^{-1}(X) \in W\}$$

が ω 上の（非単項）超フィルターとなってしまうものがとれることからよい． $\dashv$

より間接的ではあるが，この結果は，27.9 と Sierpiński [38] での，ω 上の超フィルターは実数の集合として見たときにルベーグ可測でない，という結果から導くこともできる．もちろん ω_1-完備性は AD において超フィルターがそもそも存在する場合に初めて意味を持つわけであるが，これはソロヴェイにより確立されている：

28.2 定理 (Solovay). AD を仮定する．このとき ω_1 は可測基数となる．

可測基数は，それの例証となっている超フィルターの完備性により ZF で正則基数となる．それが到達不可能となること（およびより多くのこと）は AC で巾集合の枚挙可能性から得られる．しかしながら，AC の欠如は無矛盾性の強さに対しては影響を及ぼさない．「ZF + ω_1 は可測基数」は「ZFC + $\exists\kappa(\kappa$ は可測基数$)$」と無矛盾等価になる：イェヒ Jech [68], レヴィと竹内 Takeuti [70] は独立に ZFC で可測基数を ω_1 に崩壊するとき，これによって得られる拡張の内部モデルで，ω_1 が可測基数となることを注意している．逆に ZF で U がある $\kappa > \omega$ に対し κ-完備超フィルターとなるなら，$L[U] \models$「ZFC + κ は可測基数」となる．さらに，任意の $a \in {}^\omega\omega$ に対し，$L[U,a] \models$「ZFC + κ は可測基数」が成り立つ．ここに $L[U,a]$ は U と a に対応する述語記号を用いて定義される，$U \cap M \in M$ かつ $a \in M$ となるような最小の内部モデルである．したがって —— 実は AC は§9 では必要でないのであるが —— いずれにしても $a^\#$ の理論を展開するために ZFC の文脈を用いることができて，その絶対性の性質（14.12(a) を参照）がその実質を保証することになる．

次は，AD の無矛盾性の強さに関する，27.11(b) の初期における拡張であった．

28.3 系

(a) Con(ZF+ AD) なら Con(ZFC+ $\exists\kappa(\kappa$ は可測基数$)$) となる．

(b) AD を仮定する．このとき，$\forall a \in {}^\omega\omega(a^\#$ が存在する$)$ が成り立つ． $\dashv$

ω_1 の可測性は ZF での直接の帰結も持つ．例えば，ω_1-アロンシャイン木が存在しないこと（7.8, 7.10 を参照）などがそれである．

まずもともとの証明から初めて，ソロヴェイの定理の二つの証明を与えるが，これは両方とも後に続く仕事にパラダイムを与えることになるものであった．

28.2 の最初の証明 ソロヴェイは，各プレイヤーが整列順序のコードを手としてとるようなゲームを考案して，$\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ 集合での有界性の議論を用いることにより，AD のもとで ω_1 上の閉非有界フィルター $\mathcal{C}_{\omega_1}$ が超フィルターとなることを示している．28.1 により，このことから ω_1 の可測性が帰結される．

ソロヴェイの証明のアイデアを明らかにするために $Y \subseteq \omega_1$ に対し，二人のプレイヤーが可算順序数をとるようなゲームを考えてみる：

$$\begin{array}{llllll} I: & \xi_0 & & \xi_2 & & \cdots \\ II: & & \xi_1 & & \xi_3 & \cdots \end{array}$$

ここに I が勝つのは $(\sup\{\xi_i \mid i \in \omega\}) \in Y$ となるときで，そうでないなら II の勝ちとする．I が必勝法 σ を持っていれば $Y \in \mathcal{C}_{\omega_1}$ となることを以下で示す（この議論から，もし II が必勝法を持っていれば $\omega_1 - Y \in \mathcal{C}_{\omega_1}$ となることも分かる）：

ω_1 は正則基数 (27.10) だから，各 $\eta < \omega_1$ に対し，$w(\eta) < \omega_1$ を $\sigma|^{<\omega}\eta \subseteq w(\eta)$ となるような最小のものとする．つまり，任意の有限部分プレイで，そこでの手がすべて（II の手がすべて，といっても同値になるが）η より小さくなっているようなものに対し，σ による戦略的応答が，それより小さくなるようなもののうち最小のものである．このとき，

$$C = \{\rho < \omega_1 \mid \rho \text{ は無限極限順序数 } \wedge \ \forall \eta < \rho (w(\eta) < \rho)\}$$

とすると，これは ω_1 で閉非有界となる．また $C \subseteq Y$ である：$\rho \in C$ とするとき，$\{\eta_i \mid i \in \omega\} \subseteq \rho$ を ρ で非有界となるようにとる．このときプレイ $\sigma * \langle \eta_i \mid i \in \omega \rangle$ では，各々の手は ρ より小さくなり，σ は必勝法だったから $\rho \in Y$ となることが分かるからである．

ソロヴェイのアイデアは，このゲームを AD が適用できるような形のゲームでまねる，ということであった．$Y \subseteq \omega_1$ に対し，各プレイヤーは自然数をとる次のようなゲームを考える：

$$\begin{array}{llllll} I \ : & x(0) & & x(2) & & \ldots \\ II : & & x(1) & & x(3) & \ldots \end{array}$$

§13 で，各 $y \in {}^{\omega}\omega$ は列 $\langle (y)_i \mid i \in \omega \rangle \in {}^{\omega}({}^{\omega}\omega)$ をコードし，各 $z \in {}^{\omega}\omega$ は関係 $E_z \subseteq \omega \times \omega$ をコードしていたことを思い出そう．このコードされた関係が整列順序のとき，$\|z\|$ でその順序型を表したのだった．ここで，I は関係の列 $\langle E_{(x_I)_i} \mid i \in \omega \rangle$ を決定してゆくと見なし，II は $\langle E_{(x_{II})_i} \mid i \in \omega \rangle$ を決定してゆくと見なす．まず，ある $i \in \omega$ に対し，$E_{(x_I)_i}$ か $E_{(x_{II})_i}$ のどちらかが整列順序でない場合を考える；このときには，そのような最小の i で，$E_{(x_I)_i}$ が整列順序でないなら II の勝ち，そうでなければ I の勝ち，とする．これが起こらないときには，

$$\sup(\{\|(x_I)_i\| \mid i \in \omega\} \cup \{\|(x_{II})_i\| \mid i \in \omega\}) \in Y$$

のとき I の勝ち，そうでなければ II の勝ちとする．

このゲームは，ある $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ に対する $G_{\omega}(A)$ と見なせるから，決定的である．ここで前と同じように議論して，I が必勝法を持つなら，$Y \in \mathcal{C}_{\omega_1}$ となる（またこの議論により II が必勝法を持つなら $\omega_1 - Y \in \mathcal{C}_{\omega_1}$ となる）ことを示し，これにより，$\mathcal{C}_{\omega_1}$ が超フィルターとなっていることを確認して証明を終える．

前の議論を吟味すると，次のような意味での有界性が得られれば十分であることが分かる：各 $\eta < \omega_1$ に対し，$\beta < \omega_1$ で次の性質を持つものがとれる：すべての $n \in \omega$ と $y \in {}^{\omega}\omega$ に対し，もしどの $i < n$ に対しても $E_{(y)_i} (= E_{((\sigma * y)_{II})_i})$ が整列順序で，$\|(y)_i\| < \eta$ となっているなら，$E_{((\sigma * y)_I)_n}$ も整列順序で $\|((\sigma * y)_I)_n\| < \beta$ となる．そこで，$\eta \in \omega_1$ として，

$$\begin{aligned} A_\eta = \{((\sigma * y)_I)_n \mid n \in \omega \ \wedge \ y \in {}^{\omega}\omega \ \wedge \\ \forall i < n (E_{(y)_i} \text{ は整列順序で } \|(y)_i\| < \eta)\} \end{aligned}$$

とする．このとき，A_η は η への埋め込み可能性により定義することができるから，η をコードする実数上の $\mathbf{\Sigma}^1_1$ となる（13.4の二番目の証明を参照）．さらに，σ が必勝法であることから，$A_\eta \subseteq \mathrm{WF}$ となるので，13.6により，ある $\beta < \omega_1$ に対し，$A_\eta \subseteq \mathrm{WF}_\beta$ となる．したがって，求めたいような β が得られた．$w(\eta)$ をそのような β のうち最小のものとして，関数 $w\colon \omega_1 \to \omega_1$ を定義し，前のように議論すれば証明が完了する．　$\dashv$

ここで，また以下でも，ZFでADから $\mathrm{AC}_\omega({}^\omega\omega)$ が帰結でき(27.10), §13での結果にはこれで十分である，ということを再び注意しておく．$\mathcal{C}_{\omega_1}$ は ω_1 の可測性の例証となっている，という命題自身が強い仮説であることが分かってきている．1970年代の半ばに，マルティンとミッチェル（Martin-Mitchell [79] を参照）は21.25でのクーネンの手法を応用して，この仮説から，すべての λ に対し，λ 個の可測基数を持つZFCの内部モデルの存在が帰結できることを示している．1980年代の初期には，この仮説はこれより更に強いものであることが判明している（第II巻の Radin Forcing の項を参照）．

マルティンは，新しいアイデアによりソロヴェイの定理の別証明を与えているが，このアイデアはそれ自身として重要なものである．ソロヴェイと同様にマルティンも記述集合論だけでなく（§§29, 30を参照）この分野でも決定的な貢献をしており，特に決定性の仮説の無矛盾性の解明においては，その確立に向けての研究をリードしてゆくことになる（§31を参照）．まずいくつかの良く知られた概念と表記法を確認しておく：$a, b \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$a \leq_{\mathrm{T}} b \quad \Leftrightarrow \quad a \text{ は } b \text{ に関し帰納的},$$
$$a \equiv_{\mathrm{T}} b \quad \Leftrightarrow \quad a \leq_{\mathrm{T}} b \ \wedge \ b \leq_{\mathrm{T}} a,$$
$$[a]_{\mathrm{T}} = \{c \in {}^\omega\omega \mid c \equiv_{\mathrm{T}} a\}$$

とする．$\leq_{\mathrm{T}}$ は良く知られた**チューリング還元可能性**の関係であり，$\equiv_{\mathrm{T}}$ は**チューリング同値**の関係で，$[a]_{\mathrm{T}}$ はその同値類で，**チューリング度**とよばれる．$\leq_{\mathrm{T}}$ に関し，すべての $a \in {}^\omega\omega$ は可算個の前の元を持つ；考察すべき§12の意味での論理式は可算個しかないからである．$\mathcal{D}_{\mathrm{T}}$ をこのようなチューリング度の全体の集合とする：

$$\mathcal{D}_{\mathrm{T}} = \{[a]_{\mathrm{T}} \mid a \in {}^\omega\omega\}.$$

$\leq_{\mathrm{T}}$ は

$$d_0 \leq d_1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \exists b (d_0 = [a]_{\mathrm{T}} \wedge d_1 = [b]_{\mathrm{T}} \wedge a \leq_{\mathrm{T}} b)$$

でうまく定義できる $\mathcal{D}_{\mathrm{T}}$ 上の順序に持ち上げられる．

マルティンはチューリング度の‘錘’の全体から生成されるフィルター M_{T} を考察している：

$$X \in M_{\mathrm{T}} \quad \Leftrightarrow \quad \exists d_0 \in \mathcal{D}_{\mathrm{T}}(\{d \in \mathcal{D}_{\mathrm{T}} \mid d_0 \leq d\} \subseteq X).$$

任意の $a, b \in {}^\omega\omega$ に対し，$c \in {}^\omega\omega$ で $a \leq_{\mathrm{T}} c$ かつ $b \leq_{\mathrm{T}} c$ となるものは常に存在するから，M_{T} が実際にフィルターとなることは容易に分かる．これを一般化すると，AC_ω から M_{T} が ω_1-完備となることが帰結できることが分かる．他方ACから M_{T} が超フィルターでないことも導ける（11.4(a)の証明を参照．ここで，すべてのチューリング度は可算

集合であることに注意する）．

28.4 命題 (Martin [68]). AD を仮定する．このとき M_{T} は超フィルターとなる．

証明 $X \subseteq \mathcal{D}_{\mathrm{T}}$ として，ゲーム $G_\omega(\cup X)$ を考える．まず I がこのゲームで必勝法 σ を持つと仮定してみる．σ を（${}^{<\omega}\omega$ の帰納的なコーディングにより）${}^{\omega}\omega$ の元とみて，$d_0 = [\sigma]_{\mathrm{T}}$ とする．このとき $d_0 \leq d$ となる任意の $d \in \mathcal{D}_{\mathrm{T}}$ と $y \in d$ に対し，明らかに $\sigma * y \in d$ が成り立つから，$d \in X$ である．したがって，$\{d \in \mathcal{D}_{\mathrm{T}} \mid [\sigma]_{\mathrm{T}} \leq d\} \subseteq \mathcal{D}_{\mathrm{T}}$ となる．同様の議論により，II が必勝法 τ を持つなら，$\{d \in \mathcal{D}_{\mathrm{T}} \mid [\tau]_{\mathrm{T}} \leq d\} \subseteq \mathcal{D}_{\mathrm{T}} - X$ となることも分かる． ⊣

AD のもとでは，M_{T} が超フィルターであることから，28.1 によりすでに，これが ω_1-完備であることが帰結できる．

28.2 の二番目の証明　$a, b \in {}^{\omega}\omega$ で $a \equiv_{\mathrm{T}} b$ のとき，$\omega_1^{L[a]} = \omega_1^{L[b]}$ で，これは可算順序数となる (27.13). したがって

$$f([a]_{\mathrm{T}}) = \omega_1^{L[a]}$$

で $f\colon \mathcal{D}_{\mathrm{T}} \to \omega_1$ がうまく定義できる．ここで，28.4 により，

$$f_*(M_{\mathrm{T}}) = \{X \subseteq \omega_1 \mid f^{-1}(X) \in M_{\mathrm{T}}\}$$

は ω_1 上の ω_1-完備超フィルターとなる（これが非単項であることを確かめるには，任意の $\alpha < \omega_1$ と $f(a) = \alpha$ となる $a \in {}^{\omega}\omega$ に対し，$a \leq_{\mathrm{T}} b$ となる $b \in {}^{\omega}\omega$ で $\alpha < \omega_1^{L[b]}$ となるものがとれるから，$f^{-1}(\{\alpha\}) \notin M_{\mathrm{T}}$ が成り立つことに注意すればよい）． ⊣

このような f で $f_*(M_{\mathrm{T}}) = \mathcal{C}_{\omega_1}$ となるようなものは存在する；28.20 の証明はこの方向の一般的な結果を与えている．

ソロヴェイはこの間に，**ソロヴェイ・ゲーム**として知られるようになるものを用いて，後の仕事で重要となる構造定理を確立している．このゲームでは，プレイヤーは再び可算順序数をコードするような手を打つが，その規則から I は必勝法を持ちえないものとなっている．

28.5 定理 (Solovay). AD を仮定し，$Y \subseteq \omega_1$ とする．このとき，$a \in {}^{\omega}\omega$ で $Y \in L[a]$ となるものが存在する．

証明 二人のプレイヤーが自然数の手を打つようなゲームを考える：

I :	$x(0)$		$x(2)$		...
II :		$x(1)$		$x(3)$	...

今度のルールは E_{x_I} が整列順序でないか，あるいは，$E_{(x_{II})_i}$ がすべての $i \in {}^{\omega}\omega$ に対し整列順序で，ある $\beta > \|x_I\|$ に対し，$\{\|(x_{II})_i\| \mid i \in \omega\} = Y \cap \beta$ となるとき II の勝ち，そうでなければ I の勝ちとする．

ソロヴェイの前の証明でと同じような有界性の議論により，まず I が必勝法を持ち得ないことを確立する：σ が I の必勝法だったとすると，$\{(\sigma * y)_I \mid y \in {}^{\omega}\omega\}$ は WF の $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 部分

集合となる．したがって，$\beta < \omega_1$ で，すべての $y \in {}^\omega\omega$ に対し $\|(\sigma * y)_I\| < \beta$ となるものがある．よって，すべての $i \in \omega$ に対し $E_{(y)_i}$ が整列順序となり，$\{\|(y)_i\| \mid i \in \omega\} = Y \cap \beta$ となるような 任意の $y \in {}^\omega\omega$ に対し，$\sigma * y$ は II の勝つプレイとなっているが，これは矛盾である．

したがって，II が必勝法を持たなければならないから，これを τ とする．(τ を実数と見なして) $Y \in L[\tau]$ であることが示せれば証明が完了する：まず論理式 $\varphi(v_0, v_1)$ で E_z が整列順序となるような任意の $z \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$\|z\| \in Y \quad \Leftrightarrow \quad \varphi[z, \tau]$$

となるものが容易に作れることに注意する．τ は必勝法だから，φ は $i \in \omega$ と，$\langle \omega, E_z \rangle$ と $\langle \omega, E_{((z*\tau)_{II})_i} \rangle$ の間の同型写像をコードする実数が存在することを主張するものとしてとることができる．ここで ${\omega_1}^{L[\tau]} = \omega_1$ なら，このような φ による定義可能性と絶対性から $Y \in L[\tau]$ が帰結できるのであるが，27.13 により ω_1 は $L[\tau]$ で到達不可能である．しかしここで強制法の論法を用いることができる：

各 $\xi < \omega_1$ に対し，P_ξ を ω から ξ への上射を有限の条件の集合により付加するような p.o. として，$\dot{z}_\xi$ を，P_ξ による任意の generic 拡大で E_z が順序型 ξ を持つような $z \in {}^\omega\omega$ の P_ξ-名称で，ξ に関して一様に定義されているものとする．このとき，上のような φ に対し，

$$\xi \in Y \quad \Leftrightarrow \quad L[\tau] \models (\Vdash_{P_\xi} \varphi(\dot{z}_\xi, \check{\tau}))$$

となる．右から左の方向を見るには，$L[\tau]$ で ω_1 が到達不可能であることから，$\mathcal{P}(P_\xi) \cap L[\tau]$ は可算だから，$L[\tau]$ 上 P_ξ-generic な実数が存在することに注意すればよい．このことの定義可能性（および ZF での反映の原理）により，$Y \in L[\tau]$ であることが分かる． ⊣

Kechris [88b] には上のようにして実数から構成できる ω_1 の部分集合に関する最近の結果が書かれている．

ソロヴェイは，1968 年に 28.4 でのマルティンの結果からアイデアを得て，次の結果を証明し，ゲームの賭け金を引き上げている．

28.6 定理 (Solovay). AD を仮定する．このとき，ω_2 は可測基数である．

証明 議論は 28.2 の二番目の証明でのように始めて，この後 28.5 でのような様相のものになる．$a \equiv_{\mathrm{T}} b$ となる $a, b \in {}^\omega\omega$ に対し，$(\omega_1)^{+L[a]} = (\omega_1)^{+L[b]}$ である．つまり，$L[a]$ と $L[b]$ での（本物の）ω_1 の次の基数は等しくなる．またこの順序数はシャープの存在から（本物の）ω_2 より小さいものとなる．したがって，

$$f([a]_{\mathrm{T}}) = (\omega_1)^{+L[a]}$$

によって $f \colon \mathcal{D}_{\mathrm{T}} \to \omega_2$ がうまく定義できる．28.4 を用いると，

$$f_*(M_{\mathrm{T}}) = \{X \subseteq \omega_2 \mid f^{-1}(X) \in M_{\mathrm{T}}\}$$

が ω_2 上の ω_1-完備超フィルターとなることが分かる（これが非単項であることを確かめるには，任意の $a \in {}^\omega\omega$ に対し，すべての $\alpha < \omega_2$ で，$p \colon \alpha \to \omega_1$ が上射のとき，

28.5 により，$b \in {}^\omega\omega$ で $p \in L[b]$ となるものがあり，これが $a \leq_{\mathrm{T}} b$ ととれることから，$f^{-1}(\{a\}) \notin f_*(M_{\mathrm{T}})$ が成り立つことに注意すればよい）．証明を終えるには，ω_2-完備性を示せばよい：

そこで，$\{X_\xi \mid \xi < \omega_1\} \subseteq f_*(M_{\mathrm{T}})$ とする．ここで ω_1-完備性により，$\xi < \eta < \omega_1$ なら $X_\eta \subseteq X_\xi$ となっているとしてよい．$\bigcap_{\xi<\omega_1} X_\xi \in f_*(M_{\mathrm{T}})$ となることを示したい．このために，次のようなソロヴェイ・ゲームを考える：

I :	$x(0)$		$x(2)$		$\ldots$
II :		$x(1)$		$x(3)$	$\ldots$

II が勝つのは E_{x_I} が整列順序でないか，あるいは，$\{d \in \mathcal{D}_{\mathrm{T}} \mid [x_{II}]_{\mathrm{T}} \leq d\} \subseteq f^{-1}(X_{\|x_I\|})$ となるときとする．

28.5 でと同様の有界性の議論により，I が必勝法を持ちえないことが分かる：σ が I の必勝法だったすると，$\{(\sigma * y)_I \mid y \in {}^\omega\omega\}$ は WF の $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 部分集合となるから，$\beta < \omega_1$ ですべての $y \in {}^\omega\omega$ に対し，$\|(\sigma * y)_I\| < \beta$ となるものが存在する．$X_\beta \in f_*(M_{\mathrm{T}})$ だから，$b \in {}^\omega\omega$ で $\{d \in \mathcal{D}_{\mathrm{T}} \mid [b]_{\mathrm{T}} \leq d\} \subseteq f^{-1}(X_\beta)$ となるものがあるが，$\xi < \beta$ から，$f^{-1}(X_\beta) \subseteq f^{-1}(X_\xi)$ となり，$\sigma * b$ は I が負けるようなプレイとなっていることが分かる．これは矛盾である．

したがって，II が必勝法，例えば τ, を持たなければならないことが分かる．τ を実数と見なして，$\{d \in \mathcal{D}_{\mathrm{T}} \mid [\tau]_{\mathrm{T}} \leq d\} \subseteq f^{-1}(\bigcap_{\xi<\omega_1} X_\xi)$ となることが示せれば証明が完了する：

$\xi < \omega_1$ で $x \in {}^\omega\omega$ が $\tau \leq_{\mathrm{T}} x$ となっているとする．このとき，$f([x]_{\mathrm{T}}) \in X_\xi$ となることを示したい．28.5 の証明と同様に，P_ξ を有限の条件で ω から ξ への上射を付加するような p.o. とする．ω_1 が $L[x]$ で到達不可能であることから，$\mathcal{P}(P_\xi) \cap L[x]$ は可算だから，$L[x]$ 上 P_ξ-generic な g が存在する．g は $\|g\| = \xi$ となるような実数と見なすことができる．$y \in {}^\omega\omega$ を $x \leq_{\mathrm{T}} y$, $g \leq_{\mathrm{T}} y$ かつ $L[x][g] = L[y]$ となるものとする．P_ξ による強制は ξ より大きな基数をすべて保存するから，$f([x]_{\mathrm{T}}) = f([y]_{\mathrm{T}})$ となる．ここで，τ が II の必勝法であることから，$h = (g * \tau)_{II}$ とすれば，$\{d \in \mathcal{D}_{\mathrm{T}} \mid [h]_{\mathrm{T}} \leq d\} \subseteq f^{-1}(X_\xi)$ となる．一方 $\tau \leq_{\mathrm{T}} x$ と y の選び方から，$h \leq_{\mathrm{T}} y$ である．したがって $f([x]_{\mathrm{T}}) = f([y]_{\mathrm{T}}) \in X_\xi$ が成り立つ．　$\dashv$

研究の方向が明らかになったところで，次の進展は全く予期しないものであった：1970 年にマルティンは AD のもとで $3 \leq n < \omega$ に対して ω_n が共終数 ω_2 を持つ**特異基数**となることを示している．このような性質の成り立つ「すばらしき新世界」とは！ マルティンの結果は彼の AD における $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合の鋭い解析の系として得られたものであった．これについて論じるために，§14 で $\forall a \in {}^\omega\omega(a^\#$ が存在する）という仮定のもとで，u_ξ は ξ 番目の一様識別不可能クラスの元で，したがって $u_1 = \omega_1$ で $\xi > 0$ に対し，$u_\xi \leq \omega_\xi$ だったことを思い出そう．

AD なら $u_2 = \omega_2$ が成り立つ．

これは，u_2 が可測基数であることを示していると見ることのできる 28.6 の議論から導ける；別の言い方をすると，$\omega_2 = \sup(\mathrm{ran}(f)) \le u_2$ で，等式は，$f_*(M_\mathrm{T})$ の ω_2-完備性と f の定義による不等式から導ける．

$\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合の分析と 30.8 でのようなコーディングの補題を仮定することで，次が得られる：

28.7 定理 (Martin). AD を仮定する．このとき，$u_\omega = \omega_\omega$ となる．

28.6 により ω_2 が正則基数であることと，$u_2 = \omega_2$ であるという上の注意から，マルティンによる次の補題が導かれる：

28.8 系 AD を仮定する．このとき，$\mathrm{cf}(\omega_n) = \omega_2$ がすべての $2 \le n < \omega$ に対し成り立つ．

証明 $2 \le n < \omega$ に対しては，ある k で $\omega_n = u_k$ となるが，定理により，$1 < k < \omega$ である．ところがソロヴェイの 14.8(a) により，$\mathrm{cf}(\omega_n) = \mathrm{cf}(u_2) = \omega_2$ となる． ⊣

実際には，さらに 28.7 から，最初の ω 個の無限基数は，ちょうど最初の ω 個の一様識別不可能クラスの元となっていることが分かる：

28.9 定理 (DC)(Kunen; Solovay). AD を仮定する．このとき $1 \le n \le \omega$ に対し，$u_n = \omega_n$ となる．

証明 （$\mathcal{L}_\in$ の構造としての）集合の ω_1-完備超フィルターによる超巾は無限下降列を持たないから，DC により，そのような超巾は整順的となる．特に順序数のそのような超巾は，順序数の要素関係から惹き起こされた順序により，整列順序となる．次を示す：

(∗) $1 \le n < \omega$ に対し，${}^{\omega_1}u_n/\mathcal{C}_{\omega_1}$ は順序型 u_{n+1} を持つ．

これが示せたとして，上のような n に対し，$|u_n| = |u_{n+1}|$ だったとすると，

$$|u_{n+2}| = |{}^{\omega_1}u_{n+1}/\mathcal{C}_{\omega_1}| = |{}^{\omega_1}u_n/\mathcal{C}_{\omega_1}| = |u_{n+1}|$$

となり，帰納的にすべての $i \in \omega$ に対し，$|u_{n+i}| = |u_n|$ が成り立つから，$|u_\omega| = |u_n| \le \omega_n$ となるが，これは 28.7 と矛盾である．したがって，$1 \le n < \omega$ に対し，$|u_n| < |u_{n+1}|$ となるが，これと，$1 \le n < \omega$ に対し $u_n \le \omega_n$ となることから，示したかった結論が得られる．

(∗) を確立するために，まず $\xi < u_\omega$ に対し，${}^{\omega_1}\xi \subseteq \tilde{L}$ となることに注意する．ここに（15.8 の前で定義したように）$\tilde{L} = \bigcup_{a \in {}^\omega\omega} L[a]$ である．$\xi < \omega_2$ に対しては，これは 28.5 から導ける．$\omega_2 \le \xi < u_\omega$ に対しては，ξ に関する帰納法により，まず，ある $a \in {}^\omega\omega$ に対し，ξ は $L[a]$ の基数でないと仮定すると，ある $\zeta < \xi$ に対し全単射 $g\colon \xi \to \zeta$ で $g \in L[a]$ となるものがある．このとき任意の $f \in {}^{\omega_1}\xi$ に対しある $b \in {}^\omega\omega$ で $g \circ f \in L[b]$ となることが帰納法の仮定から分かる．したがって a と b をコードするような，すべての $c \in {}^\omega\omega$ に対し $f \in L[c]$ となる．ξ がすべての $a \in {}^\omega\omega$ に対し，$L[a]$ で基数だったとしてみる．このときには，ξ は一様識別不可能クラスの元となる：もし，ある $b \in {}^\omega\omega$ に対し，ξ が対応する識別不可能クラス I_b の隣どうしの元の間にあるなら，$L[b^\#]$ ではこれらの識別不可

能クラスの元は同じ濃度を持つから，ξ はそこで基数ではあり得ない．$\omega_2 \leq \xi < u_\omega$ により，$2 \leq n < \omega$ に対し，$\xi = u_n$ となり，14.18(a) により，$\mathrm{cf}(\xi) = \mathrm{cf}(u_2) = \omega_2$ となる．ところが，このときには，${}^{\omega_1}\xi = \bigcup_{\zeta<\xi} {}^{\omega_1}\zeta$ となるから，帰納法により結果が得られることが分かる．

最後に，(*) を確立するために，15.11 の議論が用いられる．まず $h \in {}^{\omega_1}u_n$ としてみる．このとき，上に見たことから $h \in \tilde{L}$ となる．14.18(b) により，$a \in {}^\omega\omega$ とスコーレム項 t_1 で

$$h = t_1{}^{\langle L[a], \in, a\rangle}(u_1, \ldots, u_n)$$

となるものが存在する．多少の変更を加えることにより，スコーレム項 t で任意の $\xi < \omega_1$ $(= u_1)$ に対し，

$$h(\xi) = t^{\langle L[a], \in, a\rangle}(\xi, u_1, \ldots, u_n)$$

となるものがとれる．ここで，15.11 の証明と同じように

$$\eta(h, a, t) = t^{\langle L[a], \in, a\rangle}(u_1, \ldots, u_{n+1}) < u_{n+1}$$

を考える；15.11 でと同じように $\{\xi < \omega_1 \mid \overline{h}(\xi) = h(\xi)\} \in \mathcal{C}_{\omega_1}$ として，$\overline{h} \in {}^{\omega_1}u_n$ で，$\eta(\overline{h}, \overline{a}, \overline{t})$ が $\overline{h}$ に対してある $\overline{a}$ と $\overline{t}$ から得られていれば，

$$\eta(\overline{h}, \overline{a}, \overline{t}) = \eta(h, a, t)$$

となる．したがって，h に対応する a と t により $e([h]) = \eta(h, a, t)$ として与えられる写像

$$e \colon {}^{\omega_1}u_n/\mathcal{C}_{\omega_1} \;\longrightarrow\; u_{n+1}$$

は順序を保存する全単射となる．これにより証明が完了した．　⊣

この統合的な結果は，AD のもとでのシャープの理論による最初の ω 個の非可算基数の記述を与え，ソロヴェイの 14.18(a) の応用による $n \geq 3$ で $cf(\omega_n) = \omega_2$ となるという明白に病的な状況を明らかにしたわけである．

組合せ論的集合論と，記述集合論の研究での AD からの帰結は，無限組合せ論での強い分割の関係という，全く別の視点への文脈を用意し，また逆にそこでの結果から促進されることにもなった．

無限指数の分割関係

マルティンの学生であったクラインバーク Eugene Kleinberg は無限指数の分割関係からの帰結を研究している．§§11, 27 の終わりで述べた実数の集合のラムズィーの性質は $\omega \longrightarrow (\omega)^\omega_2$ の可能性から派生したものであった．後者の関係は AC に矛盾する (7.1) わけだが，すでに 1968 年にはクラインバークは，これらの関係の非可算基数での振る舞いが本質的な意味を持っていることを主張し，これらの関係の様々なバージョンから，標準的な超フィルターによる強い意味での可測性が帰結されることを示している．

$\lambda < \kappa$ を両方とも正則基数とするとき，$\mathcal{C}^\lambda_\kappa$ で λ-閉非有界な κ の部分集合の生成するフィルターを表すことにする．D がこのような κ の部分集合で，C を D の κ 以外の極

限点からなる集合とすれば，$C \cap \{\xi < \kappa \mid \mathrm{cf}(\xi) = \lambda\} \subseteq D$ となる．したがって，

$$\mathcal{C}_\kappa^\lambda = \{X \subseteq \kappa \mid \exists C \in \mathcal{C}_\kappa(C \cap \{\xi < \kappa \mid \mathrm{cf}(\xi) = \lambda\} \subseteq X)\}$$

である．AC のもとでは，各 $X \in \mathcal{C}_\kappa^\lambda$ に対し $C \cap \{\xi < \kappa \mid \mathrm{cf}(\xi) = \lambda\} \subseteq X$ となるような $C \in \mathcal{C}_\kappa$ を選ぶことにより，$\mathcal{C}_\kappa^\lambda$ が κ 上の κ-完備で，実際には更に正規フィルターであることが示せる；一方，$\{\xi < \kappa \mid \mathrm{cf}(\xi) = \lambda\}$ は 16.9 により互いに素な定常集合に分割できるから，$\mathcal{C}_\kappa^\lambda$ は超フィルターではない．無限指数の分割関係は AC と矛盾するだけでなく，$\mathcal{C}_\kappa^\lambda$ が κ の可測性の例証となっていることを帰結する：

28.10 定理 (Kleinberg [70])．$\lambda < \kappa$ で λ は正則基数とし，$\kappa \longrightarrow (\kappa)_2^{\lambda+\lambda}$ が成り立つとする．このとき，κ は可測で，$\mathcal{C}_\kappa^\lambda$ は κ 上の正規超フィルターとなる．

証明 まず，(7.6 の証明により) すでに $\kappa \longrightarrow (\kappa)_2^2$ から κ が正則基数であることが帰結できることに留意する．次に，7.14(c) の証明から，$\kappa \longrightarrow (\kappa)_\gamma^\lambda$ がすべての $\gamma < \kappa$ に対し成り立つことに注意する：

$f\colon [\kappa]^\lambda \to \gamma$ で $\gamma < \kappa$ とする．$g\colon [\kappa]^{\lambda+\lambda} \to 2$ を，$g(s) = 0 \iff f(s_0) = f(s_1)$ で定義する．ここに，$s_0, s_1 \in [s]^\lambda$, $s_0 \cup s_1 = s$ で $\cup s_0 \leq \cap s_1$ とする．$H \in [\kappa]^\kappa$ を g に関し一様とする．$\lambda \cdot \kappa = \kappa > \gamma$ だから，$t_0, t_1 \in [H]^\lambda$ で $\cup t_0 \leq \cap t_1$ かつ $f(t_0) = f(t_1)$ となるものが存在しなくてはならない．したがって，$g(t_0 \cup t_1) = 0$ で，一様性から，$g``[H]^{\lambda+\lambda} = \{0\}$ となる．ここで，任意の $u, v \in [H]^\lambda$ に対し，κ の正則性から，$w \in [H]^\lambda$ で $\cup u, \cup v \leq \cap w$ となるものがあり，したがって，$f(u) = f(w) = f(v)$ となる．よって，H は f に関しても一様となっている．

次に $\mathcal{C}_\kappa^\lambda$ が κ-完備超フィルターであることを示す．このためには，$F\colon \kappa \to \gamma$ で $\gamma < \kappa$ と仮定して，$\beta < \gamma$ で $F^{-1}(\{\beta\}) \in \mathcal{C}_\kappa^\lambda$ となるものが見つかることを示せばよい．このために，$G\colon [\kappa]^\lambda \to \gamma$ を，$G(s) = \alpha \iff F(\cup s) = \alpha$ で定義する．$\kappa \longrightarrow (\kappa)_\gamma^\lambda$ により，$H \in [\kappa]^\kappa$ を G に関し一様となるようにとり，

$$C = \{\xi < \kappa \mid \bigcup(H \cap \xi) = \xi \ \wedge\ \mathrm{cf}(\xi) = \lambda\}$$

とおく．このとき C は κ で λ-閉非有界で，$G``[H]^\lambda = \{\beta\}$ なら，$C \subseteq F^{-1}(\{\beta\})$ となるから，$F^{-1}(\{\beta\}) \in \mathcal{C}_\kappa^\lambda$ である．

最後に $\mathcal{C}_\kappa^\lambda$ が正規超フィルターであることを示す．5.10 での退行的関数による特徴付けが ZF でも成り立つことに注意すると，κ-完備性から，$f \in {}^\kappa\kappa$ が退行的であると仮定して，$X \in \mathcal{C}_\kappa^\lambda$ と $\delta \in \kappa$ で $f``X \subseteq \delta$ となるものを見つければよい．このために，$g\colon [\kappa]^\lambda \to 2$ を，$g(s) = 0 \iff f(\cup s) < \cap s$ で定義する．$\kappa \longrightarrow (\kappa)_2^\lambda$ により，$H \in [\kappa]^\kappa$ を g に関し一様となるものとする．任意の $s \in [H]^\lambda$ に対し，$\overline{s} = s - (f(\cup s) + 1)$ とする．このとき，$f(\cup s) < \cup s$ だから，$\overline{s} \in [H]^\lambda$ で，$f(\cup \overline{s}) = f(\cup s) < \cap \overline{s}$ である．したがって，$g(\overline{s}) = 0$ で，一様性から，$g``[H]^\lambda = \{0\}$ となることが分かる．ところが，δ を H の最小の元として，前のように，

$$C = \{\xi < \kappa \mid \bigcup(H \cap \xi) = \xi \ \wedge\ \mathrm{cf}(\xi) = \lambda\}$$

とすると，C は κ で λ-閉非有界となり，$f``C \subseteq \delta$ となることが容易に確かめられる．$\dashv$

κ がそれほど強く到達不可能でない場合には $\mathcal{C}_\kappa^\lambda$ たちが問題の焦点となる：

28.11 演習　(Kleinberg [70]). κ が弱マーロでないとして，すべての正則基数 $\lambda < \kappa$ に対し $\mathcal{C}_\kappa^\lambda$ が正規超フィルターであるとる．このとき，$\mathcal{C}_\kappa^\lambda$ たちが κ 上の超フィルターのすべてとなる．

ヒント　κ 上の正規超フィルターは $\mathcal{C}_\kappa$ を含み，仮定により，$\{\xi < \kappa \mid \mathrm{cf}(\xi) < \xi\} \in \mathcal{C}_\kappa$ となることに注意する．$\dashv$

これらの結果は，一連の分割の定理の続きで，到達不可能でない基数に関したものが現れなければ，単に奇妙な結果ということで終っていたかもしれない．しかし，1870 年代の初めに AD + AC のもとで，ω_1 と ω_2 が強い無限指数の分割関係を満たすことが証明され，後に，このような関係を満たす基数がたくさんあることも，証明されているのである．ω_1 での最初の前兆は，1968 年のマルティンによる，AD のもとで $\omega_1 \longrightarrow (\omega_1)_2^\omega$ が成り立つ，という画期的な結果であった．クーネンはこれをすべての $\alpha < \omega_1$ に対し $\omega_1 \longrightarrow (\omega_1)_2^\alpha$ が成り立つという結論に拡張している．そして 1973 年に，ソロヴェイの構造定理 28.5 に基づいて，マルティンは次の ω_1 に関する強い二分律と言える命題を確立している：

28.12 定理　(Martin). AD を仮定する．このとき，$\omega_1 \longrightarrow (\omega_1)_2^{\omega_1}$ が成り立つ．

証明　$H \in [\omega_1]^{\omega_1}$ と，これの昇順の数えあげ $h\colon \omega_1 \to H$ に対し，

$$_\omega H = \{\sup(\{h(\omega{\cdot}\xi + i) \mid i \in \omega\}) \mid \xi < \omega_1\} \in [\omega_1]^{\omega_1}$$

とおく．つまり，$_\omega H$ は H の一続きになった ω 個の元の上限の全体からなる集合である．

ここで $f\colon [\omega_1]^{\omega_1} \to 2$ とする．ω_1 の閉非有界集合 C で $_\omega C$ が f に関し一様となるようなものを以下で構成する．C は $\mathbf{\Sigma}_1^1$ 有界性の議論を f に関連したゲームの必勝法に適用して得られる順序数の閉包として得られることになる．28.5 により，すべての $Y \in [_\omega C]^{\omega_1}$ は，ある $a \in {}^\omega\omega$ に対する $L[a]$ に含まれているから，シャープとスコーレム項を用いることで記述することができる．

ここでのゲームを定義するために，まず§§9, 14 でのシャープの理論を実数に相対化したものを，ここで必要になるような形に整えて復習する．EM 青写真とは，$\langle L_\delta[a], \in, a, \zeta_k \rangle_{k\in\omega}$ という形をしたある構造の理論のことで，ここに，δ は極限順序数 $> \omega$ で，$\{\zeta_k \mid k \in \omega\}$ は $\langle L_\delta[a], \in, a \rangle$ の順序数からなる識別不可能集合とする．ここでは，このような理論は，算術化により，ある $z \in {}^\omega\omega$ と同一視されている（したがって a は z から復元可能となっている）．$\mathcal{M}(z, \alpha)$ で，順序型が α の識別不可能集合から生成されるということで一意に決まるモデルを表す（9.4 を参照）．$z \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$\exists a \in {}^\omega\omega(z = a^\#) \ \leftrightarrow\ S(z)\ \wedge\ W(z)$$

とする．ここに S は，z が，ある a に対する EM 青写真で§9 での条件 (II) と (III) を満たしているものをコードしていることを主張する算術的な述語で，W はすべての $\alpha < \omega_1$ に対し，$\mathcal{M}(z, \alpha)$ が整順的であることを主張する Π_2^1 述語とする．

$S(z)$ なら，$\mathcal{M}(z, \alpha)$ が整順的であるかないかにかかわらず，$\mathcal{M}(z, \alpha)$ はその “順序数” のうちで本当に整列的になっているような最大の始片を持つ．この始片の元を対応する本

物の順序数と同一視して，ここでは，

$$\eta <_{\rm is} \mathcal{M}(z,\alpha)$$

と書いて，η はこのような始片の元であることを表すことにする．

$\langle t_n \mid n \in \omega\rangle$ が（9.3 でのような）スコーレム項の列挙となっているとする．ただし，ここで考えているスコーレム項は，$\mathcal{L}_\in(\dot{A})$ での，自由変数をただ一つ含むものとする．$z \in {}^\omega\omega$ に対し，$z^+ \in {}^\omega\omega$ を $z^+(i) = z(i+1)$ で定義されるものとする．したがって，$z = \langle z(0)\rangle^\frown z^+$ となる．ここで，$\alpha < \omega_1$ に対し，

$$\begin{aligned} A_\alpha = \{z \in {}^\omega\omega \mid S(z^+) \ \wedge\ \alpha <_{\rm is} \mathcal{M}(z^+, \alpha+\omega) \wedge \\ \exists\eta \geq \alpha(t_{z(0)}^{\mathcal{M}(z^+,\alpha+\omega)}(\alpha) = \eta <_{\rm is} \mathcal{M}(z^+,\alpha+\omega))\} \end{aligned}$$

とする．このような集合の意味は，次のような $f\colon [\omega_1]^{\omega_1} \to 2$ に付随するゲームでのこれらの役割から明らかになってくる：

いつものように，各プレイヤーは実数を選んでゆく：

I :	$x(0)$		$x(2)$		$\ldots$
II:		$x(1)$		$x(3)$	$\ldots$

ここで，I は自然数 $x(0)$ と，実数 $(x_I)^+$ をとり，II は自然数 $x(1)$ と実数 $(x_{II})^+$ をとる，と見なす．ペイオフの図式は 2 つの場合からなる：

(i) α で $x_I \notin A_\alpha$ か $x_{II} \notin A_\alpha$ のどちらかが成り立つようなものがある場合．このときには，このようなもののうち最小の α に対し，$x_I \notin A_\alpha$ なら II の勝ち，そうでないなら I の勝ちとする．

他の場合から有界性の議論へと導かれることになる．大雑把な言い方をすると，片方のプレイヤーが勝つのは，彼の選んだ実数が S を満たし，整順的部分が彼のスコーレム項により“より閉じている”ような構造を生成するとき，とする．

すべての $\alpha < \omega_1$ に対し，$z \in A_\alpha$ となっていると仮定してみる．このとき，このような α に対し，$\alpha <_{\rm is} \mathcal{M}(z^+, \alpha+\omega)$ となり，すべての $\mathcal{M}(z^+,\beta)$ はお互いに埋め込み可能であることから，これはは整順的となる．したがって，$z^+ = a^\#$ となる a が存在する．さらに，$\mathcal{M}(z^+,\alpha+\omega) \prec \langle L[a], \in, a\rangle$ だから，すべれの $\alpha < \omega_1$ に対し，$\alpha \leq t_{z(0)}^{\langle L[a],\in,a\rangle}(\alpha) < \omega_1$ が成り立つ．これらの注意により他の場合が次のように導入される：

(ii) ある $a, b \in {}^\omega\omega$ に対し，$(x_I)^+ = a^\#$ かつ $(x_{II})^+ = b^\#$ とする．このとき，$p_x\colon \omega_1 \to \omega_1$ を

$$p_x(\xi) = \sup(\{t_{x(0)}^{\langle L[a],\in,a\rangle}(\omega{\cdot}\xi+i) \mid i \in \omega\} \cup \{t_{x(1)}^{\langle L[b],\in,b\rangle}(\omega{\cdot}\xi+i) \mid i \in \omega\})$$

と定義して，I が勝つのは $f(\mathrm{ran}(p_x)) = 0$ のとき，II が勝つのは $f(\mathrm{ran}(p_x)) = 1$ のときとする．

以下で I の必勝法から f の値が 0 となり，ここで必要な性質を持つ一様な集合が得られることを示す（同様の議論により II の必勝法から，f の値が 0 となることが分かり，こ

こで必要な性質を持つ一様な集合が得られる）．

ここで，σ が I の必勝法であると仮定してみる．前に述べておいたように，まず，$\mathbf{\Sigma}^1_1$ 有界性の議論を適用して ω の閉非有界部分集合を定義する．ここで，E_r, $\|r\|$, WF などの記法を用いるが，これは例えば 28.2 の最初の証明で用いたものである．$\eta < \omega_1$ に対し，

$$\begin{aligned} B_\eta = \{r \in {}^\omega\omega \mid \exists z \in {}^\omega\omega \exists\alpha \leq \eta(S(z^+) \ \wedge \ \alpha <_{\mathrm{is}} \mathcal{M}(z^+, \alpha+\omega) \\ \wedge\ t_{z(0)}^{\mathcal{M}(z^+,\alpha+\omega)}(\alpha) = \eta <_{\mathrm{is}} \mathcal{M}(z^+, \alpha+\omega) \\ \wedge\ E_r \text{ は順序型 } t_{\sigma(\emptyset)}^{\mathcal{M}(((\sigma * z)_I)^+,\alpha+\omega)}(\alpha) \text{ を持つ}\} \end{aligned}$$

とする．このとき，B_η は順序型 η をコードする実数上 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ となる．順序数に関する主張はそれらをコードする実数と埋め込みの言葉で表せるからである．σ は I の必勝法だから，(i) の条項での z に対する条件から，$t_{\sigma(\emptyset)}^{\mathcal{M}(((\sigma * z)_I)^+,\alpha+\omega)}(\alpha)$ は本当の順序数となる，このことから，$B_\eta \subseteq \mathrm{WF}$ となり，前の議論でと同じように関数 $w\colon \omega_1 \to \omega_1$ で，$r \in B_\eta$ なら，$\|r\| < w(\eta)$ となるようなものが定義できる．

$$C = \{\gamma < \omega_1 \mid \forall\eta < \gamma(w(\eta) < \gamma)\}$$

とおく．このとき C は ω_1 で閉非有界となり，${}_\omega C$ が f で一様となり f のそこでの値は 0 となることが示せれば証明が完了する．

$p\colon \omega_1 \to {}_\omega C$ を増加的とする．このとき，$f(\mathrm{ran}(p)) = 0$ を示したい．${}_\omega C$ の定義により，増加的関数 $q\colon \omega_1 \to C$ で，すべての $\xi < \omega_1$ に対し，

$$p(\xi) = \sup(\{q(\omega{\cdot}\xi + i) \mid i \in \omega\})$$

となるものが存在する．28.5 により，ある $b \in {}^\omega\omega$ に対し $q \in L[b]$ となり，実際そこでの証明の最後の段落により強制法による定義が与えられるから，$k \in \omega$ で

$$\forall\alpha < \omega_1(t_k^{\langle L[b],\in,b\rangle}(\alpha) = q(\alpha))$$

が成り立つものが存在する．$z = \langle k\rangle^\frown b^\#$ とおく．このとき，σ が I の必勝法であることから，ある $a \in {}^\omega\omega$ に対し，$(\sigma * z)_I = \langle\sigma(\emptyset)\rangle^\frown a^\#$ となる．ここで，(ii) の主張でのような $p_{\sigma*z}$ に対し，$p = p_{\sigma*z}$ となることが示せれば十分である．なぜなら，σ が I の必勝法であることから，このときには，$f(\mathrm{ran}(p)) = f(\mathrm{ran}(p_{\sigma*z})) = 0$ となるからである．

そこで，$\xi < \omega_1$ としてみる．$\mathcal{M}(b^\#, \omega{\cdot}(\xi+1)) \prec \langle L[b], \in, b\rangle$ だから，各 $i \in \omega$ に対し，

$$\begin{aligned} &\omega{\cdot}\xi + i \leq t_k^{\langle L[b],\in,b\rangle}(\omega{\cdot}\xi+i) = t_k^{\mathcal{M}(b^\#,\omega\cdot(\xi+1))}(\omega{\cdot}\xi+i), \\ &t_{\sigma(\emptyset)}^{\langle L[a],\in,a\rangle}(\omega{\cdot}\xi+i) = t_{\sigma(\emptyset)}^{\mathcal{M}(a^\#,\omega\cdot(\xi+1))}(\omega{\cdot}\xi+i) \end{aligned}$$

となり，a に対しても同様である．したがって，

$$t_{\sigma(\emptyset)}^{\langle L[a],\in,a\rangle}(\omega{\cdot}\xi+i) < w(\omega{\cdot}\xi+i) < p(\xi)$$

となる．最初の不等式は $B_{\omega\cdot\xi+i}$ と w の定義により，二番目のものは，$\omega{\cdot}\xi + i < p(\xi)$ で $p(\xi) \in C$ であることから得られる．したがって，$t_k^{\langle L[b],\in,b\rangle}(\omega{\cdot}\xi+i)$ たちの上限となって

いる $p(\xi)$ は $p_{\sigma*z}(\xi)$ と等しくなり，後者は $t_{\sigma(\emptyset)}^{\langle L[a],\in,a\rangle}(\omega\cdot\xi+i)$ と $t_k^{\langle L[b],\in,b\rangle}(\omega\cdot\xi+i)$ たちの上限となっている．これにより証明が完了した． ⊣

この証明は $\mathbf{\Sigma}_1^1$ 有界性の論法と関数 $\omega_1\to\omega_1$ のコーディングに類似の議論を用いることにより，もっと大きな基数に対して一般化されることになる（30.26 を参照）．

上の証明からはもっと強い帰結を導くことができる：

28.13 演習 ADを仮定する．このとき，$\omega_1 \longrightarrow (\omega_1)^{\omega_1}_{2^{\aleph_0}}$ が成り立ち，したがって，すべての $\alpha<\omega_1$ に対し，$\omega_1 \longrightarrow (\omega_1)^{\omega_1}_{\alpha}$ が成り立つ．

ヒント $f\colon [\omega_1]^{\omega_1}\to {}^{\omega}2$ とする．各 $n\in\omega$ に対し，$f_n\colon[\omega_1]^{\omega_1}\to 2$ を $f_n(s)=f(s)(n)$ で定義される関数とし，28.12の証明から，C_n を ω_1 の閉非有界集合で，${}_{\omega}C_n$ が f_n に関し一様になるものとする．このとき，${}_{\omega}(\bigcap_n C_n)$ は f に関し一様になる．後半の主張の証明には，任意の可算順序数は ${}^{\omega}\omega$ に埋め込み可能であることに留意すればよい． ⊣

$f(s)=\cap s$ で定義される関数 $f\colon[\omega_1]^{\omega_1}\to\omega_1$ は $\omega_1 \longrightarrow (\omega_1)^{\omega_1}_{\omega_1}$ に対する反例であるが，ADのもとでは，$\omega_1 \not\leq 2^{\aleph_0}$ であることを思い出そう．

マルティンも同じ頃に，ちょうど確立されつつあった実数集合の構造理論（§§29, 30 を参照）を用いて，AD + DCのもとで $\forall\alpha<\omega_1(\kappa \longrightarrow (\kappa)^{\alpha}_2)$. を満たす基数 κ がたくさん存在することを示している．

これに続く進展で，マルティンとパリスは，28.12から出発して，$\mathcal{C}_{\omega_1}$ による超巾をとることにより，AD + DCのもとでは，$\forall\alpha<\omega_2(\omega_2 \longrightarrow (\omega_2)^{\alpha}_2)$ が成り立つことを示している．28.12が ω_1 に対しそうだったように，この結果は ω_2 が可測基数であるという結果の相当な強化となっており，28.10と28.11を通じ，ω_2 上には，$\mathcal{C}^{\omega}_{\omega_2}$ と $\mathcal{C}^{\omega_1}_{\omega_2}$ のちょうど2つの超フィルターしか存在しないことを帰結する．他方，クーネンは，$\omega_2 \not\longrightarrow (\omega_2)^{\omega_2}_2$ を示している（これらの様々な結果については Kechris [78] を参照）．

クラインバークは1975年に，これらのADのもとで成り立つ結果の多くは，実際にはマルティンの $\omega_1 \longrightarrow (\omega_1)^{\omega_1}_2$ のみから導くことができることを示している．クラインバークは一般性，およびジョンソンとローボトムの分割の性質を強調している：

28.14 定理 (DC)(Kleinberg [77, 77a])．$\kappa>\omega$ で $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{\kappa}_2$ とする．このとき，基数列 $\kappa=\kappa_1<\kappa_2<\kappa_3<\ldots$ で，以下を満たすものが存在する．

(a) κ_2 も κ_1 も可測基数で，さらに，すべての $\alpha<\omega_1$ に対し，$\kappa_2 \longrightarrow (\kappa_2)^{\alpha}_2$ が成り立つ．

(b) $n\geq 3$ に対し，κ_n は共終数が κ_2 の特異基数となるジョンソン基数で，$\sup(\{\kappa_n \mid n\in\omega\})$ はローボトム基数である．

さらに，κ 上に正規超フィルター U で ${}^{\kappa}\kappa/U$ が順序型 κ^+ を持つようなものが存在すれば，

(c) $n\geq 1$ に対し，$\kappa_{n+1}=\kappa_n^+$ が成り立つ．

(d) すべての $\alpha<\kappa_2$ に対し，$\kappa_2 \longrightarrow (\kappa_2)^{\alpha}_2$ が成り立つ．

(e) κ_1 あるいは κ_2 上の正規超フィルターは，すべて $\mathcal{C}^{\lambda}_{\mu}$ という形をしている．

AD のもとでは，28.9 の証明の中の $(*)$ により，${}^{\omega_1}\omega_1/\mathcal{C}_{\omega_1}$ は順序型 $u_2 = \omega_2$ を持つから，$\kappa = \omega_1$ に対し (c) - (e) は確かに成り立っている．28.14 で記述された関係の織物に関して簡単なコメントを加えておくことにする．(b) と (c) は $n \geq 2$ に対し，$\mathrm{cf}(\omega_n) = \omega_2$ となる (28.8) ということの純粋に組合せ論的な説明となっている．(a) と (c) に対する論証はマルティンとパリスの，すべての $\alpha < \omega_2$ に対し $\omega_2 \longrightarrow (\omega_2)_2^\alpha$ となることの特殊な場合についての結果に暗に含まれている．$\omega_2 \not\longrightarrow (\omega_2)_2^{\omega_2}$ の一般化として，ヘンレ Henle [79] は，$\kappa_2 \not\longrightarrow (\kappa_2)_2^{\kappa_2}$ が示されていて，これが (d) の限界を示す結果となっている．Kleinberg [77a] で述べられているように，(b) の証明は，28.13 の拡張である $\kappa \longrightarrow (\kappa)_2^\kappa$ なら $\kappa \longrightarrow (\kappa)_{2^{\aleph_0}}^\kappa$ である，というヘンレの結果を用いて簡略化できる．また，ブル Everett Bull [78: 171] はここで述べられたような U の存在が κ が非極限基数であることを帰結することを示しており，したがって (e) は 28.11 から導かれる．

$\kappa \longrightarrow (\kappa)_2^\kappa$ の組合せ論的な帰結やこの原理の変種については Henle [77, 79, 84], Kleinberg [81, 82], および Henle-Kleinberg-Watro [84] でさらに研究されている．この方面での AD からの結果に関しては，1977 年までに，AD から，$\kappa \longrightarrow (\kappa)_2^\kappa$ となる基数 κ がたくさん存在することが知られていた（しかし，ω_1 より大きな基数で 28.14 の "さらに ..." の部分の条件を満たすものが存在するかどうかはジャクソンの仕事 Jackson [88] で初めて明らかになった）．AD と無限指数の分割関係に関するこのような結果については，§30 の終わりで議論する．

Θ について

AD は超限の上に長い影を投げかけることが分かったわけだが，次にその度合に関する初期の仕事に目を向けてみることにする．連続体を順序数で測るということに関しては，$\omega_1 \not\leq 2^{\aleph_0}$ という AD の帰結からは，連続体は $\xi \to {}^\omega\omega$ という埋め込みの可能性に関しては小さなものとなっていることが分かる．一方，上射 : ${}^\omega\omega \to \omega_1$ は常に存在する（整列集合をコードする実数をその順序型に対応させる関数を考えればよい）が，連続体の長さは上射 : ${}^\omega\omega \to \xi$ の可能性に関しても考えることができる．モショヴァキス Moschovakis [70] は次のような順序数に注目している：

$$\Theta = \sup(\{\xi \mid \text{上射：} {}^\omega\omega \to \xi \text{ が存在する }\})$$

上射 : ${}^\omega\omega \to \xi$ は ${}^\omega\omega$ を整列された層の族に分割し，$\mathcal{P}({}^\omega\omega)$ の部分集合の整列順序に対応する．ZF で置換の公理を用いると，Θ は順序数となることが分かる．さらに，ZF で Θ は基数 $\geq \omega_2$ となることもすぐに分かる．また，ZFC では $\Theta = (2^{\aleph_0})^+$ である．Θ を $\aleph$ の列の中で決定する問題は，AC の欠落した枠組での連続体問題と見なすことができる．

Θ は様々な方法で AD の超限に対する効果の上限と見なせ，AD のもとでは非常に大きなものとなることが明らかになってきた．この方向の最初のいくつかの結果は，1968 年に H. フリートマンとモショヴァキスにより独立に得られている．後者はすぐに重要なコーディングの補題を抽出しているが，この補題は，Θ とその定義可能性バージョン（30.16 の前を参照）に関する多くの結果で決定的な役割を果たす．この補題の証明には，**フリートマン・ゲーム**として知られるようになるものが用いられている．これは，プレイヤーが可

算順序数のコードをプレイするものだが，ソロヴェイ・ゲームとは違い，どちらのプレイヤーも必勝法を持つ可能性がある．このようなゲームが初めて用いられたのは次のような驚くべき結果と，それに先立つ H. フリートマンによるいくつかの結果においてであった：

28.15 定理 (Moschovakis [70]). ADを仮定する．もし上射 : ${}^{\omega}\omega \to \alpha$ が存在すれば，上射 : ${}^{\omega}\omega \to \mathcal{P}(\alpha)$ が存在する．

証明 $f\colon {}^{\omega}\omega \to \alpha$ を上射とする．列 $\langle g_\xi \mid \xi \leq \alpha \rangle$ を帰納的に定義して，g_ξ は上射 : ${}^{\omega}\omega \to \mathcal{P}(\xi)$ となるようにする．$g_0\colon {}^{\omega}\omega \to \mathcal{P}(0)$ は一意に存在する写像とする．非極限ステップでは，ξ が有限なときには，$g_{\xi+1}$ は直接に定義し，そうでないときは，ξ に関して一様に定義できる全単射 : $\xi \to \xi+1$ を用いて定義する．あとは，極限順序数 δ で $0 < \delta \leq \alpha$ となるものに対し，g_δ を定義すればよい．

まず，$\xi < \delta$ と $y \subseteq \xi$ に対し，一時的に，$z \in {}^{\omega}\omega$ は y をコードする $\Leftrightarrow$ $f((z)_0) = \xi$ かつ $g_\xi((z)_1) = y$, ときめる．ここで，$X \subseteq \delta$ に対し，ゲーム G^X を考える．ここに各プレイヤーは自然数を選んでゆく：

$$\begin{array}{llllll} I\ : & x(0) & & x(2) & & \ldots \\ II: & & x(1) & & x(3) & \ldots \end{array}$$

x_I がどんな $\xi < \delta$ に対しても $X \cap \xi$ をコードしていないときには I の負け．ある $\xi < \delta$ に対し，x_I が $X \cap \xi$ をコードしているときには，ある $\xi < \eta < \delta$ に対し x_{II} が $X \cap \eta$ をコードしているときに限り II の勝ちとする．

まず I が必勝法 σ を持っている場合を考えてみる．このときには，

$$\forall y \in {}^{\omega}\omega((\sigma * y)_I \text{ は，ある } \xi < \delta \text{ に対し } X \cap \xi \text{ をコードする})$$

となり，X はこのような性質を持つ δ の唯一の部分集合となる：$Y \subseteq \delta$ で $Y \neq X$ なら，$\zeta \in Y \triangle X$ として，$y \in {}^{\omega}\omega$ が $X \cap (\zeta+1)$ をコードするものとする．このときには，$(\sigma * y)_I$ は，ある $\xi \geq \zeta$ に対し，$X \cap \xi$ をコードしていなくてはならず，$X \cap \xi \neq Y \cap \xi$ となるからである．

次に II が必勝法 τ を持つとしてみる．このときには，

$$\begin{aligned} \forall z \in {}^{\omega}\omega(&\text{ある } \xi < \delta \text{ に対し，} z \text{ は } X \cap \xi \text{ をコードする} \to \\ &\text{ある } \eta, \xi < \eta < \delta \text{ に対し，} (z * \tau)_{II} \text{ は } X \cap \eta \text{ をコードする}) \end{aligned}$$

となり，X はこのような性質を持つ唯一の δ の部分集合となる：$Y \subseteq \delta$ で，$Y \neq X$ なら，ξ を $Y \triangle X$ の最小の元として，$z \in {}^{\omega}\omega$ が $Y \cap \xi (= X \cap \xi)$ をコードするとする．このとき，$(z * \tau)_{II}$ は，ある $\eta > \xi$ に対し $X \cap \eta$ をコードしており，$X \cap \eta \neq Y \cap \eta$ となるからである．

以上により，どちらかのプレイヤーの任意の戦略は，それがある G^X での必勝法なら，そのような X は一意に決まり，この戦略から再構成できることが分かる．したがって，関数 $g\colon \{\rho \mid \rho \text{ は } I \text{ か } II \text{ の戦略}\} \to \mathcal{P}(\delta)$ を

$$g(\rho) = \begin{cases} X & \rho \text{ は } G^X \text{ で } I \text{ か } II \text{ の必勝法となっているとき,} \\ \emptyset & \text{そうでない場合.} \end{cases}$$

として定義でき，これは AD により上射となる．g の定義域を調節すると，上射 g_δ: ${}^\omega\omega \to \mathcal{P}(\delta)$ が得られるが，これにより帰納的な構成が完了する． ⊣

これから簡単に導ける系として：

28.16 演習　(H. Friedman). AD を仮定する．このとき，Θ は極限基数である．

ヒント　$\lambda < \Theta$ として，$\lambda^+ < \Theta$ を示す．定理により，上射 :${}^\omega\omega \to \mathcal{P}(\lambda)$ が存在する．まずこれを，例えば，ゲーデルの対の関数 : $\lambda \to \lambda \times \lambda$ から惹き起こされる上射 : $\mathcal{P}(\lambda) \to \mathcal{P}(\lambda \times \lambda)$ と合成する．これに，$R \in \mathcal{P}(\lambda \times \lambda)$ を，R が整列順序のときにはその順序型，そうでないときには 0 に移す関数を合成すればよい． ⊣

28.15 と 28.16 の証明は，実質的には上射 : ${}^\omega\omega \to \lambda$ から上射 : ${}^\omega\omega \to \lambda^+$ が得られることを示している．このことからもっと強い系が得られる：

28.17 演習　(Solovay). AD を仮定する．このとき，$\Theta = \omega_\Theta$ となる．

ヒント　$\alpha < \Theta$ として，$\omega_\alpha < \Theta$ を示す．上射 : ${}^\omega\omega \to \alpha$ を用いて，帰納的に，列 $\langle g_\xi \mid \xi \leq \alpha \rangle$ で各 g_ξ は上射 : ${}^\omega\omega \to \omega_\xi$ となるようなものを構成すればよい． ⊣

コーディングの補題を用いてモショヴァキス Moschovakis [70] はソロヴェイによる他の結果を拡張して，AD のもとで Θ **の下に κ-弱マーロ基数となる κ が存在する**，ということを示している．一方，Θ の共終数は他の仮定がなければ小さい可能性もあることが判明した．次は，AC_ω のみに依存する，予想されるような論法により示せる：

28.18 演習　(DC). $\mathrm{cf}(\Theta) > \omega$. ⊣

前に $L(\mathbb{R})$ が，ZFC の枠組での AD の自然な内部モデルになることを述べた．

28.19 演習　(Solovay). $V = L(\mathbb{R})$ と仮定する．このとき，Θ は正則基数となる．

ヒント　列 $\langle h_\xi \mid 0 < \xi < \Theta \rangle$ で各 h_ξ は上射 : ${}^\omega\omega \to \xi$ となっているものが存在することを（AC を用いずに！）示せばいい．このことから，期待されるような議論で Θ が正則基数であることが示せるからである．このような列を得るには，Φ: $\mathrm{On} \times {}^\omega\omega \to V$ を定義可能な上射とする（例えば 11.13 の証明を参照）．t: $\Theta - \{0\} \to \mathrm{On}$ を，$t(\xi)$ はある $y \in {}^\omega\omega$ に対し，$\Phi(t(\xi), y)$ が上射 : ${}^\omega\omega \to \xi$ となるような最小の順序数として定義する．ここで，$0 < \xi < \Theta$ に対し，h_ξ: ${}^\omega\omega \to \xi$ を，

$$h_\xi(x) = \begin{cases} \Phi(t(\xi), (x)_0)((x)_1) & \Phi(t(\xi), (x)_0) \text{ が } \xi \text{ への上射の場合} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

として定義すればよい． ⊣

このように，$\Theta^{L(\mathbb{R})} \leq \Theta$ は小さな順序数であるかもしれないにもかかわらず，$\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ なら，$\Theta^{L(\mathbb{R})}$ は $L(\mathbb{R})$ で弱到達不可能であることが分かる．Θ の $L(\mathbb{R})$ での可能性は，後

にかなり詳しく分かるようになる (30.32).

実数の集合に対するシャープを導入することでソロヴェイ Solovay [78a] は,

$$\mathrm{ZF} + \mathrm{AD}_{\mathbb{R}} + \mathrm{cf}(\Theta) > \omega \vdash \mathrm{Con}(\mathrm{ZF} + \mathrm{AD}_{\mathbb{R}})$$

を証明している．よってゲーデルの第二不完全性定理により,

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZF} + \mathrm{AD}_{\mathbb{R}}) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZF} + \mathrm{AD}_{\mathbb{R}} + \mathrm{cf}(\Theta) = \omega)$$

が帰結できる．したがって，28.18 により，$\mathrm{Con}(\mathrm{ZF} + \mathrm{AD}_{\mathbb{R}})$ から $\mathrm{Con}(\mathrm{AD} + \neg\mathrm{DC})$ が導け，DC の AD からの独立性が分かる．スティールとファン・ウェセプ Steel-Robert Van Wesep [82] はこれに関連したいくつかの結果を得ている．

ADのもとでの強コンパクト性と超コンパクト性

AD から導ける強コンパクト性と超コンパクト性の組合せ論的なバージョンについて論じて，この節を終えることにする．基本となるウォッシュの定理の証明は AC に依存しているので，V の初等的埋め込みによる同値命題はここでは使えない．このような欠落のもとでは，組合せ論的バージョンの強さは不明である．1980 年代終わりの AD の相対的無矛盾性の結果 (§32) は，少なくとも超コンパクト性に関しては，無矛盾性の強さはそれほどのものではないことが示唆されることになる．いずれにしても，AD が，このように違ったやり方で超限性に対し影響を及ぼすのは興味深い．

強コンパクト性の初期に得られた特徴付け (4.1) に関し，クーネンは 1970 年に，AD のもとで，ω_1 が，自然な上限である Θ 以下で強コンパクトとなることを見いだしている．この証明は，前と同じように，マルティンのチューリング度上の超フィルターの射影を用いるが，これによりさらに別の結論も導ける．

28.20 定理 (Kunen). AD を仮定する．このとき，任意の $\lambda < \Theta$ に対し，λ 上の任意の ω_1-完備フィルターは λ 上の ω_1-完備超フィルターに拡張できる．

証明 28.15 により，上射 $g\colon {}^\omega\omega \to \mathcal{P}(\lambda)$ をとる．F を λ 上の ω_1-完備フィルターとする．マルティンの 28.4 とそこでの用語を思い出して，$f\colon \mathcal{D}_\mathrm{T} \to \lambda$ を，

$$f(d) = \text{順序数で，} \bigcap\{g(a) \in F \mid a \in {}^\omega\omega \ \wedge\ [a]_\mathrm{T} \le d\} \text{ に含まれる最小のもの}$$

で定義する（$[a]_\mathrm{T} \le d$ となるような $a \in {}^\omega\omega$ は可算個しかないから，上の共通部分は ω_1-完備性により空ではない）．このとき，任意の $X \in F$ と $a \in {}^\omega\omega$ で $g(a) = X$ となるものに対し，$f``\{d \in \mathcal{D}_\mathrm{T} \mid [a]_\mathrm{T} \le d\} \subseteq X$ となる．このことを用いると，

$$f_*(M_\mathrm{T}) = \{X \subseteq \lambda \mid f^{-1}(X) \in M_\mathrm{T}\}$$

が F を拡張する λ 上の ω_1-完備超フィルターとなっていることは容易に示せる． ⊣

28.21 系 (DC)(Kunen). AD を仮定する．このとき，すべての $\lambda < \Theta$ に対し，

$$\beta(\lambda) = \{U \mid U \text{ は } \lambda \text{ 上の超フィルター}\}$$

は整列可能である．

証明　λ 上の任意の超フィルターは ω_1-完備 (28.1) だから，定理の証明により，ある $f\colon \mathcal{D}_{\mathrm{T}} \to \lambda$ に対し，$f_*(M_{\mathrm{T}})$ という形をしている．定義域が $\mathcal{D}_{\mathrm{T}}$ の任意の関数 f, g に対し，$\{d \in \mathcal{D}_{\mathrm{T}} \mid f(d) = g(d)\} \in M_{\mathrm{T}}$ なら $f_*(M_{\mathrm{T}}) = g_*(M_{\mathrm{T}})$ となることは容易に確かめられる．したがって，超巾 ${}^{\mathcal{D}_{\mathrm{T}}}\lambda/M_{\mathrm{T}}$ を定義域に持つ写像で $[f]_{M_{\mathrm{T}}}$ を $f_*(M_{\mathrm{T}})$ に移すものは，$\beta(\lambda)$ へのうまく定義された上射となっている．ところが，DC により ω_1-完備な超フィルターによる順序数の超巾はそれによって惹き起こされた順序に関し整列されている．したがって，この上射の像 $\beta(\lambda)$ も整列可能である．　⊣

このように，AD のもとでは，$\lambda < \Theta$ なら，$\mathcal{P}(\lambda)$ は整列不可能だが，$\beta(\lambda)$ は整列可能となる．AC のもとでは，すべての κ に対し，$|\beta(\kappa)| = 2^{2^\kappa}$ となることは，Pospíšil [37] および Tarski [39] での古典的な結果である．AD のもとでは，$|\beta(\kappa)| = \kappa$ となることがあり得る．Θ 以下の基数上の β 関数は後には巾集合の演算のようなものとして見なされるようになる（Kechris [85] を参照）．DC と， AD と $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ の間にある仮定から，ケクリス Kechris [88a] は次のような 28.15 に類似する結果を確立している：**上射：${}^\omega\omega \to \lambda$ があれば，上射：${}^\omega\omega \to \beta(\lambda)$ が存在する．**

今度は超コンパクト性に目を向けると，AD のもとでの，様々な $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の正規超フィルターの存在が 1970 年後半に確立されている．ソロヴェイは次のような結果を AD より強い $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ からの初期の結果の一つとして確立していた：

28.22 定理　(Solovay [78a: §3]). $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ を仮定する．このとき，すべての $\gamma < \Theta$ に対し，$\mathcal{P}_{\omega_1}\gamma$. 上の正規超フィルターが存在する．

証明　ソロヴェイが実際に示したのは，$\mathcal{P}_{\omega_1}{}^\omega\omega$ 上に ω_1-完備超フィルター U で次のような良好性と正規性を持つものが存在することであった：

(i)　$\forall a \in {}^\omega\omega(\{X \in \mathcal{P}_{\omega_1}{}^\omega\omega \mid a \in X\} \in U)$.

(ii)　$\langle A_a \mid a \in {}^\omega\omega\rangle \in {}^{{}^\omega\omega}U$ なら，$\{X \in \mathcal{P}_{\omega_1}{}^\omega\omega \mid X \in \bigcap_{a\in X} A_a\} \in U$.

このような U はクーネンの 28.20 でのマルティンによる M_{T} と同じような役割を果たすことができる：$\gamma < \Theta$ に対し，$f\colon {}^\omega\omega \to \gamma$ を上射とする．このとき，

$$\{Y \subseteq \mathcal{P}_{\omega_1}\gamma \mid \{x \in \mathcal{P}_{\omega_1}{}^\omega\omega \mid f``x \in Y\} \in U\}$$

が $\mathcal{P}_{\omega_1}\gamma$ 上の正規超フィルターとなることが容易に示せるからである．

U を定義するために，$A \subseteq \mathcal{P}_{\omega_1}{}^\omega\omega$ に対し，各プレイヤーは有限な（空集合でもあり得る）${}^\omega\omega$ の部分集合を選ぶようなゲーム $G(A)$ を考える：

$$\begin{array}{llllll} I: & s_0 & & s_2 & & \ldots \\ II: & & s_1 & & s_3 & \ldots \end{array}$$

II が勝つのは，$\bigcup_{i\in\omega} s_i \in A$ となるときで，そうでないときは I の勝ちとする．実数の有限集合を実数でコードすることにより，$\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ から，$G(A)$ は決定的であることが分かる．ここで，$U \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}_{\omega_1}{}^\omega\omega)$ を，

$$A \in U \quad \Leftrightarrow \quad II \text{ は } G(A) \text{ で必勝法を持つ}$$

として定義する．明らかに性質 (i) は成り立っている．また，$A \in U$ で $A \subseteq B \subseteq \mathcal{P}_{\omega_1}{}^{\omega}\omega$ なら，$B \in U$ となることも明らかである．さらに，$A \subseteq \mathcal{P}_{\omega_1}{}^{\omega}\omega$ で $A \notin U$ なら，$\mathcal{P}_{\omega_1}{}^{\omega}\omega - A \in U$ となる．σ を $G(A)$ での I の必勝法とすれば，次は $G(\mathcal{P}_{\omega_1}{}^{\omega}\omega - A)$ での II の必勝法となるからである：I の最初の手 s_0 の後 II は $\sigma(\emptyset)$ という手をとり，I のこの次の手 s_2 の後 II は $\sigma(\langle\sigma(\emptyset), s_0 \cup s_2\rangle)$ をとり，この後は，同様に σ に従ってプレイする．

次に U が ω_1-完備フィルターであることを示すために，U の ω_1-完備性を示す．ここでの議論を，すぐ後で拡張して，それにより (ii) が得られることになる．$\langle A_m \mid m \in \omega\rangle \in {}^{\omega}U$ だとする．I の最初の手がある整数，例えば m で II のこれに対する対応は $\emptyset$ であるとし，この後各プレイヤーは $G(A_m)$ をプレイして，結果の評価も $G(A_m)$ でのようにする．II がこの新しいゲームで必勝法を持たなければならないことはすぐに分かり，そのような必勝法から，列 $\langle \tau_m \mid m \in \omega\rangle$ で各 τ_m が $G(A_m)$ での II の必勝法となっているようなものを抽出することができる（このやり方で AC_ω を回避できる）． ここで $G(\bigcap_m A_m)$ での II の必勝法が次のように記述できる：

$\omega \times \omega$ の帰納的なコーディングで $\langle\!\langle m, n\rangle\!\rangle \in \omega$ が m と n の順序対をコードしていたものを思い出そう．すべての $m, n \in \omega$ に対し，$\langle\!\langle m, n\rangle\!\rangle < \langle\!\langle m, n+1\rangle\!\rangle$ となっていると仮定してよい．II の i 番目の手（つまりゲームの全体では $(2i+1)$ 番目の手）で，$i = \langle\!\langle m, n\rangle\!\rangle$ なら，II は τ_m により，それまでの部分プレイに対応する．ただし，どちらかのプレイヤーが II の $\langle\!\langle m, n-1\rangle\!\rangle$ 番目の手（$n = 0$ のときには 0 番目の手）以降にとった手はまとめて I の一つの手と見なす．したがって，II の $\langle\!\langle m, 0\rangle\!\rangle$ 番目 $\langle\!\langle m, 1\rangle\!\rangle$ 番目 $\langle\!\langle m, 2\rangle\!\rangle$ 番目，... の手により，これから得られる集合が A_m に族すことが保証される．

(ii) はこの議論に基づいて得られる．$\langle A_a \mid a \in {}^{\omega}\omega\rangle \in {}^{{}^{\omega}\omega}U$ と仮定する．前と同じような補助的なゲームでプレイをする．ただし，I の最初の手は，実数 a とする．これにより列 $\langle \tau_a \mid a \in {}^{\omega}\omega\rangle$ で各 τ_a は $G(A_a)$ での II の必勝法となっているものが得られる．$G(\{X \in \mathcal{P}_{\omega_1}{}^{\omega}\omega \mid X \in \bigcap_{a \in X} A_a\})$ での II の必勝法は，ここで次のように記述することができる：A_a の可算集合で結果のプレイの和集合がこの中に入らなければならないようなものは，ゲームの進行にしたがって決定されるから，II は実数 a がどちらかのプレイヤーの手で現れたときには II が τ_a を無限回適用することを保証するような，手続きのくみ木細工を行う．前と同じように，τ_a を適用するのは，前に τ_a を適用してからの手を全部 I の一回分の手と見なしたものに対してである． ⊣

定理の結論が，AD からすでに導けるものかどうかはまだ分かっていない．マルティンは，1975 年に ZF で κ と κ^+ が両方とも可測基数なら，$\mathcal{P}_\kappa \kappa^+$ 上に正規超フィルターが存在することを示している．κ^+ 上の正規超フィルターを使って，$\kappa \leq \gamma < \kappa^+$ に対し，κ 上の正規超フィルターから標準的に定義できる $\mathcal{P}_\kappa \gamma$ 上の正規超フィルターをつなぎ合わせることができる（Di Prisco-Henle [78] を参照）．したがって，AD から ω_1 は “ω_2-超コンパクト” であることが導けるが，これは 28.22 でのゲームを小さな γ に対してまねることで，そのような γ に対する結論として得ることできる．一般的な理論の長足の進歩にともない，Harrington-Kechris [81] では，一様に Θ でおさえられた順序数をコードする実数をプレイするような，ある種のゲームは自然数の手を持つゲームでまねることができ，

したがってそのようなゲームは AD のもとで決定的になることが示されている．これはソロヴェイ・ゲームをこのようなゲームでまねることができ，したがって AD のもとで決定的であり，このことから，AD のもとで，$\mathcal{P}_{\omega_1}\delta$ 上の正規超フィルターが存在することを意味する．ここに $\delta < \Theta$ は Θ の定義可能性バージョンで，弱マーロ基数だが，それほど小さくないものである．ベッカー Becker [81] はソロヴェイ・ゲームの代わりにマルティンの超フィルターを M_{T} に応用して，同じ結果を得ており，Becker[81a] ではこのアプローチにより AD のもとで $\mathcal{P}_{\omega_2}\delta$ 上に正規超フィルターが存在することが帰結できることを示している．ベッカー Becker [81] はまた，AD のもとで，いくつかの γ に対し $\mathcal{P}_{\omega_1}\gamma$ 上に唯一の正規超フィルターが存在することを示しており，ウディン Woodin [83] は，この結果を，ソロヴェイの $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ での結果と AD におけるハリントン=ケクリスの結果の適用範囲にあるすべての γ に拡張している．

これらの様々な結果や 28.7 から我々は色々な結論を導き出したが，これらは AD における定義可能性の研究の一部となっている．そこで定義可能性の問題について，次の節で考察する．

§29　前整列順序

この節と次の節で，記述集合論での決定性の仮説の構造的な帰結について探究する．この方向の研究は Blackwell [67] で提唱され，モショヴァキスとマルティンによって最初に行われている．決定性それ自身を正則性と見なし，様々な Λ —— 特に射影的階層に現れるもの —— に対する $\mathrm{Det}(\Lambda)$ からの帰結の研究することは，§27 で現れたテーマの一つであったが，この研究は広く発展させられている．モショヴァキスの教科書 Moschovakis [80] に詳細な解説があり，1980 年代後半のはなばなしい成果以前の仕事については，Cabal Seminar の報告集にある次のような論文に見いだせる：Kechris-Moschovakis [78], Kechris-Martin-Moschovakis [81, 83], Kechris-Martin-Steel [88].

§§12, 13 での取り決めはここでも守られる．そこでと同じように，

$$\text{前提となる理論は ZF} + \mathrm{AC}_\omega({}^\omega\omega)\ \text{とする．}$$

AD から $\mathrm{AC}_\omega({}^\omega\omega)$ が導かれる (27.10) が，これの定義可能な実数の集合版は，12.4 の前の $(*)$ のうちの最初の同値性を与える．このことから，以下の決定性の仮説に関連したいくつかの結果は ZF だけで確立できることが分かる．しかしこの事実は深く追究しないことにする．他方 DC が使われるときには，このことを明言する．

ここでの考察の中心は射影的集合であり，この節の主要な部分を展開するには，PD つまり射影的決定性を仮定すれば十分である．いずれにしても，各個所で本当に必要となる決定性の仮説が何であるかを述べることにする．議論に一般性を持たせるために，**射影的クラス**とは，ある $1 \leq n \in \omega$ に対する $\mathbf{\Sigma}^1_n$ か $\mathbf{\Pi}^1_n$ のこととし，実効的な文脈では，ある $a \in {}^\omega\omega$ に対する $\Sigma^1_n(a)$ か $\Pi^1_n(a)$ を，古典的な関係 $\subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ に制限したものとして，これも単に $\Sigma^1_n(a)$ あるいは $\Pi^1_n(a)$ と呼ぶことにする．Γ がそのようなクラスのとき，$\neg\Gamma$ でこれの双対クラスを表す．つまり，

$$\neg\Gamma = \{A \mid \exists k \in \omega(A \subseteq {}^k({}^\omega\omega) \ \wedge \ {}^k({}^\omega\omega) - A \in \Gamma)\}$$

である．また，$\exists^1\Gamma$ と $\forall^1\Gamma$ で対応する量化子で修飾して得られるクラスを表す．つまり，

$$\exists^1\Gamma = \{A \mid \exists B \in \Gamma(A = pB)\},$$
$$\forall^1\Gamma = \neg\exists^1\neg\Gamma$$

である．例えば，$\exists^1\mathbf{\Pi}^1_3$ は $\mathbf{\Sigma}^1_4$ で，$\forall^1\Pi^1_3(a)$ は再び $\Pi^1_3(a)$ となる．この節を通じて有効なメタ変数をいくつか導入しておくと都合がよい；上と同じように，

Γ で射影的クラスを表し，

Δ_Γ で $\Gamma \cap \neg\Gamma$ を表す．

例えば，$\Delta_{\mathbf{\Sigma}^1_3}$ は $\mathbf{\Delta}^1_3$ となる．モショヴァキスの教科書 Moschovakis [80] では，結果はもっと抽象的な，閉包やその他の性質を持つ一般的なクラスに対して記述されているが，この一般化はここでの書き方に示唆されたものである．

次の簡単な観察により，射影的クラスに対する決定性の仮説とそれらのクラスの双対に対する決定性の仮説は別途に考えなくともよいことが分かる：

29.1 補題 Det(Γ) $\Leftrightarrow$ Det($\neg\Gamma$).

証明 任意の $A \subseteq {}^\omega\omega$ に対し，

$$A^- = \{\langle i\rangle^\frown x \mid i \in \omega \ \wedge \ x \in A\}$$

とおく．このとき，$G_\omega(A^-)$ での I の必勝法は，$G_\omega({}^\omega\omega - A)$ での II の必勝法に容易に書きかえられ，$G_\omega(A^-)$ での II の必勝法も容易に $G_\omega({}^\omega\omega - A)$ での I の必勝法に書きかえられる．ところが，$A^- \in \Gamma \ \Leftrightarrow \ A \in \Gamma$ である． ⊣

ブラックウェルの画期的な論法を説明して，それに適当な構造的なアプローチを始めるために，古典的な記述集合論で広く研究されている 2 つの簡単に述べられる性質について論じることにする．任意の A と B に対し，$\langle A^*, B^*\rangle$ が $\langle A, B\rangle$ を**分解する**とは，$A^* \subseteq A$, $B^* \subseteq B$, $A^* \cup B^* = A \cup B$ で，$A \cap B = \emptyset$ となることである．

Γ は**分解の性質**を持つ $\Leftrightarrow$ 任意の $A, B \in \Gamma$ に対し，A^*, B^* in Γ で $\langle A^*, B^*\rangle$ が $\langle A, B\rangle$ を分解するものが存在する．

Γ は**分離の性質**を持つ $\Leftrightarrow$ 任意の互いに素な $A, B \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ で $A, B \in \Gamma$ となるものに対し，$C \in \Delta_\Gamma$ で $A \subseteq C$ かつ $B \cap C = \emptyset$ となるものが存在する．

簡単な図を描いてみるとこれらの性質がよく理解できるであろう．次は命題論理の演習にすぎない．

29.2 演習 Γ が分解の性質を持てば，$\neg\Gamma$ は分離の性質を持つ． ⊣

汎用集合を用いる早くから知られていた論法をやき直すことで，次が得られる：

29.3 命題　(Novikov [35: 465], Addison [58]). Γ が分解の性質を持つなら，Γ は分離の性質を持たない．

証明　$U \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ を Γ に対する汎用集合として（12.7を参照），

$$A = \{\langle x, y\rangle \mid \langle (x)_0, y\rangle \in U\} \text{ かつ } B = \{\langle x, y\rangle \mid \langle (x)_1, y\rangle \in U\}$$

とおく．A と B は Γ に属すから，Γ に属す A^* と B^* を，$\langle A^*, B^*\rangle$ が $\langle A, B\rangle$ を分解するようにとる．Δ_Γ に属す C で $A^* \subseteq C$ かつ $B^* \cap C = \emptyset$ となるものがあったと仮定してみる．このときには，$C \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ は Δ_Γ で汎用集合となる：

任意の Δ_Γ に属す $D \subseteq {}^\omega\omega$ となるものに対し，$a \in {}^\omega\omega$ を任意の $y \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$y \in D \leftrightarrow \langle (a_0), y\rangle \in U \text{ かつ } y \notin D \leftrightarrow \langle (a)_1, y\rangle \in U$$

となる．このとき上のような y に対し，$\langle a, y\rangle \in A \Leftrightarrow \langle a, y\rangle \notin B$ となるから，$\langle a, y\rangle \in A^* \Leftrightarrow y \in D \leftrightarrow \langle a, y\rangle \in C$ となる．

ところが,（12.8の後で注意したように）カントルの対角線論法により Δ_Γ に対する汎用集合は存在しないから，これは矛盾である．　⊣

29.4 系　Γ が分解の性質を持つなら，$\neg\Gamma$ は分解の性質を持たない．

証明　29.2と29.3による．　⊣

ルジン Luzin [27: 50ff] は分離の性質を定式化し，$\mathbf{\Sigma}^1_1$ に対する分離の性質を確立している（13.5の前を参照）．クラトフスキーはその後分解の性質を定式化し，29.2によりルジンの結果の改良となっている次の結果を確立している．アディソンは，29.3でと同じように，後になってから，これの実効的なバージョンを指摘している．新しい視点から，ブラックウェルは開集合ゲームの決定性に基づく証明を与えている：

29.5 定理　(Kuratowski [36], Addison [58]). 任意の $a \in {}^\omega\omega$ に対し，$\Pi^1_1(a)$ は分解の性質を持つ．

証明　(Blackwell [67]). A と B が $\Pi^1_1(a)$ であるとし，簡単のために，$A, B \subseteq {}^\omega\omega$ とする．T と U を，13.1での $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の基本表現における $\omega \times \omega$ 上の木とする．つまり，任意の $z \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$A(z) \leftrightarrow T_z \text{ は整順的,}$$
$$B(z) \leftrightarrow U_z \text{ は整順的}$$

となっているとする．$z \in {}^\omega\omega$ に対し，自然数の手がプレイされる次のようなゲーム G^z を考える：

$$\begin{array}{lllll} I: & x(0) & & x(2) & & \ldots \\ II: & & x(1) & & x(3) & \ldots \end{array}$$

I が勝つのは，$i \in \omega$ で，$\langle z|i, x_I|i\rangle \in U_z$ かつ $\langle z|i, x_{II}|i\rangle \notin T_z$ となるとき，つまり，II

が T_z から落ちこぼれるまで，I が U_x の上に踏みとどまり，z が A に属すことを主張しているときとする．

$$A^* = \{z \in A \mid II \text{ は } G^z \text{ で必勝法を持たない}\},$$
$$B^* = \{z \in B \mid I \text{ は } G^z \text{ で必勝法を持たない}\}$$

とする．$z \in A - B$ なら，$z \in A^*$ である：$y \in [U_z]$ とすると，I の手が，$x(2i) = y(i)$, $i \in \omega$ となるようなプレイでは II が勝つことができないからである．同様に，$z \in B - A$ なら，$z \in B^*$ なら，$z \in B^*$ となる．最後に，$z \in A \cap B$ なら，I と II が同時に G^z で必勝法を持つことはできないから，$z \in A^* \cup B^*$ となる．以上の場合分けにより，$A \cup B = A^* \cup B^*$ が分かった．

次に，各 G^z では，I の勝ちは，有限の段階で確定するから，27.1 により（これの後の注意を参照），G^z は決定的である．したがって，$A^* \cap B^* = \emptyset$ となる．

最後に，13.1 での表現から，すべての $z \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$A^*(z) \leftrightarrow A(z) \wedge \forall\tau(\tau \text{ は } II \text{ の戦略 } \rightarrow \ldots)$$

となり，“...” は算術的にできる．したがって，A^* は $\Pi^1_1(a)$ である．同様に B^* も $\Pi^1_1(a)$ であることが分かり，これによって証明が完了した． ⊣

これは，古い結果の新しい証明がそれを取り巻く理論の再構成をうながす，という非凡な例となっている．アディソンとマルティンはすぐに射影的決定性を仮定するというアイデアに独立に到達している．$\mathbf{\Sigma}^1_2$ も分解の性質を持つ（29.9 の後を参照）という，やはり古典的な結果に照らしあわせて，二人はブラックウェルの証明を一般化して，Det($\mathbf{\Delta}^1_2$) から $\mathbf{\Pi}^1_3$ の分解の性質を導くことができることに気付いている．この後，マルティンとモショヴァキスは独立に，PD のもとで分解の性質が射影的クラスの階層の全体に伝播することを示している．ZFC のもとでは，分解の性質は $\mathbf{\Pi}^1_1$ と $\mathbf{\Sigma}^1_2$ で成り立つことしか保証されないことが分かってくるが，分解の性質が Γ と $\neg\Gamma$ の高々一方でしか成り立たない (29.4) ということを考えあわせると，PD は，すべての Γ に対し，Γ か $\neg\Gamma$ のどちらかに対して分解の性質が成り立つ，ということの自然な帰納的過程による推論を可能にするという意味で，正則性の仮説となっていると見ることができる．

前整列順序の性質

ブラックウェルの証明は，DC のもとで分解の性質が射影的階層にそって伝播することを示せるように一般化できたのではあったが，すぐに，同様の伝播の示せるより強い性質に注意が集まるようになる．この性質は，すでに 1964 年にモショヴァキスによって古典的な $\mathbf{\Pi}^1_1$ と $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合の順序数による解析から抽出されており，2 つの集合の間の関係でなく，集合に関する重要な分析であることから，ほどなく，より重要なものと見なされるようになる．これの定式化は幾つかの定義を経てなされる：

ある A 上の関係 $\preceq$ が（A の）**前整列順序**であるとは，$\preceq$ は A 上で反射的，推移的で連結的で（つまり，$\forall x, y \in A(x \preceq y \vee y \preceq x)$) が成り立ち）整順的であることである．し

たがって，このような $\preceq$ は，反対称性が成り立たない可能性，つまり，異なる $x, y \in A$ で $x \preceq y$ かつ $y \preceq x$ となるものがある可能性を除くと，A 上の整列順序のすべての条件を満たしている．$\preceq$ が文脈から明らかなときには，$\prec, \succeq$ および $\succ$ は期待されるような，派生的な意味を持つものとする．A 上の**ノルム**とは関数 ρ: $A \to \mathrm{On}$ のことである．このような ρ は

$$x \preceq_\rho y \quad \Leftrightarrow \quad \rho(x) \leq \rho(y)$$

と定義することにより A の前整列順序 $\preceq_\rho$ を惹き起こす．逆に，A の任意の前整列順序 $\preceq$ に対し，ノルム ρ: $A \to \mathrm{On}$ で，$\preceq_\rho = \preceq$ となるものが存在する．そのようなノルムのうちで自然なものは $\preceq$ のランク関数である（0.3 を参照）．これはその値域がある順序数となるようなノルムとなっている．

例として，U を集合 S 上の ω_1-完備な超フィルターとして，f, g: $S \to \mathrm{On}$ に対し，

$$f \preceq_U g \quad \Leftrightarrow \quad \{i \in S \mid f(i) \leq g(i)\} \in U$$

と定義する．DC を仮定すると，無限降下列が存在しないことにより整順性が導かれるから，$\preceq_U$ は前整列順序であることが分かる．これに対応するランク関数は，f を，その超巾（の推移的崩壊）での同値類 $[f]_U$ に対応させる関数である．

これに定義可能性を組み合せる．$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ に対し，ρ: $A \to \mathrm{On}$ が **Γ-ノルム**とは，Γ に属す R^+ と，$\neg\Gamma$ に属す R^- で，$R^+, R^- \subseteq {}^{2k}({}^\omega\omega)$ かつ，すべての $\mathbf{y} \in A$ に対し，

$$\mathbf{x} \in A \ \wedge \ \rho(\mathbf{x}) \leq \rho(\mathbf{y}) \quad \leftrightarrow \quad R^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \leftrightarrow \quad R^-(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

となるものが存在する，つまり，$\{\mathbf{x} \in A \mid \rho(\mathbf{x}) \leq \rho(\mathbf{y})\}$ が “$\mathbf{y}$ で一様に” Δ_Γ となることとする．Γ に属す A に対しては，これは，このノルムから惹き起こされる前整列順序 $\preceq_\rho$ が Γ に属す，という条件より強いが，$\preceq_\rho$ が Δ_Γ に属す，という条件よりは弱いものとなっている．最後に，

Γ が**前整列順序の性質**を持つとは，Γ に属すすべての A が Γ-ノルムを持つこととする．

この定義は射影的クラスよりもっと一般的なクラスに対して有効なものである．射影的クラスに対しては，代表的な集合一つについて考察すれば十分である：**Γ が前整列順序の性質を持つのは，Γ の普遍集合 $A \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ が Γ-ノルムを持つ，ちょうどそのときである**（$1 \leq k \in \omega$ に対し，任意の ${}^k({}^\omega\omega)$ の部分集合は，${}^\omega\omega$ の部分集合と位相同型になるが，後者は普遍集合のノルムから惹き起こされる Γ-ノルムを持つ）．

明瞭さにかけるかもしれないが，次の Γ-ノルムの有用な特徴付けはモショヴァキスの前整列順序の性質に別の光を投げかけることになる：

29.6 演習　A が Γ に属すとして，ρ: $A \to \mathrm{On}$ とする．このとき，ρ が Γ-ノルムとなるのは，次の 2 つの関係が Γ に属すものとなる，ちょうどそのときである：

$$\mathbf{x} \leq^*_\rho \mathbf{y} \ \leftrightarrow \ \ \mathbf{x} \in A \ \wedge \ (\mathbf{y} \in A \to \rho(\mathbf{x}) \leq \rho(\mathbf{y}))\,.$$
$$\mathbf{x} <^*_\rho \mathbf{y} \ \leftrightarrow \ \ \mathbf{x} \in A \ \wedge \ (\mathbf{y} \in A \to \rho(\mathbf{x}) < \rho(\mathbf{y}))\,.$$

ヒント　まず，R^+ と R^- が Γ-ノルムの定義でのようなものとするとき，

$$\mathbf{x} \leq^*_\rho \mathbf{y} \;\leftrightarrow\; \mathbf{x} \in A \;\wedge\; (R^+(\mathbf{x},\mathbf{y}) \vee \neg R^-(\mathbf{y},\mathbf{x})),$$
$$\mathbf{x} <^*_\rho \mathbf{y} \;\leftrightarrow\; \mathbf{x} \in A \;\wedge\; \neg R^-(\mathbf{y},\mathbf{x})$$

となることに注意する．

逆の証明には，

$$R^+(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;\leftrightarrow\; \mathbf{x} \leq^*_\rho \mathbf{y},$$
$$R^-(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;\leftrightarrow\; \neg(\mathbf{y} <^*_\rho \mathbf{x})$$

と置けばよい． ⊣

Γ-ノルム ρ は，$\leq^*_\rho$ と $<^*_\rho$ を基本として考えることにする．簡単な分解の手続きに必要となるのは，これらの関係である：

29.7 命題　(Kuratowski [36], Addison [58])．Γ が前整列順序の性質を持つなら，Γ は分解の性質を持つ．

証明　$A, B \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ が両方とも Γ に属していたとする．定値関数 $\hat{0}\colon \omega \to \{0\}$ と $\hat{1}\colon \omega \to \{1\}$ を使って，

$$R = (A \times \{\hat{0}\}) \cup (B \times \{\hat{1}\})$$

とおく．R は Γ に属すから，$\rho\colon R \to \mathrm{On}$ を Γ-ノルムとする．ここでのアイデアは，このノルムに関して，A の元であることと B の元であることのどちらが先に保証されるかを見るということである．$A^*, B^* \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ を

$$\mathbf{x} \in A^* \;\leftrightarrow\; \langle \mathbf{x}, \hat{0}\rangle \leq^*_\rho \langle \mathbf{x}, \hat{1}\rangle,$$
$$\mathbf{x} \in B^* \;\leftrightarrow\; \langle \mathbf{x}, \hat{1}\rangle <^*_\rho \langle \mathbf{x}, \hat{0}\rangle$$

により定義する．前の演習により，$\langle A^*, B^*\rangle$ は $\langle A, B\rangle$ を分解し，A^* と B^* は Γ に属すものとなることが分かる． ⊣

次は，13.1 での $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の基本表現の簡単な応用であり，実際にその由来は Luzin-Sierpiński [18] での $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合のもともとの順序数による解析にさかのぼることができる．

29.8 演習　任意の $a \in {}^\omega\omega$ に対し，$\Pi^1_1(a)$ は前整列順序の性質を持つ．

ヒント　$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ を $\Pi^1_1(a)$ として，T を ${}^k\omega \times \omega$ 上の木で，

$$A(\mathbf{w}) \;\leftrightarrow\; T_\mathbf{w} \text{ は整順的.}$$

となるものとする．$\rho\colon A \to \mathrm{On}$ を

$$\rho(\mathbf{w}) = \|T_\mathbf{w}\|$$

で定義する．$\|T_\mathbf{w}\|$ は整順的な木である $T_\mathbf{w}$ の高さであった．これが $\Pi^1_1(a)$-ノルムであ

ることは，13.7での，関係 $R^{\leqq}$ と $R^{<}$ に関する議論から導ける：そこでのパラメタ x を固定して，$\mathbf{y} \leq^*_\rho \mathbf{z}$ を $R^{\leqq}(0,x,y,z)$ に対応するようにとり，$\mathbf{y} <^*_\rho \mathbf{z}$ を $\neg R^{<}(0,x,z,y)$ に対応するようにとればよい．⊣

29.7から29.5が得られるが，これは本質的には後者の古典的な証明と一致する．

初期の記述集合論の研究者たちは，$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合の便利な表現定理（13.14を参照）を得るには至っていなかったが，ノヴィコフ Novikov [35] は順序数による解析の手法を $\mathbf{\Pi}^1_1$ から持ち上げることにより，$\mathbf{\Sigma}^1_2$ に関するいくつかの結果を得ている．モショヴァキスはこの持ち上げを組織的に記述している：

29.9 命題　(Novikov [35], Moschovakis). $\forall^1\Gamma \subseteq \Gamma$ で Γ は前整列順序の性質を持つとする．このとき，$\exists^1\Gamma$ も前整列順序の性質を持つ．したがって，すべての $a \in {}^\omega\omega$ に対し，$\Sigma^1_2(a)$ は前整列順序の性質を持つ．

証明

$$A(\mathbf{x}) \ \leftrightarrow\ \exists^1 w B(\mathbf{x}, w)$$

となっているとする．ここに B は Γ に入っているとする．ν を B の Γ-ノルムとし，$\rho\colon A \to \mathrm{On}$ を，

$$\rho(\mathbf{x}) = \min(\{\nu(\mathbf{x}, w) \mid B(\mathbf{x}, w)\})$$

により定義する．このとき，29.6を思い出して，

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \leq^*_\rho \mathbf{y} \ &\leftrightarrow\ \exists^1 w \forall^1 z(\langle \mathbf{x}, w\rangle \leq^*_\nu \langle \mathbf{y}, z\rangle), \\ \mathbf{x} <^*_\rho \mathbf{y} \ &\leftrightarrow\ \exists^1 w \forall^1 z(\langle \mathbf{x}, w\rangle <^*_\nu \langle \mathbf{y}, z\rangle) \end{aligned}$$

とすると，$\forall^1\Gamma \subseteq \Gamma$ により，これらの関係は，$\exists^1\Gamma$ に属す．⊣

この結果から，Kuratowski [36] の，$\mathbf{\Sigma}^1_2$ が分解の性質を持つ，という結果が導け，したがって，Novikov [35] の，$\mathbf{\Pi}^1_2$ は分離の性質を持つが，$\mathbf{\Sigma}^1_2$ はこの性質を持たない，という結果も導ける．この証明での前整列順序の整順性の重要性に注意したい．29.7では整順性は必要なかったが，前整列順序の性質の帰納的な伝播のためには，この性質が決定的な役割を果しているのである．

もっと高いレヴェルでは何が起こるのであろうか？ L は古典的な試みを限定しただけでなく，ZFCで無矛盾な状況の最初の解析を提供している．再び，一般的な記述をするための抽象的な概念の定義から始めることにする：

$\prec$ が，${}^\omega\omega$ 順序型 ω_1 を持つ（真の）整列順序である仮定して，$\mathrm{IS}^{\prec} \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ を

$$\mathrm{IS}^{\prec}(x,y) \ \leftrightarrow\ \{(x)_i \mid i \in \omega\} = \{z \in {}^\omega\omega \mid z \prec y\}$$

で与えられるものとする．$\prec$ が Γ に属すなら，$x \prec y \ \leftrightarrow\ x \neq y \ \wedge\ \neg(y \prec x)$ だから，*prec* は $\neg\Gamma$ にも属すことに注意する．したがって，このときには，

$$\mathrm{IS}^{\prec}(x,y) \ \leftrightarrow\ \forall^0 i((x)_i \prec y) \ \wedge\ \forall^1 z(z \prec y \to \exists^0 i(z = (x)_i))$$

により，$\mathrm{IS}^{\prec}$ は $\forall^1\Gamma \cap \forall^1\neg\Gamma$ に属す．次は，$\mathrm{IS}^{\prec}$ にさらに強い制限を課すものとなっている．

$\prec$ が **Γ-善良**であるとは，$\mathrm{IS}^{\prec}$ が Δ_Γ に属すこととする．

$\prec$ が Γ-善良なら，$\prec$ は Γ に属すことは，すぐに分かる．また，$\prec$ が Γ-善良となるのは，$\prec$ が ¬Γ-善良となる，ちょうどそのときである．

29.10 命題 $\neg\Gamma \subseteq \exists^1\Gamma$ として，${}^\omega\omega$ の $\exists^1\Gamma$-善良な整列順序が存在すると仮定する．このとき $\exists^1\Gamma$ は前整列順序の性質を持つ．

証明 A を $\exists^1\Gamma$ とする．簡単のために，$A \subseteq {}^\omega\omega$ として，Γ に属す，ある B に対し，

$$A(x) \leftrightarrow \exists^1 w B(x,w)$$

となっているとする．$\prec$ を Γ-善良な ${}^\omega\omega$ の整列順序として，$\prec_2$ をこれから惹き起こされる ${}^2({}^\omega\omega)$ の辞書式整列順序し，ν: ${}^2({}^\omega\omega) \to \mathrm{On}$ をこれに対応するランク関数とする．各 $x \in A$ に対し，w_x を $B(x,w)$ となるようなもののうちで，$\prec$ に関して最小のものとし，ρ: $A \to \mathrm{On}$ を

$$\rho(x) = \nu(w_x, x)$$

で定義する（$\rho(x)$ は簡単に w_x の $\prec$-ランクとしてとってもよいのであるが，ここでは，後での都合から，単射的なノルムが作られている）．このとき，

$$\begin{aligned} x <^*_\rho y \quad \leftrightarrow \quad & \exists^1 w(B(x,w) \ \wedge \ \exists^1 u(\mathrm{IS}^{\prec}(u,w) \wedge \forall^0 i \neg B(y,(u)_i))) \vee \\ & \exists^1 w[B(x,w) \ \wedge \ B(y,w) \ \wedge \\ & \qquad \exists^1 u(\mathrm{IS}^{\prec}(u,w) \wedge \forall^0 i(\neg B(x,(u)_i) \wedge \neg B(y,(u)_i)) \ \wedge \ x \prec y] \end{aligned}$$

となり，$\leq^*_\rho$ についても同様な記述ができる．$\neg\Gamma \subseteq \exists^1\Gamma$ により，これらの関係は，$\exists^1\Gamma$ に属すことが分かり，このことから命題が導かれる． ⊣

29.11 系 ${}^\omega\omega \subseteq L$ なら，すべての $a \in {}^\omega\omega$ と $2 \leq n \in \omega$ に対し，$\Sigma^1_n(a)$ は前整列順序の性質を持つ．

証明 13.11 により，${}^2({}^\omega\omega) \cap <_L$ は，${}^\omega\omega$ の Σ^1_2-善良な整列順序となっている． ⊣

Silver [71b: 440] により，もしすべての実数が可測性の内部モデル $L[U]$ に含まれていれば同じ結論を得られることが，後に明らかになる；20.17 により，これらのモデルでの実数の集合は同じものとなるからである．

29.12 系 ${}^\omega\omega \subseteq L[U]$ とする．このとき，すべての $a \in {}^\omega\omega$ と $2 \leq n \in \omega$ に対し，$\Sigma^1_n(a)$ は前整列順序の性質を持つ．

証明 29.9 により，$n = 2$ のときにはこの結果はいずれにしても成り立つ．$n > 2$ に対しては，20.20 により，${}^\omega\omega$ の Σ^1_3-善良整列順序が存在するからよい． ⊣

したがって，$V = L$ のとき，あるいは $V = L[U]$ となっているときにも，分解の性質

が $\mathbf{\Pi}^1_1$ で成り立つから，すべての $n \geq 2$ に対し，$\mathbf{\Sigma}^1_n$ で分解の性質が成り立つことが帰結できる．L に関しては，これは Addison [59] で明らかにされている．ノヴィコフ Novikov [51] は，$V = L$ なら，十分に大きな n に対し，$\mathbf{\Pi}^1_n$ で分離の性質が成り立つ，というこの方向での最初の結果を発表している．

$\mathbf{\Sigma}$ の側での，分解の性質の伝播は，${}^\omega\omega$ の整列順序で具合の良い定義可能性の性質を持つものが存在する，という外的な要素に依存している．アディソン Addison [74: 9-10] は 1967 年にこれと異なる可能性について推測しており，彼の注意は，予言的なものとなった．すぐ後で，PD のもとで，射影的階層にそって，分解の性質のもっと自然なパターンが確立され，しかも，ここでの論法は，自然な帰納的な伝播によるものだったからである．別のアプローチで，モショヴァキスは，あるゲームの戦略を用いることで，直接に前整列順序の性質の伝播を，実現している．これは，後に彼が**第一周期定理**と呼ぶことになるものである：

29.13 定理　(DC)(Martin [68]; Moschovakis – Addison-Moschovakis [68]). $\mathrm{Det}(\Delta_\Gamma)$ を仮定する．$\exists^1\Gamma \subseteq \Gamma$ で Γ は前整列順序の性質を持つとする．このとき，$\forall^1\Gamma$ も前整列順序の性質を持つ．

マルティンの証明とモショヴァキスの証明の両方を与えることにするが，その前に，この結果と，29.9 からの帰結で，PD により帰納的に前整列順序の性質が “ジグザグ” 型に伝播することを述べておく：

29.14 系　(DC). PD を仮定する．このとき任意の $a \in {}^\omega\omega$ に対し，次のクラスが前整列順序の性質を（したがって分解の性質も）持つ：

$$\begin{array}{ccccc} & \Sigma^1_2(a) & & \Sigma^1_4(a) & \cdots \\ \Pi^1_1(a) & & \Pi^1_3(a) & & \cdots \end{array}$$

⊣

L と $L[U]$ での硬直した状況とは違い，古典的な，$\mathbf{\Pi}^1_1$ から $\mathbf{\Sigma}^1_2$ へのジグザグの初めに続く分解の性質の無限の交換は，PD が古典的結果を自然に拡張し，射影的集合に関する主要な問題を解決するだけの強さを持った仮説となっているかもしれないことを示唆している．

次は，チューリング度を前整列順序に関して用いるマルティンの証明である．超巾たちから得られるランク関数を用いるというアイデアは，記述集合論での後の議論において決定的なものとなるのであるが，これがここで初めて用いられている（15.4 の後を参照）．

29.13 の最初の証明　簡単のために $A \subseteq {}^\omega\omega$ として，

$$A(x) \;\leftrightarrow\; \forall^1 w B(x, w)$$

となっているとし，B は Γ に属すものとする．ν を B 上の Γ-ノルムとする．28.4 のための用語を思い出して，$x \in A$ に対し，$s_x\colon \mathcal{D}_\mathrm{T} \to \mathrm{On}$ を

$$s_x(d) = \sup(\{\nu(x, w) + 1 \mid [w]_\mathrm{T} \leq d\})$$

で定義し，さらに $y \in A$ のとき，

$$Z_{xy} = \{d \in \mathcal{D}_{\mathrm{T}} \mid s_x(d) \le s_y(d)\}$$

とする．

まず，$a, x, y \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$s_x([a]_{\mathrm{T}}) \le s_y([a]_{\mathrm{T}}) \ \leftrightarrow\ \forall w \le_{\mathrm{T}} a \exists z \le_{\mathrm{T}} a(\nu(x,w) \le \nu(y,z))$$

となることに注意しておく．上での量化子は，(12.4 でのようにやるとして論理式と有限列のコードを用いて）還元の手続きをコードする数に関する算術的な量化子と考えることができる，というのはよく知られた論法である．したがって，ν が Γ-ノルムであることと定義から，

$$\{a \in {}^\omega\omega \mid [a]_{\mathrm{T}} \in Z_{xy}\}$$

は Δ_Γ に属すことが分かる．したがって，$\mathrm{Det}(\Delta_\Gamma)$ により，28.4 でのマルティンの証明から，すべての $x, y \in A$ に対し，

$$Z_{xy} \in M_{\mathrm{T}} \text{ となるか，あるいは，}\quad \mathcal{D}_{\mathrm{T}} - Z_{xy} \in M_{\mathrm{T}} \text{ となる．}$$

A 上の順序 $\preceq$ を

$$x \preceq y \quad\Leftrightarrow\quad Z_{xy} \in M_{\mathrm{T}}$$

で定義する．DC と M_{T} の ω_1-完備性から $\preceq$ は整順的であることが導けるから，$\preceq$ は前整列順序である．そこで，ρ: $A \to \mathrm{On}$ を対応するランク関数とする（ρ は A の元 x を On の M_{T} による超巾での対応する s_x によりランク付けする）．証明を完了するには，ρ が $\forall^1\Gamma$-ノルムであることを言えばよい．

最初に，$y \in A$ に対し，

$$\begin{aligned} x \in A \ \wedge\ \rho(x) \le \rho(y) \ \ &\leftrightarrow\ \ \exists^1 a \forall^1 b\,(a \le_{\mathrm{T}} b \ \rightarrow \\ &\qquad\qquad \forall w \le_{\mathrm{T}} b \exists z \le_{\mathrm{T}} b[B(x,w) \wedge \nu(x,w) \le \nu(y,z)]) \end{aligned}$$

である（任意の $w, a \in {}^\omega\omega$ に対し，$b \in {}^\omega\omega$ で，$w \le_{\mathrm{T}} b$ かつ $a \le_{\mathrm{T}} b$ となるものが常に存在し，したがって，$x \in A$ は実際に右辺から帰結できることに注意する）．$\le_{\mathrm{T}}$ を含む量化子は前に考察したように算術的であり，ν が Γ-ノルムであることから，関係 $[\ldots]$ は $\neg\Gamma$ に属す．よって，全体の関係は，$\exists^1\forall^1\neg\Gamma$ あるいはこれと同値な $\neg\forall^1\exists^1\Gamma$ に属し，したがって，$\exists^1\Gamma \subseteq \Gamma$ であることから，これは $\neg\forall^1\Gamma$ に属すことが分かる．

また，$y \in A$ に対し，

$$\begin{aligned} x \in A \ \wedge\ \rho(x) \le \rho(y) &\leftrightarrow\ x \in A \ \wedge\ \{d \in \mathcal{D}_{\mathrm{T}} \mid s_y(d) < s_x(d)\} \notin M_{\mathrm{T}} \\ &\leftrightarrow\ x \in A \ \wedge\ \forall^1 a \exists^1 b\,(a \le_{\mathrm{T}} b \ \wedge \\ &\qquad\qquad \exists w \le_{\mathrm{T}} b \forall z \le_{\mathrm{T}} b[\nu(y,z) \le \nu(x,w)]) \end{aligned}$$

となる．ν が Γ-ノルムであることから，$y \in A$ に対し，関係 $[\ldots]$ は Γ に属すから，全体

の関係は，$\forall^1\exists^1\Gamma$ に属し，$\exists^1\Gamma \subseteq \Gamma$ により，これは $\forall^1\Gamma$ に属す．したがって，$\forall^1\Gamma$-ノルムの定義が満たされていることが示せたので，これにより証明が完了した．　$\dashv$

29.9で古典的な議論が，新しいノルムを定義するために極小値をとるという便法で前整列順序の性質を $\mathbf{\Pi}^1_n$ から $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ へ持ちあげたように，マルティンは，極大値上で "積分する" ことにより，前整列順序の性質を $\mathbf{\Sigma}^1_n$ から $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ へ持ちあげる方法を発見たわけである．モショヴァキスは，特定の戦略により，極大値をもっと具体的にとることに成功しているが，ここでの論法は後に重要な拡張がなされることになる (30.8):

29.13の二番目の証明　再び $A \subseteq {}^\omega\omega$ で，

$$A(x) \;\leftrightarrow\; \forall^1 w B(x,w)$$

と仮定し，B は Γ に属するものとする．

$x, y \in {}^\omega\omega$ に対し，自然数の手を持つ次のゲーム $G(x,y)$ を考える：

$$\begin{array}{lcccccc} I\ : & t(0) & & t(2) & & \ldots \\ II: & & t(1) & & t(3) & \ldots \end{array}$$

II が勝つのは，(a) $\neg B(y, t_{II})$ となるときか，あるいは，(b) $B(x, t_I)$ で $\nu(x, t_I) \le \nu(y, t_{II})$ となるときとする．このゲームは決定的である：$y \notin A$ なら，II は (a) が成り立つようにすることで常に勝つことができる．$y \in A$ とのきには，(a) が成立することはないが，Γ-ノルムの定義から，(b) によるペイオフの集合は Δ_Γ に属すものになっていて，$\mathrm{Det}(\Delta_\Gamma)$ が仮定されていたのだった．

A 上の $\preceq$ を

$$x \preceq y \;\leftrightarrow\; II \text{ は } G(x,y) \text{ で必勝法を持つ}$$

により定義する．したがって，$x \preceq y$ となるのは，II の必勝法 τ が存在して，任意の $w \in {}^\omega\omega$ に対し，$\nu(x,w) \le \nu(y, (w * \tau)_{II})$ となる，という意味で，$\sup(\{\nu(x,w) \mid w \in {}^\omega\omega\}) \le \sup(\{\nu(y,z) \mid z \in {}^\omega\omega\})$ が一様に成り立つときである．

$\preceq$ が A の前整列順序となっていることは，性質を一つ一つ確かめてみれば分かる：

$\preceq$ は反射的である： $x \in A$ に対し，$G(x,x)$ で，II は I の手をコピーするという単純な必勝法を持つ．

$\preceq$ は推移的である： $x, y, z \in A$, $x \preceq y$ で $y \preceq z$ となっているとする．τ_1 を $G(x,y)$ での II の必勝法として，τ_2 を $G(y,z)$ での II の必勝法とするとき，II の戦略 τ で，任意の $w \in {}^\omega\omega$ に対し

$$(w * \tau)_{II} = ((w * \tau_1)_{II} * \tau_2)_{II}$$

となるものがあれば，これから，

$$\nu(x,w) \le \nu(y, (w * \tau_1)_{II}) \le \nu(z, (w * \tau)_{II})$$

となり，このような τ が $G(x,z)$ での II の必勝法となることが分かって，$x \preceq z$ が帰結できる．ところが，これは簡単に実現できる：

まず最初の手として，$\tau(\langle i\rangle)=\tau_2(\langle\tau_1(\langle i\rangle)\rangle)$. とする．一般には，$II$ は $G(x,y)$ と $G(y,z)$ の部分プレイをメモしておき，I の $G(x,z)$ での手を $G(x,y)$ での手だと見なし，τ_1 により，これに対する対応を $G(y,z)$ の I の次の手として取り，これに τ_2 で応えればよい．

$\preceq$ は連結している： $x,y\in Z$ で，$\neg(x\preceq y)$ となっているとする．決定性により，このときには $G(x,y)$ で I が必勝法 σ を持ち，$x,y\in A$ だから，すべての $w\in{}^{\omega}\omega$ に対し，$\nu(x,(\sigma*w)_I)>\nu(y,w)$ となる．$G(y,x)$ での II の戦略 τ で，任意の $w\in{}^{\omega}\omega$ に対し，

$$(\sigma*w)_I=(w*\tau)_{II}$$

となるものが見つかれば，

$$\nu(y,w)<\nu(x,(\sigma*w)_I)=\nu(x,(w*\tau)_{II})$$

となるから，このような τ は $G(y,x)$ での II の必勝法となり，$y\preceq x$ がいえる．ところが，これは簡単に実現できる：

$\tau(\langle i\rangle)=\sigma(\emptyset)$ とおき，一般には，

$$\tau(\langle s(0),\ldots,s(2n+2)\rangle)=\sigma(\langle s(1),s(0),s(3),s(2),\ldots,s(2n+1),s(2n)\rangle)$$

とする．各手で II はとりあえず I の前の手 $s(2n+2)$ を無視して，それまでの続きの奇数番目の手と偶数番目のを入れかえたものを考えこれに σ で応えればよい．

$\preceq$ は整順的である： そうでないとして，DC により，$x_0\succ x_1\succ x_2\ \ldots$ がすべて A に属すと仮定する．ここで，連結性から，$x\succ y\ \Leftrightarrow\ \neg(x\preceq y)$ である．各 $i\in\omega$ に対し，σ_i を $G(x_i,x_{i+1})$ での I の必勝法とする．したがって，任意の $w\in{}^{\omega}\omega$ に対し，$\nu(x_i,(\sigma_i*w)_I)>\nu(x_{i+1},w)$ が成り立つ．すべての $i\in\omega$ に対し，$G(x_i,x_{i+1})$ のプレイ t_i を同時に生成する．ただし I は $G(x_i,x_{i+1})$ で σ_i によりプレイするとし，II の $G(x_i,x_{i+1})$ の n 番目の手（ゲーム全体では $2n+1$ 番目の手）は I の $G(x_{i+1},x_{i+2})$ での n 番目の手（このゲーム全体では $2n$ 番目の手）とする．このとき，すべての $i\in\omega$ に対し，$(t_i)_{II}=(t_{i+1})_I$ となるから，

$$\nu(x_0,(t_0)_I)>\nu(x_1,(t_0)_{II})=\nu(x_1,(t_1)_I)>\nu(x_2,(t_1)_{II})=\nu(x_2,(t_2)_I)>\ \ldots$$

となり，矛盾である．

あとは，$\preceq$ に対応するノルム ρ が $\forall^1\Gamma$-ノルムであることを確かめればよい．$y\in A$ とすると，II は $G(x,y)$ で必勝法を持つなら，$x\in A$ となる（そうでなければ，$\neg B(x,w)$ となるような任意の w に対し，$w*\tau$ はゲームのルールにより II の負けのプレイとなってしまう）．したがって，

$$\begin{aligned}x\in A\ \wedge\ \rho(x)\le\rho(y)\ &\leftrightarrow II\text{ は }G(x,y)\text{ で必勝法を持つ}\\&\leftrightarrow\exists\tau\forall^1 w(\tau\text{ は }II\text{ の戦略}\ \wedge\\&\qquad[B(x,w)\ \wedge\ \nu(x,w)\le\nu(y,(w*\tau)_{II})])\end{aligned}$$

となる．戦略は実数でコードでき，ν は Γ-ノルムだから，関係 $[\ldots]$ は $\neg\Gamma$ に属す．したがって，全体の関係は，$\exists^1\forall^1\neg\Gamma$ に属すが，これは $\neg\forall^1\exists^1\Gamma$ に属すことと同値であるが，

$\exists^1\Gamma \subseteq \Gamma$ だから，この関係が $\neg\forall^1\Gamma$ に属すことが帰結される．

同様に，

$$\begin{aligned} x \in A \ \wedge\ \rho(x) \leq \rho(y) \ &\leftrightarrow I \text{ は } G(x,y) \text{ で必勝法を持つ} \\ &\leftrightarrow \forall\sigma\exists^1 z(\sigma \text{ は } I \text{ の戦略 } \rightarrow \\ &\qquad [B(x,(\sigma * z)_I) \wedge\ \nu(x,(\sigma * z)_I) \leq \nu(y,z)]) \end{aligned}$$

となる．v は Γ-ノルムだから，$[\ldots]$ は Γ となり，全体の関係は $\forall^1\exists^1\Gamma$ で，$\exists^1\Gamma \subseteq \Gamma$ により，これは，$\forall^1\Gamma$ に属すことが分かる．したがって，$\forall^1\Gamma$-ノルムの定義が満たされるとが確かめられたから，これにより証明が完了した．　⊣

この節を終える前に，これまでで考察した構造的性質の，全面的な AD のもとでの，より一般的なクラスにおける状況について述べておくことにする．これらの結果は，ワッジ William Wadge が彼のバークレイでの学位論文 Wadge [83] に向けての研究で 1968 年に得ているものである．$A, B \subseteq {}^\omega\omega$ に対し，

$$A \leq_{\mathrm{W}} B \quad \Leftrightarrow \quad \text{ある連続関数 } f\colon {}^\omega\omega \to {}^\omega\omega \text{ により } A = f^{-1}(B) \text{ とできる}$$

つまり，A は B の連続な逆像となっていることとする．次は**ワッジの補題**である：

29.15 補題 (Wadge [72])．AD を仮定する．$A, B \subseteq {}^\omega\omega$ とする．このとき，$A \leq_{\mathrm{W}} B$ となるか，あるいは，$B \leq_{\mathrm{W}} {}^\omega\omega - A$ となるかのどちらかである．

証明　自然数の手を持つ次のワッジ・ゲームを考える：

I :	$x(0)$		$x(2)$		$\ldots$
II :		$x(1)$		$x(3)$	$\ldots$

II が勝つのは，$x_I \in A \Leftrightarrow x_{II} \in B$ となるときとする．τ が II の必勝法なら，$z \in A \Leftrightarrow (z * \tau)_{II} \in B$ がすべての $z \in {}^\omega\omega$ に対し成り立つ．明らかに，z を $(z*\tau)_{II}$ に対応させる写像は連続だから，$A \leq_{\mathrm{W}} B$ となる．他方，もし σ が I の必勝法なら，$(\sigma * y)_I \notin A \Leftrightarrow y \in B$ がすべての $y \in {}^\omega\omega$ に対し成り立つから，上と同様に，$B \leq_{\mathrm{W}} {}^\omega\omega - A$ が分かる．　⊣

この簡単だが，多くを明かしている補題により，AD による ${}^\omega\omega$ の任意の部分集合の間の基本的な連結性が確立された．この補題の，太字の Γ 版および局所的な Γ 版を得るためには，$\Gamma - \neg\Gamma$ に属す任意の $B \subseteq {}^\omega\omega$ は，すべての Γ の元 $A \subseteq {}^\omega\omega$ に対し，$A \leq_{\mathrm{W}} B$ となる，という意味で完全である（もしそうでなくて $B \leq_{\mathrm{W}} {}^\omega\omega - A$ だったとすると，連続関数が簡単に定義できることから，B が $\neg\Gamma$ の元となってしまう），ということに留意すればよい．

$\Lambda \subseteq \bigcup_{k\in\omega} \mathcal{P}({}^k({}^\omega\omega))$ に対し，

Λ が**連続的に閉じている**とは，Λ が連続的な逆像で閉じていること

つまり，$B \in \Lambda$ で $A \leq_{\mathrm{W}} B$ なら，$A \in \Lambda$ となることとする．射影的クラスでの用語を任

意の $\Lambda \subseteq \bigcup_{k\in\omega}\mathcal{P}({}^k({}^\omega\omega))$ に対し拡張して，例えば，$\neg\Lambda$ を予想される意味のものとするとき，

$$\Lambda \text{ は非自己双対} \quad \Leftrightarrow \quad \neg\Lambda \neq \Lambda$$

とする．つぎに，$A, B \subseteq {}^\omega\omega$ に対し，

$$A \equiv_{\mathrm{W}} B \quad \Leftrightarrow \quad A \leq_{\mathrm{W}} B \wedge B \leq_{\mathrm{W}} A,$$
$$[A]_{\mathrm{W}} = \{C \subseteq {}^\omega\omega \mid C \equiv_{\mathrm{W}} A\}$$

とする．同値類 $[A]_{\mathrm{W}}$ はワッジ度と呼ばれている．ワッジは，彼のずっと後になって出た学位論文 Wadge [83] でボレル集合のワッジ度の詳細な研究を対応する決定性の仮定のもとに行っている．特に，この研究で，ボレル集合上 $\leq_{\mathrm{W}}$ が整順的であることが明らかにされている．モンク Leonard Monk は必勝法をうまく使ったこのことの短い証明を見つけており，これを AD で応用して，マルティンは 1973 年に基本的な構造定理を確立している：

29.16 定理　(DC)(Martin, Monk). AD を仮定する．このとき，$\leq_{\mathrm{W}}$ は整順的関係となる．

ファン・ウェセプ Van Wesep [78a] はワッジ度の本質的な役割を明らかにし，この定理の新しい証明を与えている．ここでの仮定とワッジの補題により，各ワッジ度をその双対クラス一緒にすると，$\leq_{\mathrm{W}}$ はこれにより得られるクラスの族を整列する: $\leq_{\mathrm{W}}$ の各ランクはちょうど一つのワッジ度となるか，一つのワッジ度とその双対クラスが非自己双対の場合にはそれらの和となる．$\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$, $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi$, $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$, $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ の各クラスは，連続的に閉じていることがすぐに分かるから，これらの $\mathcal{P}({}^\omega\omega)$ への制限は，$\leq_{\mathrm{W}}$ に関しての始片となる．決定性は，連続還元性による $\mathcal{P}({}^\omega\omega)$ の最終的な，細かな階層化を与えているわけである．

この背景のもとで，次のいくつかの結果は AD のもとでの分離の性質と分解の性質の異様な振る舞いを明瞭に示している：まずファン・ウェセプ Van Wesep [78] は Λ が連続的に閉じており，非自己双対なら，Λ と $\neg\Lambda$ の高々一つしか分離の性質を持てないことを注意している．この後，スティール Steel [81] は，そのような Λ に対しては，Λ か $\neg\Lambda$ の少なくとも一方が分離の性質を持つことを示した．29.2 と 29.3 での議論は分解の性質と分離の性質を関連付け，もし Λ に対する汎用集合が存在するなら，Λ と $\neg\Lambda$ のうち高々一つしか分解の性質を持てないことを示していた．Λ が連続的に閉じていて，非自己双対なら，Λ に対する汎用集合が存在することが分かっている．しかしながらファン・ウェセプ Van Wesep [78a: 163] は このようなら Λ で，Λ も $\neg\Lambda$ も分解の性質を持たないようなものも存在することを指摘している．前の結果を改良して，スティール Steel [81] は，この後，もし Λ が連続的に閉じていて，非自己双対で，かつ，有限和をとることに関して閉じているなら，Λ と $\neg\Lambda$ の少なとも一方は分解の性質を持つことを示している．

ZF + DC + AD のもとでの一般的なクラスに関するさらに多くの結果が間もなく確立されている：Kechris-Solovay-Steel [81] では前整列順序の性質の度合が研究されており，例えば $\Lambda \subseteq L(\mathbb{R})$ が非自己双対で実数の量化子に関して閉じていれば，Λ か $\neg\Lambda$ のどちらかは前整列順序の性質を持つことが示されている．スティール Steel [81a] は非自己双対

な Λ の閉包性を Δ_Λ のそれに基づいて示している．ベッカー Becker [88] は様々な Λ のカテゴリーと測度の量化子での閉包性を確立している．

ZF + DC の文脈でのより細密な仕事としては，**ボレル=ワッジ決定性**を，任意のボレル集合の組 $A, B \subseteq {}^\omega\omega$ に対し，（ワッジの補題の証明でのような）ワッジ・ゲーム $\mathrm{WG}(A, B)$ は決定的である，という命題とする．これのみを仮定して，ルボー Alain Louveau [83] はワッジの学位論文 Wadge [83] を再構成して，ボレル集合のワッジ度を記述している．この後ルボーとサン・レイモンド Jean Saint-Raymond（Louveau-Saint-Raymond [87, 88] を参照）はボレル=ワッジ決定性は2階の算術ですでに証明可能である，という予期しない結果を得ている．

§30　スケール，射影的順序数 と $L(\mathbb{R})$

この節でも§29で始めた記述集合論における決定性の仮説からの構造的な帰結についての探究を続ける．参考文献や取り決めは§29でと同様であり，そこでと同じように，

前提となる理論は ZF + $\mathrm{AC}_\omega({}^\omega\omega)$ とする．

ここでの異なるのは，より複雑な状況を取扱うことと，主要な展開のきびきびとした記述をするためにいくつかの証明を省略することである．最後には，最近の結果を概観するが，ここで特に注目されるべき事項は $L(\mathbb{R})$ に関するものである．

前の節での前整列順序の理論で答えていなかった問題の一つに：単層化についてはどうであるのか？ がある．前節の一般的な道具立てを用いて，

Γ は**単層化の性質**を持つ $\Leftrightarrow$
Γ に属するすべての ${}^2({}^\omega\omega)$ の部分集合は Γ に属す集合により単層化できる

とする．したがって，$\mathbf{\Pi}^1_1$ は単層化の性質を持つ．29.7の証明でのようなコード化された和集合を用いると，**Γ が単層化の性質を持つなら Γ は分解の性質を持つ**ことがすぐに分かる．

マルティンは Martin [68: 689] で PD のもとでは単層化の性質も分解の性質と同じジグザグのパターンで成り立つという仮説を立てている．近藤 (13.17) とマルティン=ソロヴェイの単層化の議論を分析して，モショヴァキスは，1971年に単層化の性質の伝播に都合の良い前整列順序の性質の強化となっている性質を抽出している．多少技術的ではあるが，この新しい性質は，様々な異なる実数の集合のクラスに対し，決定性の本質的な様相を抽出するものとなっており，すぐに中心的な役割を果たすものと見なされるようになった．これの定式化にはいくつかの定義が必要となる：

$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ と順序数 γ に対し，**スケール**とは，ノルム：$A \to \gamma$ の列 $\langle \rho_n \mid n \in \omega \rangle$ で次の性質を満たすもののことである．

$$\{\mathbf{x}_i \mid i \in \omega\} \subseteq A \text{ で } \lim_{i\to\omega} \mathbf{x}_i = \mathbf{x}\,,$$

として，$g\colon \omega \to \gamma$ で

すべての $n \in \omega$ と十分に大きな $i \in \omega$ に対し，$\rho_n(\mathbf{x}_i) = g(n)$ となる

ものが存在すると仮定する．このとき，

$\mathbf{x} \in A$ で，すべての $n \in \omega$ に対し，$n \in \omega$ が成り立つ．

ここで，$\lim_{i\to\omega}$ は ${}^k({}^\omega\omega)$ の位相に関する普通の意味の収束で考えている．したがってこれは，A での位相的な収束とノルムの収束が A の元であることと，ノルムに関する半連続性を帰結する．A から γ への**スケール**というような言い方をしたときには，ここに含まれるパラメタを明言するものとなる．

前整列順序の性質のときと同じように，これに定義可能性が組み合わされる：まず最初に，$n \in \omega$ に対し，$\hat{n}$ を定値関数 $:\omega \to \{n\}$ とする．このとき，A 上のスケール $\langle \rho_n \mid n \in \omega \rangle$ が **Γ-スケール**であるとは，Γ と $\neg\Gamma$ に属す R^+，$R^- \subseteq {}^{2k+1}({}^\omega\omega)$ で，すべての $\mathbf{y} \in A$ と $n \in \omega$ に対し，

$$\mathbf{x} \in A \ \wedge \ \rho_n(\mathbf{x}) \le \rho_n(\mathbf{y}) \ \leftrightarrow \ R^+(\hat{n}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \ \leftrightarrow \ R^-(\hat{n}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$$

となるものが存在することとする．29.6 と類似の次の命題が成り立つことは容易に確かめられる：

30.1 演習　A は Γ に属すとして，$\langle \rho_n \mid n \in \omega \rangle$ を A 上のスケールとする．このとき，これが Γ-スケールとなるのは次の 2 つの関係が Γ に属す，ちょうどそのときである：

$$S_{\le}(\hat{n}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \ \leftrightarrow \ \mathbf{x} \le^*_{\rho_n} \mathbf{y}\,,$$
$$S_{<}(\hat{n}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \ \leftrightarrow \ \mathbf{x} <^*_{\rho_n} \mathbf{y}\,.$$

⊣

最後に，

Γ が**スケールの性質**を持つとは，Γ に属するすべての集合が Γ-スケールを持つこと

とする．

次の便利な特徴付けがスケールの概念の動機付けを与える．§13 での用語を再び用いて，γ 上の木 T で，**善良な左はじの枝**とは，$f \in [T]$ で，任意の $g \in [T]$ に対し，$f(i) \le g(i)$ がすべての $i \in \omega$ に対し成り立つことであった．このような枝は $\mathbf{\Pi}^1_1$ 単層化定理 13.17 の証明で用いられていて，Kechris [81] で強調されている．$[T] \ne \emptyset$ となる木 T では常に辞書式順序で最小の，あるいは左はじの，枝を持つが，善良な左はじの枝を持つとは限らない．${}^k\omega \times \gamma$ 上の木 T に対しては，T が**善良な左はしの枝たちを持つ**とは，すべての $\mathbf{x} \in p[T]$ に対し，$T_\mathbf{x}$ が善良な左はしの枝を持つときとする．

30.2 命題　任意の $A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ に対し，A から γ へのスケールが存在するのは，善良な左はしの枝たちを持つ ${}^k\omega \times \gamma$ 上の木 T で $A = p[T]$ となるものが存在する，ちょうどそのときである．

証明　簡単のために $k = 1$ として，まず初めに $\langle \rho_n \mid n \in \omega \rangle$ が A から γ へのスケールであると仮定してみる．

$$T = \{\langle x|i, \langle \rho_0(x), \ldots, \rho_{i-1}(x)\rangle\rangle \mid x \in A\}$$

とおく．このとき T は ${}^k\omega \times \gamma$ 上の木で，$A \subseteq p[T]$ となる．実際には，$A = p[T]$ が成り立つ：ある $x \in {}^\omega\omega$ に対し，$g \in [T_x]$ とすると，ある $\{x_i \mid i \in \omega\} \subseteq A$ に対し，$\langle x_i|i, \langle \rho_0(x_i), \ldots, \rho_{i-1}(x_i)\rangle\rangle = \langle x|i, g|i\rangle$ がすべての $i \in \omega$ に対し成り立つ．$\lim_{i\to\omega} x_i = x$ で，$n < i \in \omega$ に対し $\rho_n(x_i) = g(n)$ となるから，スケールの定義により $x \in A$ である．また，すべての $n \in \omega$ に対し，$\rho_n(x) \leq g(n)$ となるから，$\langle \rho_n(x) \mid n \in \omega\rangle$ は $[T_x]$ の善良な左はしの枝であることが分かる．

逆を示すために，$\omega \times \gamma$ 上の木 T で，すべての $x \in A$ に対し，T_x の善良な左はしの枝 f_x が存在するようなものがあって，$A = p[T]$ となっているとしてみる．各 $n \in \omega$ に対し，ノルム $\rho_n\colon A \to \gamma$ を，

$$\rho_n(x) = f_x(n)$$

で定義する．今，$\{x_i \mid i \in \omega\} \subseteq A$ で，$\lim_{i\to\omega} x_i = x$ かつ $g\colon \omega \to \gamma$ を，すべての n と十分に大きな i に対し $\rho_n(x_i) = g(n)$ が常に成り立つようなものとする．このときには，$\langle x, g\rangle \in [T]$ となることが容易に分かる．したがって，$x \in A$ で，すべての n に対し，$\rho_n(x) = f_x(n) \leq g(n)$ が成り立つ．　⊣

このように，A 上の Γ-スケールは，善良な左はしの枝たちを持ち Γ 定義可能性の条件を満たすような，ある T により $p[T]$ とあらわせる，という A の表現を与える．この条件が単層化とどのように関連するかは，原形が $\mathbf{\Pi}^1_1$ 単層化定理の証明に見いだされる，次の2つの結果により明らかになる．

30.3 演習　任意の $a \in {}^\omega\omega$ に対し，$\Pi^1_1(a)$ はスケールの性質を持つ．

ヒント　$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ を $\Pi^1_1(a)$ として，${}^k\omega \times \omega$ 上の木 T を

$$A(\mathbf{w}) \;\leftrightarrow\; T_{\mathbf{w}} \text{ は整順的}$$

となるようにとる．13.14 での議論により，これに対応する ${}^k\omega \times \omega_1$ 上の木 $\hat{T}$ で，

$$A(\mathbf{w}) \;\leftrightarrow\; \exists g \in {}^\omega\omega_1(\mathbf{w}, g) \in [\hat{T}])$$

となり，g が順序を保存する写像：$T_{\mathbf{w}} \to \omega_1$ を与え $T_{\mathbf{w}}$ の整順性を保証するようなものが得られる．13.17 の証明で述べたように $A(\mathbf{w})$ のときには，$\hat{T}$ は，

$$g_{\mathbf{w}}(n) = \begin{cases} \rho_{T_{\mathbf{w}}}(\mathbf{s}_n) & \mathbf{s}_n \in T_{\mathbf{w}} \text{ のとき}, \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

で与えられる善良な左はしの枝を持つ．30.2 の証明から，$\rho_n(\mathbf{w}) = g_{\mathbf{w}}(n)$ で定義される $\langle \rho_n \mid n \in \omega\rangle$ は A 上のスケールであることが分かる．最後に，これが $\Pi^1_1(a)$-スケールであることは，13.7 での $R^{\leq}$ と $R^{<}$ に関する議論から分かる：30.1 でのように，$R^{\leq}(i, x, y, z)$ に対応するように $S_{\leq}(\hat{i}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ をとり，$R^{<}(i, x, y, z)$ に対応するように $S_{<}(\hat{i}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ をとる．

⊣

30.4 命題 (Moschovakis [71]). $\forall^1\Gamma \subseteq \Gamma$ で，Γ がスケールの性質を持つなら，Γ は単層化の性質を持つ．

証明 $A \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ が Γ に属し，$\langle \rho_n \mid n \in \omega \rangle$ は A から，例えば γ への Γ-スケールとする．また $R^+ \in \Gamma$ と $R^- \in \neg\Gamma$ をこれに対応する関係とする．30.2 の証明から，このスケールに対応する，善良な左はしの枝たちを持つ ${}^2\omega \times \gamma$ 上の木 T で $A = p[T]$ となるものが具体的に構成できる．定義可能性の条件をうまく使うと，13.17 の証明と同様に，次のようにして単層化を行うことができる：

$A_0 \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ を，

$$\begin{aligned} A_0(x,y) \ \leftrightarrow \ & A(x,y) \ \wedge \ \forall^1 z \forall^0 m[(\overline{y}(m) = \overline{z}(m) \\ & \wedge \forall^0 n < m(R^-(\hat{n},x,y,x,z) \ \wedge \ R^-(\hat{n},x,z,x,y)) \\ & \to (y(m) < z(m) \ \vee \ (y(m) = z(m) \wedge R^+(\hat{m},x,y,x,z)))] \end{aligned}$$

と定義する．R^+ と R^- の定義可能性と Γ に関する仮定から，この関係は Γ に属すことが分かる．さらに，もし $A(x,y)$ かつ $A(x,z)$ なら，$R^-(\hat{n},x,y,x,z) \wedge R^-(\hat{n},x,z,x,y))$ は，$\rho_n(x,y) = \rho_n(x,z)$ と同値になり，$R^+(\hat{m},x,y,x,z)$ は $\rho_m(x,y) \leq \rho_m(x,z)$ と同値になる．T の構成から，x に対し，$A_0(x,y)$ は左はじの組み $\langle y,g \rangle$ で $\langle x,y,g \rangle \in T$ となるようなものがある場合にはこれを選んでいる．したがって，証明が完了した． ⊣

前の議論により，別の状況でのスケールの存在が導ける：

30.5 演習 $\neg\Gamma \subseteq \exists^1\Gamma$ で，${}^\omega\omega$ の $\exists^1\Gamma$-善良な整列順序が存在するとする．このとき $\exists^1\Gamma$ はスケールの性質を持つ．特に，${}^\omega\omega \subseteq L$ である場合，または，ある可測性の内部モデル $L[U]$ で ${}^\omega\omega \subseteq L[U]$ である場合にも，任意の $a \in {}^\omega\omega$ と $2 \leq n \in \omega$ に対し，$\Sigma^1_n(a)$ はスケールの性質を持つ．

ヒント 29.10 の証明を思い出す．そこで与えられていたノルム ρ は単射的だったので，$\langle \rho \mid n \in \omega \rangle$ がスケールになることが容易に確かめられる．さらに，30.1 により，これは Γ-スケールである．二番目の主張は 29.11 と 29.12 でと同じように導ける． ⊣

L での単層化の性質は，13.19 による方が，30.4 と 30.5 によるものより直接的に確立できることを注意しておく．

次の結果では，我々の定義を一時的に拡大解釈して，"$\Delta^1_n(a)$-スケール" を期待されるような意味で考えることにする．

30.6 演習 (Mansfield [71], Martin-Solovay [69]). $\forall a \in {}^\omega\omega(a^\#$ が存在する) を仮定する．このとき，任意の $b \in {}^\omega\omega$ に対し，すべての $\Pi^1_2(b)$ 集合は u_ω への $\Delta^1_3(b)$-スケールを持つ．

ヒント 30.3 でと同じように，しかし 15.14 を用いて，特に，そこの最後で挿入された注意を用いて議論すればよい． ⊣

スケールの性質は前整列順序の性質と同じように伝播するが，このことも，決定性でのジグザグのパターンを擁護するものとなっている．次は 29.9 と類似の結果である：

30.7 演習　(Moschovakis [71]). $\forall^1\Gamma \subseteq \Gamma$ で，Γ はスケールの性質を持つと仮定する．このとき，$\exists^1\Gamma$ もスケールの性質を持つ．したがって，すべての $a \in {}^\omega\omega$ に対し，$\Sigma^1_2(a)$ はスケールの性質を持つ．

ヒント　簡単のために $A \subseteq {}^\omega\omega$ として，ある Γ に属す B に対し，

$$A(x) \leftrightarrow \exists^1 w B(x, w)$$

となっているとし，$\langle \nu_n \mid n \in \omega \rangle$ を B 上の Γ-スケールとする．ここで極小化のプロセスにより新しいノルムを定義する：

30.4 により，$A(x)$ なら $B(x, w_x)$ となるような w_x が一意に存在すると仮定してよい．各 $n \in \omega$ に対し，${}^\omega\omega$ 上の $\preceq_n$ を

$$\begin{aligned} x \preceq_n y \quad \Leftrightarrow \quad & \langle \nu_0(x, w_x), w_x(0), \nu_1(x, w_x), w_x(1), \ldots, \nu_n(x, w_x), w_x(n) \rangle \\ & \leq_{\text{lex}} \langle \nu_0(y, w_y), w_y(0), \nu_1(y, w_y), w_y(1), \ldots, \nu_n(y, w_y), w_y(n) \rangle \end{aligned}$$

で定義する．ここに $\leq_{\text{lex}}$ は辞書式順序である．また，ρ_n を対応するランク関数とする．このとき，$\langle \rho_n \mid n \in \omega \rangle$ は A 上のスケールとなる：

$\{x_i \mid i \in \omega\} \subseteq A$ で，$\lim_{i \to \omega} x_i = x$ となっているとし，$g \colon \omega \to \mathrm{On}$ で，すべての n と，十分に大きな i に対し，常に $\rho_n(x_i) = g(n)$ が成り立つものとする．このとき，ある w に対し，$\lim_{i \to \omega} w_{x_i} = w$ となり，g から求まる $h \colon \omega \to \mathrm{On}$ により，$p\nu_n(x_i, w_{x_i}) = h(n)$ がすべての n と十分に大きな i に対し成り立つことが容易に分かる．したがって，$B(x, w)$（つまり $w = w_x$ ）となり，$\nu_n(x, w) \leq h(n)$ がすべての n に対し成り立つ．ところが，このときには $A(x)$ となり，$\preceq_n$ の定義から，すべての n に対し，$\rho_n(x) \leq g(n)$ となる．

$\langle \rho_n \mid n \in \omega \rangle$ が $\exists^1\Gamma$-スケールとなることは，30.1 と 30.4 での議論から導ける．　$\dashv$

第一周期定理 39.13 が前整列順序の性質の極小値を取る操作を補填するものとなっていたように，モショヴァキスはここでも極大値をとることで**第二周期定理**を確立している：

30.8 定理　(DC)(Moschovakis [71]). $\mathrm{Det}(\Delta_\Gamma)$ を仮定する．$\exists^1\Gamma \subseteq \Gamma$ として Γ はスケールの性質を持つとする．このとき，$\forall^1\Gamma$ もスケールの性質を持つ．　$\dashv$

証明は 29.13 のモショヴァキスによる証明を，そこで用いられたゲーム $G(x, y)$ を組み合せることで改良して，得られる；詳しくは Moschovakis [80: 311ff] を参照．

30.9 系　(DC). PD を仮定する．このとき，任意の $a \in {}^\omega\omega$ に対し，次のクラスはスケールの性質（したがって単層化の性質）を持つ：

	$\Sigma^1_2(a)$	$\Sigma^1_4(a)$	$\ldots$
$\Pi^1_1(a)$	$\Pi^1_3(a)$		$\ldots$

$\dashv$

Moschovakis [73] では第三周期定理が与えられている．さらに一般化して，Moschovakis [80: 325ff] では前整列順序の性質の周期性の新しい理由付けとして，29.9 と第一周期定理を，

次のように一つのノルムの伝播定理にまとめたものが与えられている：ある弱い閉包性を満たすクラス Γ に対し，もし $\mathrm{Det}(\Lambda)$ **が成り立つなら，ゲーム量化子** $\{\forall^0 n_0 \exists^0 n_1 \forall^0 n_2 \exists n_3 \ldots\}$ **と** $B \subseteq {}^{k+1}({}^{\omega}\omega)$**,** $B \in \Lambda$ **によって**

$$A(\mathbf{w}) \;\leftrightarrow\; \{\forall^0 n_0 \exists^0 n_1 \forall^0 n_2 \exists^0 n_3 \ldots\} B(\mathbf{w}, \langle n_0, n_1, n_2, n_3, \ldots\rangle)$$

でと定義できるような $A \subseteq {}^{k}({}^{\omega}\omega)$ **のすべてからなるクラスは前整列順序の性質を持つ．** ゲーム量化子はここでは期待されるような意味を持ち，ここでは，$\{x \mid \neg B(\mathbf{w}, x)\}$ は II の必勝法により決定的である，という主張となっているものとする．

この後，Moschovakis [80: 335ff] ではスケールに関連したアイデアを応用して，ZF+ DC のもとで，必勝法が存在するなら，それらは簡単に定義できるものとなることを示す**第三周期定理**を導いている．Moschovakis [73] では射影的クラスに対する次の主要な帰結が述べられている：$n \in \omega$ **に対し，**$\mathrm{Det}(\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n})$ **が成り立ち，**$A \subseteq {}^{\omega}\omega$ **が** $\Sigma^1_{2n}(a)$ **で，**I **が** $G_\omega(A)$ **で必勝法を持てば，**I **は（実数として構成したときに）**$\Delta^1_{2n+1}(a)$ **となるような必勝法を持つ．**

これらの周期定理から，$\boldsymbol{\Pi}^1_1$ や $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ そして射影的階層のすべての階層にわたる構造定理のほとんどすべてを一般化するような結果が導かれ，その際の証明は，多くの場合，最初の方のレヴェルに対し適用でき，そこでのもともとの証明より明らかに簡単なものとなっている．エレガントなスペクター=ギャンディー定理は Moschovakis [73] で一般化されることになる（実際，マルティンはこの結果の証明のために，上で述べた第三周期定理の帰結のいくつを予想したのだった）；可測性とカテゴリーはケクリス Kechris [73] により，子細に分析されている；また，Kechris-Moschovakis [72] と Kechris [75] では，最大の可算集合の理論が展開されている．

この最後の点について敷衍すると，完全な部分集合を持たないような Π^1_1 集合 C_1 で任意の完全な部分集合を持たない Π^1_1 がこれの部分集合となるようなものが存在し（13.12 の後を参照），Σ^1_2 集合 C_2 で同様な性質を持つものも存在する（14.9 の後を参照；実際，$C_2 = C_2^{\emptyset} = {}^{\omega}\omega \cap L$ とすればよい）．27.9 の局所的バージョンのもとでは，完全な部分集合を持たないことは，可算であることと同値になり，このときには最大の可算 Γ 集合，つまり，すべての他の可算な Γ 集合をすべて含むようなものの存在を考えることができる．上で引用した論文での諸結果により，PD のもとでは，最大の Γ 集合の存在するような Γ は前整列順序の性質やスケールの性質と同じジグザグのパターンとなることが示される．このような最大の可算集合の構造は Kechris [75],Guaspari-Harrington [76], Martin [83] で研究されている．

モショヴァキスとケクリスは，1970 年代初めに，“partially playful universes” の理論を展開するためにもスケールを用いている．モショヴァキスは，まず，ZF + DC で，$2 \leq n \in \omega$ として，n より小さい最大の偶数 k に対する $\mathrm{Det}(\boldsymbol{\Delta}^1_k)$ が（13.15 の前で述べたような）Σ^1_n 関係に関して絶対な ZFC の内部モデルのうち最小のもの M^n の存在を帰結すること示した（Kechris-Moschovakis [78a: §5] を参照）．彼は，M^n が GCH を満たし，その実数の Σ^1_{n+1}-善良な整列順序を持つことを確かめている．絶対性から，V が $\mathrm{Det}((\boldsymbol{\Delta}^1_{n-1}))$ を満たすときには，M^n もこれを満たす．特に，このことから，スケールの性質の有限個の

ジグザグ・パターンに $\boldsymbol{\Sigma}$ 側のスケールの性質を続けたものの相対的無矛盾性が確立できる．この後モショヴァキスとケクリスは，$1 \leq n \in \omega$ に対するモデル $L[C_{2n}]$ を考察している．ここに C_{2n} は，前の文節で述べたような，最大の可算な Σ^1_{2n} 集合である．$C_2 = {}^{\omega}\omega \cap L$ で，したがって，$L[C_2] = L$ となるから，これらのモデルは，L の，"高いところでの類推" となっていると考えることができる．モショヴァキスは，$L[C_{2n}]$ が Σ^1_{2n} 関係に対し絶対的となり，したがって V が $\mathrm{Det}(\boldsymbol{\Delta}^1_{2n-1})$ を満たすときには，$L[C_{2n}]$ もこれを満たすことを指摘している．またケクリスは，実際には，このモデルは Σ^1_{2n}-善良な整列順序を持ち，したがって（27.14 と 13.10 の証明から）$\mathrm{Det}(\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n-1})$ は満たさないことを示している．マルティンは，この後 1973 年にこれを補足する次のような，予期されなかった結果を得ている：

30.10 定理　(DC)(Martin). $n \in \omega$ に対し，$\mathrm{Det}(\boldsymbol{\Delta}^1_{2n})$ なら，$\mathrm{Det}(\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n})$ が成り立つ．

ケクリスとソロヴェイ Kechris-Solovay [85: 196ff] は，これの簡単な証明を与えており，ケクリスとウディン Kechris-Woodin [83: 1784] はこれより強く，そこでの意味で最良な，決定性の条件の帰結を得ている．

Becker [78] と Moschovakis [80: 8G] では partially playful universes の理論の子細な解説が与えられている．両方ともスケールから自然に定義される $L[T_{2n+1}]$ のモデルを考察しており，後者では同様に定義されるモデル H_{2n+1} を考察している．また，順序数ゲームをまねるというアイデアにより，Kechris-Martin [78] の結果を一般化して，$\mathrm{Det}({}^{\omega}\omega \cap L[T_{2n+1}] = C_{2n+2})$ から ${}^{\omega}\omega \cap L[T_{2n+1}]l$ が 最大の可算な Σ^1_{2n+2} 集合 C_{2n+2} と等しくなる，という Harrington-Kechris [81] の結果が論じられている．モショヴァキス Moschovakis [81] は，多くの λ に対し，$\mathcal{P}(\lambda) \cap H_{2n+1}$ について類似の特徴付けを与えている．そこでのような λ に対し，ベッカー Becker [80] は $X \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$ の完全集合の性質に似た性質を確立し（これはサミ Ramez Sami も独立に証明している），いくつかの場合に $(2^{\lambda} = \lambda^{+})^{H_{2n+1}}$ を確かめ，ケクリスの Kechris [75] を拡張している．また Becker-Moschovakis [81] ではこれらのモデルでの可測基数が研究されている．

上の T_{2n+1} は実際には，ある "完全な" Π^1_{2n+1} 集合上の Π^1_{2n+1}-スケール（30.2 を参照）となっている．モショヴァキスの長い間未解決で残っていた問題を解決して，Becker-Kechris [84] では $L[T_{2n+1}]$ がこの完全集合の選び方に依存せず，さらに，$L[T_{2n+1}] = H_{2n+1}$ となることが示されている．これは，partially playful universes の理論を統一し，スケールの概念の強い正当性を明らかにしている．

スケールの度合に関する最近の諸結果については，この節の最後で述べる．その前に，前整列順序の長さに関する理論を展開する．この理論はスケールの木による特徴付け 30.2 により得られる結果にささえられるものとなっている．

射影的順序数

モショヴァキスの画期的な仕事は，また，スースリンの，集合が $\boldsymbol{\Delta}^1_1$ となるのは，それがボレル集合である，ちょうどそのときである，という基本的な定理 12.1 と，すべての $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ 集合は $\aleph_1$ 個のボレル集合の和集合である，というシルピンスキーの結果 13.7 を一般化して，

エレガントな射影的集合の構造的分析を与えることになる．モショヴァキスは Moschovakis [70] での前整列順序の研究で，次を導入していた：整順的関係の長さとは，ランク関数の値域となる順序数のことである．

$$\delta_\Gamma = \sup(\{\xi \mid \xi \text{ は } \Delta_\Gamma \text{ に属す前整列順序 } \subseteq {}^2({}^\omega\omega) \text{ の長さ }\})$$

とする．特に，$1 \leq n \in \omega$ に対し，**射影的順序数**は，

$$\delta^1_n = \delta_{\mathbf{\Sigma}^1_n} = \delta_{\mathbf{\Pi}^1_n}$$

として定義されるものとする．これらの順序数は明らかに，§28 の終わりで議論した Θ の定義可能性版になっている．ZFC では Θ は ω_2 であり得るから，これらの順序数は高々 ω_2 であることは無矛盾であるが，AD では状況が劇的に異なることがわかってくる．

次の簡単な事実により舞台が準備される．

30.11 演習

(a) A は Γ に属すとして，値域が順序数となるような Γ-ノルム ρ: $A \to \mathrm{On}$ が存在するとする．このとき，ρ: $A \to \delta_\Gamma$ で，すべて Δ_Γ に属す，ある集合 A_ξ, $\xi < \delta_\Gamma$ により，$A = \bigcup\{A_\xi \mid \xi < \delta_\Gamma\}$ となる．

(b) $\mathrm{cf}(\delta_\Gamma) > \omega$ で $\delta^1_1 = \omega_1$ となる．

ヒント　(b) については，Γ に属す可算個の集合の和集合はふたたび Γ の元となることに注意すればよい．あとは，$\delta^1_1 \leq \omega_1$ を示せばよい．

$\preceq \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ を $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 前整列順序として，

$$X = \{x \in {}^\omega\omega \mid \exists^1 y \forall^0 m \forall^0 n(x(\langle m, n\rangle) = 0 \leftrightarrow (y)_m \preceq (y)_n)\}$$

とおく．このとき，X は $\mathbf{\Sigma}^1_1$ となり，13.6 での用語で $X \subseteq \mathrm{WF}$ となる．したがって，ある $\alpha < \omega_1$ に対し，$X \subseteq \mathrm{WF}_\alpha$ となる．このことから，$\preceq$ の長さが ω_1 より小さいことが分かる． ⊣

ここで，第二周期定理 30.8 から，13.13 での γ-スースリンの概念に関して，次のような簡単な帰結を得ることができる：

30.12 演習　(DC)(Moschovakis, Kechris). $n \in \omega$ として，$\mathrm{Det}(\mathbf{\Delta}^1_{2n})$ とする．このとき，

(a) すべての $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+2}$ 集合は δ^1_{2n+1}-スースリンである．

(b) すべての $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ 集合は，ある $\gamma < \delta^1_{2n+1}$ に対し，γ-スースリンとなる．

ヒント　(a) を示すには 13.13(d) により，すべての $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$ 集合が δ^1_{2n+1}-スースリンであることが示せれば十分である．ところが，これは 30.9, 30.2, および 30.11(a) から出る．

(b) を示すには，すべての $\mathbf{\Pi}^1_{2n}$ 集合が ある $\gamma < \delta^1_{2n}$ に対し，γ-スースリンとなることが示せればよい．このような集合 A に対しては，30.9 により，A から δ^1_{2n+1} への $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$-スケールが存在する．A は $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ に属すから，スケールに含まれるノルムに対応する前整列順序の各々は $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ となっている．したがって，30.11(b) により，$\gamma < \delta^1_{2n+1}$ でこれらの長さの上界となるものが存在する． ⊣

スースリンとシルピンスキーの古典的な諸結果を一般化するために,（整列順序付けされた）集合列 $\langle A_\xi \mid \xi < \eta\rangle$ の和集合 $\bigcup\{A_\xi \mid \xi < \eta\}$ をとる操作を **η-和**と呼ぶことにし，$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ が **γ-ボレル**とは，A が ${}^k({}^\omega\omega)$ の開集合を含み，すべての $\eta < \gamma$ に対して，η-和をとることに関し閉じているような最小の集合族に含まれることとする．したがって A が ω_1-ボレルとなるのは，A がボレル集合である，ちょうどそのときである．さらに，γ が基数でないときには，A が γ-ボレルとなるのは，A が γ^+-ボレルとなる，ちょうどそのときである．

次は，Luzin-Sierpiński [18, 23] にまでさかのぼれる古典的な議論に基づくものである．マルティンが，これらの一般化の鋭い使い道に気付いたのは，特に (b) によってであった．

30.13 演習　$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ が γ-スースリンであるとする．このとき，

(a) A は $(\gamma+1)$-ボレル集合の γ^+-和となり，したがって，$(\gamma^+ + 1)$-ボレルである．

(b) $\mathrm{cf}(\gamma) > \omega$ なら，A は γ^+-ボレルである．

(c) $B \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ も γ-スースリンで $A \cap B = \emptyset$ なら，$(\gamma+1)$-ボレル集合 C で，A と B を分離するもの，つまり，$B \subseteq C$ かつ $A \cap C = \emptyset$ となるものがある．

ヒント　(a) を示すには，$A = p[T]$ で T は ${}^k\omega \times \gamma$ 上の木とする．13.3 での証明でのように議論して，まず，そこでと同じように，$s \in {}^{<\omega}\gamma$ と $\alpha < \gamma^+$ に対し，B^s_α を定義し，α に関する帰納法により，これらが $(\gamma+1)$-ボレルとなることを示す．ここで $\alpha < \gamma^+$ に対し，C_α を 13.3 でと同様に定義し，これらも $(\gamma+1)$-ボレルであることを示す．最後に，13.3 でと同様に議論して，しかし補集合を用いて，

$$A = \bigcup_{\alpha<\gamma^+}({}^k({}^\omega\omega) - C_\alpha)$$

となることを示せばよい．

(b) の証明には，前の証明を（13.14 の後で与えられた）13.7 の二番目の証明でのように改良して，$\xi < \gamma$ に対し，$T^\xi = T \cap ({}^k({}^{<\omega}\omega) \times {}^{<\omega}\xi)$ を定義して，$(\gamma) > \omega$ により，$A = \bigcup_{\xi<\gamma} p[T^\xi]$ となることに注意すればよい．

(c) の証明には，T と U を ${}^k\omega \times \gamma$ 上の木として，$A = p[T]$ かつ $B = p[U]$ となっているとする．13.4 でのように議論し，${}^k({}^\omega\omega) - A$ をそこでの A と考え，$\alpha < \gamma^+$ で

$$B \subseteq \{\mathbf{w} \in {}^k({}^\omega\omega) \mid T_{\mathbf{w}} \text{ は整順的で } \|T_{\mathbf{w}}\| \leq \alpha\}$$

となるものを得る．この集合（前の記法では $B^\emptyset_\alpha$ である）は $(\gamma+1)$-ボレルで，A と素になっている．　⊣

次は (c) と 30.12(b) からの帰結である．

30.14 演習　(DC)(Moschovakis [71])．$n \in \omega$ として，$\mathrm{Det}(\mathbf{\Delta}^1_{2n})$ を仮定する．このとき，すべての $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ 集合は，δ^1_{2n+1}-ボレルである．

マルティンは§15 で論じた彼の $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合の分析を用いて AD から予期しなかった結論を引き出している．次は，この結果をほとんど含むものとなっている．

30.15 命題 (Martin). $\forall a \in {}^\omega\omega(a^\#$ が存在する）を仮定する．$\mathrm{cf}(|u_\omega|) > \omega$ なら，すべての $\boldsymbol{\Sigma}^1_3$ 集合は，δ^1_3-ボレルとなる．

証明 すべての $\boldsymbol{\Sigma}^1_3$ 集合は u_ω-スースリンである (15.12) から，$u_\omega{}^+$-ボレルである (30.13 (b))．ところが，14.18(a) により，すべての基数 $\leq u_\omega$ は，共終数 $\mathrm{cf}(u_2)$ を持つから，すべての $\boldsymbol{\Sigma}^1_3$ 集合は，実際には (u_2+1)-ボレルとなることがすぐに分かる．証明を完了するには，$1 \leq n \leq \omega$ に対し，$u_n < \delta^1_3$ となる（したがって，30.11(b) により，$u_\omega < \delta^1_3$ となる）ことが言えればよい．これを見るために，各 u_n は Δ^1_3 に属する前整列順序の長さであることに注意すればよい：

14.18(b) により，すべての $\gamma < u_n$ は，あるスコーレム項 t と $a \in {}^\omega\omega$ により，$t^{\langle L[a],\in,a\rangle}(u_1,\ldots,u_{n-1})$ という形に表せる．対 $\langle t,a\rangle$ を実数 a' でコードすると，

$$\langle t,a\rangle \preceq \langle \bar{t},\bar{a}\rangle \quad \Leftrightarrow \quad t^{\langle L[a],\in,a\rangle}(u_1,\ldots,u_{n-1}) \leq \bar{t}^{\langle L[\bar{a}],\in,\bar{a}\rangle}(u_1,\ldots,u_{n-1})$$

で与えられる前整列順序 $\preceq$ は，a と b に対し，$c(a',\bar{a}')$ で a' と $\bar{a}'$ を帰納的にコードする実数として，t と $\bar{t}$ に帰納的に依存する文 $\sigma(c_1,\ldots,c_{n-1})$ を含んでいる $c(a',\bar{a}')^\#$ と同値になる．したがって，これは 14.12(b) を相対化したものにより Δ^1_3 であることが分かる． ⊣

ここで我々は大きな分岐点に到達した．これから先には，Moschovakis [70] でのコーディングの補題なしには進むことができないのであるが，これは，応用のための技術的な主張で，簡単に述べることのできないものである．スケールの概念が抽出されるより前の Θ の研究に基づき，この補題は，定義可能性を先行する H. フリートマンとソロヴェイの仕事に結びつけ，大雑把に言えば，Θ の有界部分集合や Θ より小さい順序数上の関数が定義可能であることを主張している．これの証明には，任意の複雑さを持つゲームに対する必勝法を得るために，AD がフルに用られ，定義可能性をこれに結びつけるために，クリーニの帰納定理が必要となる．帰納関数論と集合論における強い仮説の精緻な収束は，初めは非常に目新しかったかもしれないが，この補題は，様々な応用により，その重要性を増し，決定性の理論における基石の一つと認識されるに至った．モショヴァキスによるこの補題の最初の応用により，次の結果が得られることになる：

30.16 定理 (Moschovakis [70: 41]). AD を仮定する．このとき，$1 \leq m \in \omega$ と $\eta < \delta_m$ に対し，任意の ${}^k({}^\omega\omega)$ の $\boldsymbol{\Sigma}^1_m$ 部分集合の η 個の和集合は再び $\boldsymbol{\Sigma}^1_m$ 集合となる．

証明は Moschovakis [80: 434ff] を参照されたい．実は，ZFC でもマルティンの公理 MA + $\neg$CH + $\exists a \in {}^\omega\omega(\omega_1^{L[a]} = \omega_1)$ から，$m=2$ に対する同じ帰結が得られる (Martin-Solovay [70: §3])．スケールが現れるより前に，マルティンは，30.16 を応用して，AD から 30.14 の逆を証明している．30.16 を仮定して，この証明を与えるが，この証明は，ワッジの補題 29.15 の初期の応用にスポットをあてるものとなっている．

30.17 定理 (DC)(Martin). $n \in \omega$ として，AD を仮定する．このとき，すべての δ^1_{2n+1}-ボレル集合は $\boldsymbol{\Delta}^1_{2n+1}$ である．

証明　δ^1_{2n+1}-ボレル集合の定義から，${}^k({}^\omega\omega)$ の $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ 部分集合の全体の族が，すべての $\eta < \delta^1_{2n+1}$ に対し η-和をとることに関し閉じていれば，すべての δ^1_{2n+1}-ボレル集合は $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ であることが分かる．したがって，この族がこの意味で閉じていないことを仮定して矛盾が導ければよい．

そこで，$\eta < \delta^1_{2n+1}$ を，${}^k({}^\omega\omega)$ の $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ 部分集合の η-和で $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ でなくなるようなものの存在する最小のものとし，$A = \bigcup_{\xi<\eta} A_\xi$ がそのような η-和であるとする．30.16 により，A は $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ である．まず，A が $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$-ノルムを持つことを示す：

$\eta < \delta^1_{2n+1}$ であるから，${}^\omega\omega$ の $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ 前整列順序で長さが η のものがあることが直ぐに分かるが，これのランク関数を ρ とする．各 $\xi < \eta$ に対し，$R_\xi \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ を，

$$R_\xi(x,z) \;\leftrightarrow\; x \in A_{\rho(z)} \wedge \rho(z) = \xi$$

で定義すると，これは $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ となるから，ふたたび 30.16 により，

$$R(x,z) \;\leftrightarrow\; x \in A_{\rho(z)}$$

で定義された $R \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ は R_ξ たちの η-和だから，$\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ である．

η の最小性から，任意の $\xi < \eta$ に対し，$\bigcup_{\zeta<\xi} A_\zeta$ と $\bigcup_{\zeta\le\xi} A_\zeta$ は $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ となり，したがって，同様の議論により，$S, T \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ を

$$\begin{aligned} S(x,z) &\;\leftrightarrow\; x \notin \textstyle\bigcup_{\zeta<\rho(z)} A_\zeta\,, \\ T(x,z) &\;\leftrightarrow\; x \notin \textstyle\bigcup_{\zeta\le\rho(z)} A_\zeta \end{aligned}$$

で定義すると，これらは $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ となる．

最後に，ν を

$$\nu(x) = \ulcorner x \in A_\xi \text{ となるような最小の } \xi \urcorner$$

で定義される A 上のノルムとすると，

$$\begin{aligned} x \le^*_\nu y &\;\leftrightarrow\; \exists^1 z(R(x,z) \wedge S(x,z))\,, \\ x <^*_\nu y &\;\leftrightarrow\; \exists^1 z(R(x,z) \wedge T(x,z)) \end{aligned}$$

は両方とも $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ となるから，ν は $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$-ノルムとなる．

ここでワッジの補題 29.15 を用いて証明を完了できる．任意の実数の $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ 集合 B に対し，$A \le_{\mathrm{W}} {}^\omega\omega - B$ であるか $B \le_{\mathrm{W}} A$ であるかのどちらかである．ところが，最初の場合からは，直ぐに A が $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$ であることが導かれるから，仮定に矛盾する．他方，二番目の場合からは，B が ν から惹き起こされる $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ ノルムを持つことが帰結できる．${}^k({}^\omega\omega)$ の部分集合全体を定義域に含むような位相同型を用いると，このことから，$\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ は前整列順序の性質を持つことが帰結できるが，これは 29.14 に矛盾である．　⊣

このことから，30.15 がその先触れとはなっていたが，次のような予期しない結果が得られる：

30.18 定理　(Martin). AD を仮定する．このとき，$u_\omega = \omega_\omega$ となる．

証明 まず，$1 \leq n \in \omega$ に対し，$\mathrm{AC}_\omega({}^\omega\omega)$ と上射：${}^\omega\omega \to \mathcal{P}(\omega_n)$ の存在 (28.15, 28.16) から，$\mathrm{cf}(\omega_n) > \omega$ となることに注意する．したがって，共終数が ω の最小の非可算基数が ω_ω となっている．

DC を仮定してよければ，次のように議論することができる： AD のもとではシャープたちが存在して，$\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合で $\mathbf{\Delta}^1_3$ でないものも存在するから，30.15 と 30.17 により，$\mathrm{cf}(|u_\omega|) = \omega$ である．したがって，前の注意と $\omega_1 = u_1 < u_\omega \leq \omega_\omega$ から，$u_\omega = \omega_\omega$ が導ける．

最後に，DC は 30.17 での証明で 29.14 を用いることにより DC を除去することができる： まず，$\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ の前整列順序の性質を導く．前整列順序の性質は分解の性質を帰結し，後者は $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ と $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$ の両方では成り立ち得ないから，$\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$ が前整列順序の性質を持つことが示せれば，これから矛盾が導ける．ここで 29.14 を用いることのみが DC に依存している．しかしながら，29.13 で $\mathrm{Det}(\mathbf{\Delta}^1_2)$ から $\mathbf{\Pi}^1_3$ の前整列順序の性質を導いたところで，DC は前整列順序の整順性を得るために用いられていて，$\mathbf{\Sigma}^1_2$ の前整列順序の性質の他の性質は DC に依存していなかった．ところが，これらの他の性質は 29.7 で $\mathbf{\Pi}^1_3$ の分解の性質を前整列順序の性質から導くために十分であり，したがって矛盾が得られる．⊣

このことから，AD のからの驚くべき帰結である，$2 \leq n \in \omega$ に対する $\mathrm{cf}(\omega_n) = \omega_2$ (28.8) さらには $1 \leq n \in \omega$ に対する $u_n = \omega_n$ (28.9) が導かれたのであった．

次は，30.16 に基づく，古典的結果を一般化する 2 つの特徴付けである．30.14 と 30.17 はスースリンの 12.1 を射影的階層での奇数レヴェルへの拡張を与える：

30.19 定理 (DC)(Martin, Moschovakis). AD を仮定する．このとき，$n \in \omega$ と $A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ に対し，

A が $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ となるのは，A が δ^1_{2n+1}-ボレルとなる，ちょうどそのときである．

モショヴァキスは，スケールの概念が確立された後に，次のシルピンスキーの 13.7 の拡張を得ている：

30.20 定理 (DC)(Moschovakis [71]). AD を仮定する．このとき $n \in \omega$ と $A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ に対し，A が $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+2}$ となるのは，A が ${}^k({}^\omega\omega)$ の $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ 部分集合の δ^1_{2n+1}-和となる，ちょうどそのときである．

特に，A が $\mathbf{\Sigma}^1_2$ となるのは，A が ${}^k({}^\omega\omega)$ の $\aleph_1$ 個のボレル部分集合の和集合となる，ちょうどそのときである．⊣

証明は Moschovakis [80: 435] を参照されたい．$\mathbf{\Sigma}^1_{2n+2}$ のもっと簡単な集合による解析ではなく，これの閉包性の度合に関する研究のために，ケクリス Kechris [78a] はこの定理を用いて，ZF + DC + AD で，**任意の η と ${}^k({}^\omega\omega)$ の $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+2}$ 部分集合の η-和は $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+2}$ となること**を見いだしている．しかし，これは，次の問題が未解決であることから，大きな η に対しては無内容なものとなっているかもしれない：

30.21 未解決問題 (DC). AD を仮定する．このとき，互いに異なる 実数の $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+2}$ 集合の列で長さが $(\delta^1_{2n+1})^+$ のものは存在するか？ 特に，実数の $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合の列で長さが ω_2 の

ものは存在するか？

これは，この分野での主要な未解決問題で，これに対する部分解は，Jackson-Martin [83] と Jackson [90] に出ている．例えば，そのようなもので $\subseteq$ に関して上昇列となるものは存在しないことが知られている．

30.19 と 30.20 の射影的集合をボレル集合の整列された和に表現するエレガントな構造定理が得られたので，あとは，このような和の可能な長さ，つまり射影的順序数に関する理解が得られればよい．

$$\delta_1^1 = \omega_1$$

は本質的には古典的な結果で得られていた (30.11(b)) ことを思い出すと，次は，これより先の射影的順序数を AD のもとでの超限での確定に関する初期の結果のまとめとなっている：

Moschovakis [70] はコーディングの補題を AD のもとで用いて，射影的順序数は基数で，$n \in \omega$ に対し，δ_{2n+1}^1 は正則で，δ_{2n+2}^1 より小さいことを示している．マルティンは,（AD なしで） $\delta_2^1 \leq \omega_2$ を示し，したがって，AD のもとでは，

$$\delta_2^1 = \omega_2$$

が帰結できることを見いだしている．

彼の $\mathbf{\Sigma}_3^1$ 集合の解析により，マルティンは,（シャープたちの存在だけから） $\delta_3^1 \leq \omega_{\omega+1}$ となることを示し，したがって AD のもとでは，これが AD のもとでの 3 番目の非可算正則基数と等しくなる，つまり

$$\delta_3^1 = \omega_{\omega+1}$$

を帰結している．マルティンのこれらの結果は，彼とクーネンにより独立に得られた，整順的関係の長さに関する次の基本的な結果に基づいている：

30.22 定理　(DC)(Kunen; Martin). $\preceq \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ を κ-スースリンとなる整順的関係とする．このとき，$\preceq$ の長さは，κ^+ より小さいものとなる．

次は 30.12(a) から容易に導ける：

30.23 系　(DC). $n \in \omega$ として，$\mathrm{Det}(\mathbf{\Delta}_{2n}^1)$ を仮定する．このとき，$\delta_{2n+2}^1 \leq (\delta_{2n+1}^1)^+$ となる．

このことから，AD のもとで，

$$\delta_4^1 = \omega_{\omega+2}$$

が導ける．

これらの最初の射影的順序数の性質の一般化が間もなく得られている．ケクリス Kechris [74] は $n \in \omega$ に対し，δ_{2n+1}^1 は共終数が ω の基数の次の基数となり，$\delta_{2n+2}^1 < \delta_{2n+3}^1$ が成り立つことを示している．ソロヴェイの可測性に関する初期の結果を一般化して，マルティンは，各 $n \in \omega$ に対し，δ_{2n+1}^1 が可測となることを示している．次は，1970 年代初期までに知られていた結果のまとめである．証明は Kechris [78] を参照されたい．

30.24 定理 (DC). ADを仮定する．$\langle \delta^1_n \mid 1 \le n \in \omega \rangle$ は可測基数の真の上昇列で，奇数 n に対しては，δ^1_n は共終数が ω の基数の次の基数となっており，$\delta^1_{n+1} = (\delta^1_n)^+$ である．さらに，$\delta^1_1 = \omega_1$, $\delta^1_2 = \omega_2$, $\delta^1_3 = \omega_{\omega+1}$, $\delta^1_4 = \omega_{\omega+2}$ は最初の4つの非可算正則基数となっている．

しかしADのもとで δ^1_5 はどの基数となるのであろうか？ これは議論の焦点となったが，10年あまり未解決のまま残ることになる．δ^1_5 が決定されれば，そのために開発されたテクニックであとのすべての射影的順序数を決定することができるであろう，という感触があった．さらに，この問題は，連続体問題に対するより精密な構造的アプローチと関連するものであった： ZFCにもどると，古典的な $\delta^1_1 = \omega_1$ とマルティンの $\delta^1_2 \le \omega_2$ が成り立っている．シャープたちの存在のもとでは，マルティンのACでの結果15.13と30.22を合わせると，

$$\delta^1_3 \le \omega_3$$

が言える（Harrington [77] —— Jech [78: 575ff] も参照 —— でZFCにおいて δ^1_3 が任意の大きさを持つことの無矛盾性が示されているので，ここでは，さらにある仮定が必要である）．ADからの帰結は，次第に $L(\mathbb{R})$ での $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ からの帰結と考えられるようになってきたことを踏まえて，さらに一つ推論を進める： まず，δ^1_n などの射影的集合に関する概念は $L(\mathbb{R})$ で絶対であることが直ぐに分かるから，$L(\mathbb{R})$ と V での4番目の非可算正則基数を比べると，

$$\delta^1_4 = \omega^{L(\mathbb{R})}_{\omega+2} \le \omega_4$$

となることが分かる．

ここに連続体問題の新しいアプローチがあった．連続体の長さと解釈できる Θ の定義可能性での対応である射影的順序数において，$\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ はすべての射影的順序数に対し類似の上限を課すかもしれないのということである．マルティンの1970年の仮説の一つのバージョンは，この仮定から，すべての $1 \le n \in \omega$ に対し，$\delta^1_n \le \omega_n$ が成り立つことが帰結できる，ということであった．しかし，$\delta^1_n < \omega_\omega$ さえ確立することはできなかった．

1980年代になって，この問題がどのように解決されたかについては，この節の終わりで論じる．1971年以降この土地は10年以上寝かされたままになっていたのであるが，その年にクーネンによって成された特筆すべき進歩について述べておかなければならない．上で年代を追って述べたこと以外に，彼は，$\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合の木による表現を "双対化" して，（§15の終わりで示唆したような）$\mathbf{\Pi}^1_3$ 集合の木による表現を得て，さらに進んで，$\mathbf{\Pi}^1_4$ 集合についても同じような把握をしている（Kechris [81] と Solovay [78] を参照）．この仕事は，δ^1_5 の決定により，さらに新しい進歩が可能になるまで，この文脈での射影的集合の解析の最高峰としてそそり立っていた．

スケールの範囲

1970年代初期には用意されていたスケールと射影的順序数の理論が確立できたので，それから以降の仕事を概説して，この節を終えることにする．まず，スケールの射影的クラス

の先での範囲について述べる．Steel [83: 107] で述べられているように，

> スケールが記述集合論で重要なのは，それが与えられた実数の集合族の論理的な形式での任意の定義に対し，これらの集合族の元の定義を生成するからである．

帰納的定義可能性と呼ばれる手続きを用いてモショヴァキス Moschovakis [78] は射影的集合の自然な拡張となっている**帰納的集合**のクラス IND を定式化している．簡明な特徴付けを述べると，$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ が**帰納的**とは，開集合 $B \subseteq {}^{k+1}({}^\omega\omega)$ があって，

$$A(\mathbf{w}) \;\leftrightarrow\; \{\forall^1 x_0 \exists^1 x_1 \forall^1 x_2 \exists^1 x_3 \ldots\} B(\mathbf{w}, \langle x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\rangle)$$

となることである．ここに，**実数ゲーム量化子** $\{\forall^1 x_0 \exists^1 x_1 \forall^1 x_2 \exists^1 x_3 \ldots\}$ は期待されるように解釈されるものとし，$\langle x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\rangle$ は，実数 x で，すべての $i \in \omega$ に対し $(x)_i = x_i$ となるようなものである．彼の第二周期理定（の一般化）を用いて，モショヴァキスは，$\mathrm{Det}(\Delta_{\mathrm{IND}})$ のもとで，帰納的集合は，太文字の形でも細文字の形でもスケールの性質を持つことを示した（Moschovakis [80: 7C] を参照）．何年かの停滞の後，Martin-Moschovakis-Steel [82] に要約されているように，定義可能なスケールの範囲は大幅に明らかになった：

モショヴァキス Moschovakis [83] は，十分な決定性のもとで，これの双対クラスである**反帰納的集合**のクラスが帰納的なものからそれほど離れていない複雑さの定義のスケールを持つことに気付いた．しかし，マルティン Martin [83] は，この複雑さは一般にはそれ以上還元できないことを示している．モショヴァキスの構成に基づいて，マルティンとスティール Martin-Steel [83] は $L(\mathbb{R})$ でのスケールの領域の限界を示している：

3階の算術 $\mathcal{A}^3$ は $\mathcal{A}^2$ に $\mathcal{P}({}^\omega\omega)$ とそれを領域に持つ量化子 $\forall^2$ および $\exists^2$ を付加して期待されるように拡張したものであるが，$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ が Σ^2_1 であるというのを，

$$A(\mathbf{w}) \;\leftrightarrow\; \mathcal{A}^3 \models \exists^2 X \varphi[\mathbf{w}]$$

となることとして定義する．ここに φ は実数の量化子と数の量化子のみを持つ論理式である．これの双対クラス Π^2_1 も $\forall^2$ で $\exists^2$ を置き換えることにより同様に定義され，パラメタ $a \in {}^\omega\omega$ をとりこむことで，太文字版の $\mathbf{\Sigma}^2_1$ と $\mathbf{\Pi}^2_1$ も定義される．帰納的集合との関連で，Martin-Steel [83] では，A が $(\mathbf{\Sigma}^2_1)^{L(\mathbb{R})}$ となる（つまり，$\exists^2$ を $\mathcal{P}({}^\omega\omega) \cap L(\mathbb{R})$ に制限したもの）のは，$\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合 $B \subseteq {}^{k+1}({}^\omega\omega)$ で

$$A(\mathbf{w}) \;\leftrightarrow\; \{\forall^1 x_0 \exists^1 x_1 \forall^1 x_2 \exists^1 x_3 \ldots\} B(\mathbf{w}, \langle x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\rangle)$$

となるものがある，ちょうどそのときである，ということがまず示されて，次に，AD を**仮定し，$V = L(\mathbb{R})$ であるとするとき，$\mathbf{\Sigma}^2_1$ はスケールの性質を持つ**ことが示されている．1976 年のケクリスとソロヴェイによる，初期の反例に基づく次の結果により，これは実際に境界線を示すものとなっている：

30.25 演習 (Kechris, Solovay). $V = L(\mathbb{R})$ として，実数の全体の上の整列順序が存在しないと仮定する．このとき，${}^2({}^\omega\omega)$ の Π^2_1 部分集合で，単層化できないものが存在する．

ヒント 27.16 の A が一つの反例となっていることを示せばよい．このためには「$y \in \mathrm{OD}(x)$」が Σ^2_1 であることを確かめればよい：まずレーベンハイム=スコーレムの論法により，$\mathrm{On} \cup \{x\}$ からのパラメタを用いた $L(\mathbb{R})$ での定義可能性は，ある $\gamma < \Theta$ に対する $L_\gamma(\mathbb{R})$ での定義可能性と同値になることを示す（これは順序数定義可能性の概念を定式化するときの ZF での反映の原理の証明を連想させる．$L(\mathbb{R})$ で $\mathrm{cf}(\Theta) > \omega$ となっていることを思い出すと，定義可能な上射：$\mathrm{On} \times {}^\omega\omega \to L(\mathbb{R})$ に依存した ω の長さの構成により $\gamma < \Theta$ を得ることができる）．ここで，すべての $L_\gamma(\mathbb{R}), \gamma < \Theta$ は実数の集合によりコードできることに留意すればよい． ⊣

さらに後の仕事で，マルティン Martin [83a] は，$\mathrm{AD}_\mathbb{R}$ の対応する各バージョンを仮定すると，十分な閉包性を持つクラス Λ がスケールの性質を持つなら，Λ 関係から出発して実数ゲーム量化子により定義できる集合からなるクラスもスケールの性質を持ち，さらに，同様の結果が任意の可算の長さのゲームに対応する量化子を用いても得られることを示している．この進展はスティール Steel [83] により高地に達した．彼は $L(\mathbb{R})$ の "細部構造理論" を発展させ，それまでに得られていた結果をさらに精密化した．$L(\mathbb{R})$ でのスケールの極小な複雑さについての解析から，スティールは，$L(\mathbb{R})$ でのすべての実数の集合に対する決定性のもとで射影的集合の構造定理を本質的に拡張している．

この先の登坂では，ウディンが 1980 年代半ばに $\mathrm{AD}_\mathbb{R}$ **からすべての実数の集合はスケールを持つことが導かれる**，ということを証明している．このことから，マルティンの前の仕事により，ワッジの順序 $\leq_\mathrm{W}$ に関して任意の高さで，スケールの性質と，十分な閉包性を持つ，自己双対でないクラスが存在することが分かる．ウディンはまた，巨大基数のもとで，すべての実数を含み，$\mathrm{AD}_\mathbb{R}$ を満たすような内部モデルの存在の無矛盾性を示している —— しかし，これは§32 で述べることになる話題であった．

$L(\mathbb{R})$ の構造

$L(\mathbb{R})$ は初期から決定性の自然な内部モデルと見なされていたが，このことから，AD が次第に $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ を仮定することで $L(\mathbb{R})$ で成り立つものと考えられるようになってきただけでなく，この内部モデル構造それ自身として，また相対的無矛盾性にいたる路として研究されるようになってきた．L の研究が極小条件の広域な解析と考えられたのに対し，$L(\mathbb{R})$ の研究は極大条件の解明を目ざしていた．スティール Steel [83] による $L(\mathbb{R})$ でのスケールの洗練された解析は，ここでの内的な解析の最高点を示しており，1970 年代に提起されたさまざまな設問を解決する $L(\mathbb{R})$ での AD に関連した様々な命題の基礎となった．Kechris [85] には，これを要約する解説がある．スケールの範囲に関しても同様であったが，以下の短い議論だけでは，ここで概説する諸結果の，深さや複雑さを十分に伝えることは難しい．

§28 でも述べたように，決定性は自然な上限である Θ 以下の超限順序数の構造に対し，強い影響を及ぼす．無限指数の分割関係の議論を再び取り上げることにして，

κ が**強い分割の性質**を持つとは，$\forall\alpha < \kappa(\kappa \longrightarrow (\kappa)^\kappa_\alpha)$ が成り立つこと

とする．マルティンの 28.13 により，AD から ω_1 は強い分割の性質を持つことが導かれ

る．それからしばらくの間他の例は何も見つからず，δ^1_3 が強い分割の性質を持つかどうかという問題の焦点は未解決のまま残された．しかし 1977 年の暮れにケクリスは射影的順序数を迂回して，マルティンの証明のアイデアを用いて帰納的集合のクラス IND の性質を用いることにより，**AD + DC のもとで，基数 κ で，強い分割の性質を持ち $\{\lambda < \kappa \mid \lambda$ は強い分割の性質を持つ$\}$ が κ で定常になるようなものが存在する**ことを示した．ここでの論法はほどなく拡張され，これにより次が確立されている：

30.26 定理　(DC)(Kechris-Kleinberg-Moschovakis-Woodin [81])．AD を仮定する．このとき，Θ は強い分割の性質を持つ基数の極限である．

強い分割の性質を持つ，これらの基数は，マルティンの 28.12 における δ^1_1 としての ω_1 の役割に類似するもので，マルティンがシャープたちによってコーディングしていものを，モショヴァキスのコーディングの補題の一様性バージョンにより関数 : $\kappa \to \kappa$ をコードするために用いることで置き換えている．$L(\mathbb{R})$ これの逆の可能性が議論されたが，これは 1982 年にケクリスとウディンにより確立されている：

30.27 定理　(DC)(Kechris-Woodin [83])．$V = L(\mathbb{R})$ を仮定する．このとき，以下は同値である：

(a) AD.

(b) Θ は強い分割の性質を持つ基数の極限である．

この特徴付けにより AD は超限基数に関する純粋に組合せ論的な命題に還元され，初期における無限指数の分割関係に対する興味の正当性が立証された．Kechris-Kleinberg-Moschovakis-Woodin [81] では既に**実数の集合 A が λ-スースリン（つまり，$\omega \times \lambda$ 上の木 T により $A = p[T]$ と表せる）なら，A は決定的である**ことが示されている．大雑把に言えば，木による表現は§15 での $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合の解析でと同じように用いられ，強い分割の性質が順序付けの関数に対する普遍量を得るために用いられる（§15 の終わりを参照）．これにより，30.27 の弱い形が得られたことになる．Kechris-Woodin [83] で確立されたのは，**$L(\mathbb{R})$ で，ある λ に対し λ-スースリンとなるすべての実数の集合決定的なら，AD が成り立つ**，ということであった．$L(\mathbb{R})$ での細部構造のレヴェルを一つ一つ進んで，証明は Steel [83] で用いられたスースリンの性質を保証する役割をになうスケールの解析を用い，彼のチューリング度たちの上のフィルターを用いて Martin [83] での $\mathbb{R}$ 上の量化子の交換を扱う手法を応用している．ウディンは，後に (b) は ω 上の超フィルターの存在と無矛盾であることを示して，ZF + DC のみでは (b) が (a) を導かないことを確認している．

同じ頃に確立されたもう一つの特徴付けは，決定性でのチューリング度の関わりに関するものであった．次の**チューリング決定性**を考えてみる

$$\mathrm{Det}(\{\bigcup X \mid X \subseteq \mathcal{D}_\mathrm{T}\})$$

つまり，チューリング同値性 $\equiv_\mathrm{T}$ に関して閉じているような実数の集合すべてが決定的である，という仮定である．マルティンのチューリング度上のフィルターが超フィルターであることを示す結果 28.4 や他の様々な局面で，AD はチューリング決定性で置き換えるこ

とができ（例えば第一周期定理 29.13 の証明を参照），チューリング決定性の強さがどれだけなのかという問題は早くから考えられていた．1980 年代の初めにウディンはその時点で使うことのできたテクニックを押し進めて次の定理を確立している：

30.28 定理　(DC)(Woodin). $V = L(\mathbb{R})$ と仮定する．このとき，次は同値となる：
(a) AD.
(b) チューリング決定性.

10 年ほど後には，ウディンは $L(\mathbb{R})$ での AD と，それの実数の集合に対する幾つかの構造的帰結のみとの同値性を確立することになる (32.22).

もっと基本的な問題は DC に関連するものである．AD からの結果で，DC を必要とするものが多く出てくると，1970 年代には DC がどのくらい本質的な役割をはたしているのか，という疑問がたびたび掲げられている．Con(ZF + AD) から Con(ZF + AD + DC) が帰結できるのか？ 28.9 の後で述べたように，ソロヴェイ Solovay [78a] は Con(ZF + $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$) から Con(ZF + $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ + ¬DC) が導け，したがって $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ と相対的に DC は AD から独立であることを示している．この無矛盾性問題を解決に導いたのはケクリスであった：

30.29 定理　(Kechris [84]). AD を仮定し，$V = L(\mathbb{R})$ とする．このとき DC が成り立つ．

したがって，ZF + $V = L$ が AC を導き出すように，ZF + AD + $V = L(\mathbb{R})$ が DC を導き出すという意味で，ZF + AD の内部モデルとしての $L(\mathbb{R})$ の役割は，L の ZF に対するものと，より類似度の高いものになっているわけである．したがって，特に絶対性から，Con(ZF + AD) なら Con(ZF + AD + DC) が成り立つ．これの証明でも，DC を確立するために単層化を得る手段として Steel [83] でのスケールの解析が用いられている．

ウディンはソロヴェイの DC の独立性の結果で $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ を AD で置き換えることに成功している：

30.30 定理　(Woodin – Kechris [84: §3]). AD と $V = L(\mathbb{R})$ を仮定する．このとき，ある強制法拡大の内部モデルで，AD + $\neg\mathrm{AC}_\omega$ の成り立つようなものが存在する．

したがって，Con(ZF + AD) から Con(ZF + AD + ¬DC) が帰結でき，AD に相対的な DC の独立性が得られる．

ウディンの AC_ω に対する反例は累積的階層のはるか上で得られるものである．もっと精密な設問を定式化するために DC を実数上の関係に制限したものを考える必要がある：

$$(\mathrm{DC}({}^\omega\omega)) \qquad \forall R(R \subseteq {}^2({}^\omega\omega) \ \wedge\ \forall^1 x \exists^1 y(\langle x,y\rangle \in R) \\ \rightarrow\ \exists f \in {}^\omega({}^\omega\omega)\forall^0 n(\langle f(n), f(n+1)\rangle \in R))\,.$$

30.31 未解決問題　(Woodin). AD から $\mathrm{DC}({}^\omega\omega)$ が帰結できるか？

これに対する独立性の結果のためには，今までに調合された AD の内部モデルとは質的に異なるものが必要となるように思える．

$L(\mathbb{R})$ によって明らかになった，もう一つの事柄は，Θ の大きさである．§28 で見たように AD のもとでは Θ より小さい基数 κ で κ-マーロとなるものが存在し，AD + $V = L(\mathbb{R})$

のもとでは，Θ 自身が弱到達不可能となるのだったことを思い出そう（28.18とその前，および，28.19）．

30.32 定理　(DC)(Kechris, Woodin – Kechris [85]). AD と $V = L(\mathbb{R})$ を仮定する．このとき，

(a) Θ は Θ-弱マーロである．

(b) Θ は弱コンパクトではない．つまり，Θ-木で Θ-枝を持たないようなものが存在する．

(c) Θ は可測基数の上限である．

(a) により Θ は $L(\mathbb{R})$ での階層で大きいものであることが確立されるが，(b) はそれに制限を果たす．(c) は Θ の純粋に組合せ論的な記述を与え，これは (a) を得るための議論からの帰結となっている．これに関連した問題をこの節の終わりで述べる．

射影的順序数の決定

射影的集合の AD のもとでの構造的解析は，本質的には 1980 年代半ばに射影的順序数の基数の列での決定により完成している．これはマルティンの学生であったジャクソン Steve Jackson による超絶的テクニックによる力仕事の結果であった．新しいテクニックにより，というよりは，時が満ちて，ジャクソンは 1983 年の彼の U.C.L.A. での学位論文で δ^1_5 を決定している．これの出発点はマルティンによる δ^1_3 上の正規超フィルターに関する考察で，これが δ^1_5 の下限の推定値を与えることになったのであった．1985 年にはジャクソンはすべての射影的順序数を決定しているが，上限の計算の多くは，彼の長大な Jackson [88] で述べられている．30.24 は，$\delta^1_{2n+2} = (\delta^1_{2n+1})^+$ を含む，その前までに知られていたことのまとめになっているが，この等式から，奇数の m に対する δ^1_m について調べれば十分であることが分かる．$n \in \omega$ に対し，順序数 $E(n)$ を帰納的に次のように定義する：$E(0) = 1$ で $E(n+1) = \omega^{E(n)}$ とする．ただし巾関数は順序数の巾関数である．

30.33 定理　(DC)(Jackson [88]). AD を仮定する．このとき，$n \in \omega$ に対し，

$$\delta^1_{2n+3} = \omega_{E(2n+1)+1}$$

となり，δ^1_{2n+3} は強分割の性質を持つ．

奇数 m に対する δ^1_m は，したがって，対応する ω たちの上昇列により添数付けられたものの次の基数となっていて，これの最初のものはマルティンの $\delta^1_3 = \omega_{\omega+1}$ となっている．これらが強い分割の性質を持っていることは，これから得られる副産物であるが，帰納法を先に進めるための証明の決定的な要素でもある．δ^1_1 が強い分割の性質を持つという 28.13 でのマルティンの結果以外には，δ^1_3 が強い分割の性質を持つかどうかさえ知られていなかったのである．帰納法の図式は次のように説明することができる：

§15 の終わりで方法論的考察により動機付けが与えられていたように，クーネンはマルティンの δ^1_1 が強い分割の性質を持つという結果を，ω_ω $(= u_\omega)$ 上の超フィルターを得るために応用しているが，これは，ここでの文脈で最良の $\mathbf{\Pi}^1_3$ 集合の木による表現に必要となる一様性の性質を与える．さらに進んで，クーネンは，これらの超フィルターとそれらに

よる超巾をより細かく解析している（Solovay [78] を参照）．これから，すべての $\alpha < \delta^1_3$ に対する性質 $\delta^1_3 \longrightarrow (\delta^1_3)^\alpha_2$ が得られるが，これが今度は $\mathbf{\Pi}^1_4$ 集合の木による表現で最良のものを得るために必要になる，δ^1_3 上の超フィルターを与える（28.10 を参照）．

δ^1_5 は δ^1_3 上の超フィルターによる超巾の上限として特徴付けでき（Kechris [81: 62] を参照），マルティンはこの上限を計算するためにはある標準的な関数のみを考察すればよいことに注目している．これを応用して，ジャクソンは，さらにこの上限をある標準的な超フィルターによる超巾の一つに関する上限に帰着させる複雑な解析を行って，この計算を完了させることができたのである．この過程において，彼は，δ^1_3 の強い分割の性質（上で述べた“弱い”ものではなく）と，$\mathbf{\Pi}^1_5$ の最良の木による表現をもたらす δ^1_3 上の超フィルターとそれらの超巾の解析という，クーネンでの状況を次のレヴェルに持ちあげることに成功したのであった．このような十分な帰納法の仮定のもとに，ジャクソンは，すべての射影的集合に対して最良の木による表現を得て，これによりすべての射影的順序数の計算を完了したのであった．

ジャクソンのこの解析により，AD のもとで δ^1_{2n+1} と δ^1_{2n+3} の真の間にある正則基数は，ちょうど δ^1_{2n+1} の強い分割の性質から惹き起こされる δ^1_{2n+1} 上の正規超フィルターによる δ^1_{2n+1} の超巾となっていることが確かめられた．さらに，これらの超巾は互いに異なるが，28.11 により，これらの数は δ^1_{2n+1} の下にある無限正則基数の数と一致する．このことを頭において，$F\colon \omega \to \omega$ を，$F(0) = 1$, $F(n+1) = 2F(n) + 1$ により定義する．このとき，AD のもとでは，すべての $n \in \omega$ に対し，δ^1_{2n+1} の下にはちょうど $F(n)$ 個の無限正則基数が存在することが示せる：

これは $n = 0$ のときには明らかで，$n = 1$ のときには $F(1) = 3$ だが，$\delta^1_3 = \omega_{\omega+1}$ より下の正則基数は $\omega, \omega_1, \omega_2$ である．帰納法により δ^1_{2n+1} の下に $F(n)$ 個の無限正則基数が存在すると仮定すると，δ^1_{2n+1} と δ^1_{2n+3} の真の間にはちょうど $F(n)$ 個の正則基数が存在することが分かる．したがって δ^1_{2n+1} 以下の無限正則基数と δ^1_{2n+1} 自身をこれに加えると，ちょうど $2F(n) + 1 = F(n+1)$ 個の正則基数が δ^1_{2n+3} の下に存在することが分かる．

ジャクソンの解析は，したがって ZFC で，**$\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ のもとで射影的順序数はすべて ω_ω より小さい**ことを確立した．実際，各 δ^1_m は $L(\mathbb{R})$ 上絶対であることに再び注意して，そこでの正則基数と V でのそれを比較すると，$\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ のもとで，30.24 に続けて不等式の列をすべての $n \in \omega$ に対し：

$$\delta^1_{2n+1} \leq \omega_{F(n)} \quad かつ \quad \delta^1_{2n+2} \leq \omega_{F(n)+1}$$

と続けることができる．特に，ZFC + $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ のもとで，射影的集合は 30.19 と 30.20 の特徴付けで λ-ボレル集合で，λ は ω_n のどれかとするものとして理解できた．これは，決定性を仲介とした，スースリンやシルピンスキーによる初期の結果を越える驚くべき進歩であった．

しかし，注意してみると，マルティンによる，初期の仮説の次のようなバージョンがまだ未解決のままであることが分かる：

30.34 未解決問題 (ZFC). $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ なら，すべての $1 \leq n \in \omega$ に対し，$\delta^1_n \leq \omega_n$ となるか？

ジャクソンの仕事に照らし合わせて，マルティンは，$\mathrm{AD}^{(L\mathbb{R})}$ における V の正則基数と，$L(\mathbb{R})$ でのそれに関する仮説を立てている：$\omega_1 = \delta^1_1$ の後，ω_2 が δ^1_2 に割り当てられ（したがって $\neg$CH），ω_3 が δ^1_3 に，しかし ω_4 は $\delta^1_4 = \omega^{L(\mathbb{R})}_{\omega+2}$ にではなく，δ^1_5 以下の $L(\mathbb{R})$ での最大の正則基数に割り当てられ，ω_5 は δ^1_5 に割り当てられる．いずれにしても，このレヴェルでの $L(\mathbb{R})$ での共終数のパターンの研究はこのような定義可能性による連続体へのアプローチに新しい直観をもたらすことになるように思える．

ジャクソンの解析により，同様の $L(\mathbb{R})$ の解析が Θ まで行えることの可能性が示唆されるが，これの第一歩はジャクソン自身により Jackson [91, 92] でなされている．この方向での一つの問題が，最近 (1993), 内部モデルの理論でウディンによってなされた重要な進展の後に，スティールとウディンにより解かれている．モショヴァキスとケクリスは ZFC + $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ のもとで，すべての $\Theta^{L(\mathbb{R})}$ 以下の（V での）非可算正則基数は $L(\mathbb{R})$ で可測基数となることを示している．ジャクソンの仕事により AD + DC のもとでは，$\sup(\{\delta^1_n \mid n \in \omega\})$ より下の，すべての非可算正則基数は可測である．

30.35 定理　(ZFC)(Steel, Woodin). AD + $V = L(\mathbb{R})$ を仮定する．このとき，Θ 以下のすべての非可算正則基数は可測である．

これらは全体として，1980年代初期の決定性と $L(\mathbb{R})$ の構造に関する内的な問題に関する様々な結果は記述集合論の，さらに洗練されてゆく色々な手法による系統的な進歩の蓄積，という印象を与える．AD の ZFC から見たときの無矛盾性の問題の解決はまだまだ遠いように思われたが，驚くべきことに，この方向の大詰めはまもなく来ることになり，注目すべきことには，これは，§32 で述べるように，超コンパクト基数を含む新しい動きによってもたらされたのであった．

§31　Det(α-$\mathbf{\Pi}^1_1$)

決定性からの帰結を前の何節かで見てきたので，この節で決定性の仮説の無矛盾性への最後の登頂を始める．マルティンはこの方向で努力を続けたが，1967年の彼の画期的な仕事から始めて1970年代の結果を記述する．これらの仕事はソロヴェイの巨大基数が決定性を確立するのに必要な無矛盾性の強さを供するという一般的な仮説を擁護する最初の具体的な事実を与えるものとなっていた．次の節でマルティン，スティールとウディンによるこの方向での決定的な仕事について述べる．

安全地帯に戻って，

この節と次の節では前提となる理論は ZFC とする．

証明は次第に省略されるようになるが，それはここでの証明が，その範囲と洗練性から，いずれにしても本書はおさまりきらないからであり，むしろアイデアの進展に関する生々とした記述を与えることに重点を置きたいからである．

1967年にマルティンは，射影的集合に関する構造的結果を得るために ω_1-完備超フィルターを，2値測度として，可能性を “積分” するために使うという豊饒なアイデアを思いつ

いた．このために，彼はチューリング度上のフィルターを導入し（29.13の最初の証明を参照），これによりソロヴェイのADで ω_1 が可測基数である（28.4を参照）という結果の新しい証明を得ている．この積分のアイデアは，シャープたちの存在を介してMartin-Solovay [69] の $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合に関する仕事 (§15) に浸透しているし，次の結果でもそのままの形で現れることになる．Det($\mathbf{\Pi}^1_1$) がZFCからだけでは成り立たないことは明らかであった（27.13）が，マルティンは可測基数の存在からこれが導かれることを示した．遠回しにソロヴェイのADからの可測性の導出の逆を補う形で，マルティンの結果は巨大基数からある量の決定性を得る，ということの可能性の扉を開くことになった．この可能性の探究は，この後，得られることになる，予期しなかったような目のさめる数々の帰結をもたらすことになる．

31.1 定理 (Martin [70]). 可測基数が存在すると仮定する．このとき，Det($\mathbf{\Pi}^1_1$) が成り立つ．

証明 $A \subseteq {}^\omega\omega$ を $\mathbf{\Pi}^1_1$ とする．したがって $\omega \times \omega$ 上の木 T で，任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$A(x) \;\leftrightarrow\; T_x \text{ は整順的}$$

となるものがある．A が決定的であることは，整列順序を用いて議論されるが，このために，§15の初めの展開が用いられる．

まず，$\langle\emptyset,\emptyset\rangle \in T$ としてよい．${}^{<\omega}\omega$ の帰納的な枚挙 $\langle \mathbf{s}_i \mid i \in \omega\rangle$ で $|\mathbf{s}_i| \le i$ となるものを固定して，任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，$<_x$ を ω 上の線型順序で，

$$\begin{aligned} i <_x j \;\leftrightarrow\;& \mathbf{s}_i \notin T_x \;\wedge\; \mathbf{s}_j \notin T_x \;\wedge\; i < j\text{；または} \\ & \mathbf{s}_i \notin T_x \;\wedge\; \mathbf{s}_j \in T_x\text{；または} \\ & \mathbf{s}_i \in T_x \;\wedge\; \mathbf{s}_j \in T_x \;\wedge\; \mathbf{s}_i <_{\mathrm{KB}} \mathbf{s}_j \end{aligned}$$

で定義されるものとする．ここに，$<_{\mathrm{KB}}$ はクリーニ=ブラウアー順序である．このとき任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$A(x) \;\leftrightarrow\; <_x \text{ は整列順序}$$

となる．

次に，$s \in {}^{<\omega}\omega$ に対し，

$$T_{\langle s\rangle} = \{w \mid \exists m < |s|(\langle s|m, w\rangle \in T)\}$$

として，$<_s$ を $|s| = \{i \mid i < |s|\}$ 上の線型順序で，T_x の代わりに $T_{\langle s\rangle}$ を使って $<_x$ のように定義したものとする．$|\mathbf{s}_i| \le i$ なら，$s \subseteq t$ が両方とも ${}^{<\omega}\omega$ の元のとき，関係として $<_s \subseteq <_t$ が成り立ち，$x \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$<_x = \textstyle\bigcup_{m\in\omega} <_{x|m}$$

となる．

最後に，κ を可測基数として，$\omega \times \kappa$ 上の木 T^* を

$$T^* = \{\langle s, u\rangle \mid \forall i, j < |s|(u(i) < u(j) \leftrightarrow i <_s j)\}$$

で定義する．このとき，すべての $x \in {}^\omega\omega$ に対し，$<_x$ が整列順序となるのは，$\langle\omega, <_x\rangle$ から $\langle\kappa, <\rangle$ への順序を保存する写像が存在する，ちょうどそのときだから，

$$A(x) \quad \leftrightarrow \quad \exists g \in {}^\omega\kappa(\langle x, g\rangle \in [T^*])$$

が成り立つ．

本題に入ると，$G_\omega(A)$ が決定的であることを示すために，次のような補助的なゲーム G^* を考える：

$$\begin{array}{llllll} I & : & \langle x(0), g(0)\rangle & & \langle x(2), g(1)\rangle & & \ldots \\ II & : & & x(1) & & x(3) & \ldots \end{array}$$

I と II は両方とも自然数 $x(i)$ をプレイして実数 x を作る．これに加えて，I は順序数 $g(i) < \kappa$ もプレイして，関数 $g\colon \omega \to \kappa$ を作る．I が勝つのは，$\langle x, g\rangle \in [T^*]$，したがって g は $\langle\omega, <_x\rangle$ から $\langle\kappa, <\rangle$ への順序を保存する単射で，$x \in A$ となるときとし，そうでないときは II の勝ちとする．

I が G^* 負けたときには，彼は，有限ステージですでに負けてしまっている：彼はある $i > 0$ で $\langle x(2i), g(i)\rangle$ という手を打ち，$g(i)$ は $<_x$ の順序を保存しないものとなってしまっている．また,（$|\mathbf{s}_i| \leq i < 2i$ だから）これは始片 $<_{x|2i}$ で見ることができる．したがって，27.1 により（それに続くコメントを参照）G^* は決定的である．もち I がこのゲームで必勝法を持つのなら，彼は $G_\omega(A)$ でも必勝法を持つ：彼は単に彼の手の $g(i)$ を隠して $x(2i)$ だけをプレイすればよい．もし II が必勝法を持っているのなら，彼が $G_\omega(A)$ で必勝法を持つことを示すために，κ の可測性を用いる：

最初に，15.14 の後の展開を適用する．T^* は次のような一様性の性質を持っていることに注意する：任意の $s \in {}^{<\omega}\omega$ に対し，$T^*_s = \{u \mid \langle s, u\rangle \in T^*\}$ とおく．このとき $<_s$ は線型順序だから，すべての $u \in T^*_s$ に対し，$\mathrm{ran}(u) \in [\kappa]^{|s|}$ となる．さらに，任意の $w \in [\kappa]^{|s|}$ に対し，$u \in T^*_s$ で $\mathrm{ran}(u) = w$ となるものが一意に存在する．

このことを頭に置いて，U を κ 上の正規超フィルターとして，$s \in {}^{<\omega}\omega$ に対し，U_s を，

$$X \in U_s \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq T^*_s \;\wedge\; \exists H \in U(|H|^{|s|} \subseteq \mathrm{ran}``X)$$

で定義する．このとき $s \neq \emptyset$ に対し，上で述べた一様性とローボトムの 7.17 により，U_s は T^*_s 上の κ-完備超フィルターとなる．

ここで，τ を G^* での II の必勝法とする．$n \in \omega$ と，$t \in {}^{2n+1}\omega$, $u \in {}^{n+1}\kappa$ に対し，$\tau(t, u)$ を，

$$\langle\langle t(0), u(0)\rangle, t(1), \ldots, \langle t(2n), u(n)\rangle\rangle$$

に対する τ による応答とする．このとき，上のような t と $k \in \omega$ に対し，

$$Z_{t,k} = \{u \in T_{t|(n+1)} \mid \tau(t, u) = k\}$$

とする．次に，戦略 $\tau_0\colon \bigcup_{n\in\omega} {}^{2n+1}\omega \to \omega$ を，

$$\tau_0(t) = k \quad \Leftrightarrow \quad Z_{t,k} \in U_{t|(n+1)}$$

として定義すると，これは pU_s が ω_1-完備であることからうまく定義できている．τ_0 が $G_\omega(A)$ での II の必勝法となっていることを示せば証明が完了する：

そうでないとして，x を τ_0 によるプレイだが，$x \in A$ となっているものとする．U は ω_1-完備だから，$H_0 \in U$ で，すべての $n \in \omega$ に対し，

$$[H_0]^{n+1} \subseteq Z_{x|(2n+1),\tau_0(s|(2n+1))}$$

となるものが存在する．H_0 は非可算だから，順序を保存する単射 g: $\langle \omega, <_x \rangle \to \langle H_0, < \rangle$ がとれる．ところが，$\langle x, g \rangle$ は $[T^*]$ の元となり，G^* のプレイで II が τ によってプレイしたものに対応するが，II はこのゲームで負けているから矛盾である． ⊣

$\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合の解析 (§15) でと同じように，ここでの仮定はシャープたちの存在に弱めることができる：

31.2 定理 (Martin). $a \in {}^\omega\omega$ で $a^\#$ が存在するとする．このとき，Det($\Pi^1_1(a)$) が成り立つ．

証明 上の議論を精密化する．A を $\Pi^1_1(a)$ とすると，13.1 により，対応する T は $L[a]$ の元としてよい．ここで，木 T^* を T から前と同じように，しかし，可測な κ のかわりに（本当の）ω_1 を使って定義する．T^*, したがって，対応するゲーム G^*（のペイオフ）も $L[a]$ の元となる．

まず $L[a]$ で I は G^* の必勝法 σ を持つとしてみる．このとき もち I が V で σ によって手を打って負けたとしたら，それは有限ステージでおこっているので，これは $L[a]$ の元となる，したがって，σ は V でも I の必勝法となっている．このことから前と同じように I が $G_\omega(A)$ で必勝法を持つことが帰結できる．

今度は，$L[a]$ で II は G^* の必勝法 τ を持つとする．P_τ を τ による部分プレイで，II の勝ちがまだ決まっていないようなも，つまり，I の勝ちになるようなプレイに拡張可能なものの全体とする．I が負けるときには，有限回目で彼は負けてしまっているので，$L[a]$ で $\langle P_\tau, \supset \rangle$ は整順的であることが分かる．したがって整順性の絶対性 (0.3) から，$\langle P_\tau, \supset \rangle$ は V でも整順的である．したがって，τ は V の意味でも II の必勝法となっている．あとは，$G_\omega(A)$ での II の必勝法を導出すればよい：

I_a を $a^\#$ により与えられる $L[a]$ の閉非有界な順序数の識別不可能クラスとして，$\gamma < \omega_1$ を，τ を与える，あるスコーレム項に $C = I_a \cap (\omega_1 - \gamma)$ の元が現れないように，十分大きくとる．ここで戦略 τ_0: $\bigcup_{n\in\omega} {}^{2n+1}\omega \to \omega$ を，

$$\tau_0(t) = k \quad \Leftrightarrow \quad \exists u \in {}^{n+1}C(\langle t|(n+1), u \rangle \in T^* \wedge \tau(t,u) = k)$$

により定義する．ここに $\tau(t,u)$ は前と同じように定義されたものとする．識別不可能性から，τ_0 はうまく定義できている．ここでも τ_0 は $G_\omega(A)$ での II の必勝法となる：

逆に，x が τ_0 によるプレイで，しかも $x \in A$ となっていると仮定する．C は非可算だから，順序を保存する単射 g: $\langle \omega, <_x \rangle \to \langle C, < \rangle$ が存在する．しかし，このとき，分別不可能性により，$\langle x, g \rangle$ は G^* のプレイで，II が τ によってプレイしたようなものに対応するが，ここで II は負けている．これは矛盾である． ⊣

この結果と27.14により，ソロヴェイの結果14.3：$\forall a \in {}^{\omega}\omega(a^{\#}$ が存在する$)$ なら $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合はすべて正則性を持つ，ということの別証明が得られていることを注意しておく．

マルティンは，彼の結果を，2つの相補する方向に対する妥当性の論拠と見なした．彼は上を見上げて予言的に，“もっと大きな基数が，我々の証明のすべての射影的集合に対する一般化をもたらすことを確信する”(Martin [70: 287]) と書いている．これはソロヴェイの $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ の相対的無矛盾性に対する期待と調和するものであり，1980年代の展開で実を結ぶことになるものであった．別の方向では，彼はZFCでのある定理に対する確証を見ている：

マルティン Martin [70] は，実際には，彼の結論を $\kappa \longrightarrow (\omega_1)^{<\omega}_2$ を満たす基数 κ の存在から得ている．順序を保存する写像の有界性（13.4を参照）により，基数 κ で $\forall \alpha < \omega_1(\kappa \longrightarrow (\alpha)^{<\omega}_2)$ を満たすものが存在すれば，ボレル決定性が成り立つことにマルティンは気付いた．そこで，彼はこの分割の性質は L に相対化でき (9.15), したがって，$\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_1)$ は L で成り立たないが，ボレル決定性は相対化できることを注意している：$G_\omega(A)$ が決定的であるという命題

$$\exists\sigma\forall y(\sigma * y \in A) \ \vee \ \exists\tau\forall z(z * \tau \notin A)$$

は，A が $\Delta^1_1(a)$ なら $\Sigma^1_2(a)$ となり，したがって，$a \in L$ のときには，L に対し絶対的となる．“$\forall$ボレル集合 A” がボレル集合実数コードにより実数量化子 $\forall^1$ として定式化できる（11.8の前を参照）ことから，ボレル決定性自身は，Π^1_3 命題となることを注意しておく．

当時最良の直接的な決定性の結果は，デイヴィス Davis [64] の結果である $\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}^0_3)$ であり，その証明は，2階の算術で行なえるものであった．ボレル決定性への初等的な方法によるアプローチの見かけ上の困難は，ほどなく注目すべき超数学での分析により説明されることになる：フリートマン Harvey Friedman は，初期に決定性の仮説の研究の普及に貢献した一人であった（28.16を参照）．プレイヤーたちが集合論のモデルの部分をコードするようなゲームを考えることで，フリートマン H. Friedman [71] は1968年にボレル決定性を確立するためには，累積的階層で V_{ω_1} までの存在が必要になることを示し，したがって，特に，ツェルメロの集合論，つまり ZF − 置換の公理，では証明できない．これは，ボレル決定性は実数の集合に関する Π^1_3 命題であるが，その証明ができるとすると，そのためには非可算回の巾集合演算が必要になる，という驚くべき状況を明らかにしている．フリートマンの議論から，レヴェルごとの解析をすることにより，各ボレル階層でのレヴェルはそれより一つ多い巾集合の演算が必要となることが明らかになる．彼自身は $\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}^0_5)$ が2階の算術では確立できないことを指摘している．

賭け金がこのように上がったところで，初めの進展は，マルティンの $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_1)$ の識別不可能クラスによる証明により導かれる．デイヴィス Davis [64] は，決定性はそこでの集合が十分に簡単な表現を持つものなら有限和をとることで保存されることを示していたが，これとマルティンの証明を混ぜ合わせることにより，バウムガルトナーは $\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}^0_3)$ の新しい証明を発見していた．この後，マルティンは弱コンパクト基数が存在するなら，$\mathbf{\Pi}^0_3$ 集合に対し，ある識別不可能クラスのもとで，そのような簡単な表現が存在することを見いだして，これにより $\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}^0_4)$ を導いている．この直ぐ後1971年にパリス Paris [72] はこ

こで必要になる識別不可能クラスを ZFC で得て Det($\mathbf{\Sigma}^0_4$) を直接的に確立している．

ここで，数年の間，進歩がとまってしまうが，後から振り反ってみると，識別不可能クラスに基づくアイデアはボレル決定性にむけての進歩をむしろ妨げるものとなっていたと言える．Martin [70] によるアプローチはより高い決定性の仮説の研究のためには画期的なものであったが，巨大基数のアイデアはここではむしろ捨ててしまう必要があった．ブラス Blass [75] および独立にミシェルスキーは，$AD_{\mathbb{R}}$ が自然数の手を持ち，${}^{\omega^2}\omega$ に含まれるペイオフの集合により規定される，長さ ω^2 のゲームのすべての決定性と同値になるという興味深い結果を得ている．これの証明は，与えられたゲームの戦略に関する情報を担うような補助的なゲームによるものであった．このアイデアをボレル集合のために組み直し精密化することにより，マルティンは 1974 年についに**ボレル決定性**を確立している：

31.3 定理 (Martin [75]). Det($\mathbf{\Delta}^1_1$).

大雑把に言えば，これの証明は，ボレル集合 A に，集合 X と $A^* \subseteq {}^{\omega}X$ を対応させ，A^* は開集合で，$G_\omega(A)$ でプレイヤーが必勝法を持つのは，彼が $G_X(A^*)$ で必勝法を持つ，ちょうどそのときであるようにすることで遂行される．フリートマンによる予見との整合で，A が $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ なら，X は大体 $V_{\omega+\alpha}$ の濃度を持つものとなる．後になって，Martin [85] で，この証明は，再組織化され，証明での様々な点はもっと直接的な帰納的な議論によるものとなっていて，Martin [90] では非可算な X とその文脈での "$\mathbf{\Delta}^1_1$" 集合 A に対する $G_X(A)$ の形のゲームに対して拡張されている．Martin [∞] では議論はさらにスムーズなものになっており，さらにマルティンによる仮定の最良性の考察を含むものとなっている：彼は，ZFC - 巾集合の公理で，$\alpha < \omega_1$ で $V_{\omega+\alpha}$ が存在するなら，Det($\mathbf{\Delta}^0_{1+\alpha+3}$) が成り立ち，フリートマンの議論の精密化として，ここでの仮定は Det($\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha+3}$) を示すためには十分でないことを示している．

ボレル決定性の確立は，超数学的予見によって賭け金の上げられた問題の解決，という意味でも，ボレル集合の世界での決定性からの帰結を保証するものになった，という意味でも，非常に重要な進歩であった．これの数多い応用のなかの一つとして，マルティンの 28.4 の証明の議論により，任意の ${}^{\omega}\omega$ のボレル集合 B はあるチューリング錘を含むか，あるチューリング錘と素になるかのいずれかである，つまり，$a \in {}^{\omega}\omega$ で $\{b \in {}^{\omega}\omega \mid a \leq_{\mathrm{T}} b\} \subseteq B$ か，あるいは $\{b \in {}^{\omega}\omega \mid a \leq_{\mathrm{T}} b\} \cap B = \emptyset$ となるものが存在することが帰結できることが挙げられる．面白いことに，ワッジがボレル集合のワッジ度を研究したとき（これの議論は Louveau [83] で再組織されて与えられている），彼の**ボレル=ワッジ決定性** —— 任意のボレル集合の組 $A, B \subseteq {}^{\omega}\omega$ に対し，（ワッジの補題 29.15 の証明でのような）ワッジ・ゲーム WG(A, B) が決定的であるという命題 —— を得るためにボレル決定性を仮定していたのだが，後に Louveau-Saint-Raymond [87, 88] で，この命題がすでに 2 階の算術で証明可能であることが示されている．もう一つ別の重要な展開で，フリートマン H. Friedman [81] は彼の H. Friedman [71] での超数学的な仕事を大幅に拡張して，特に，ボレル決定性から導くことができ，非可算回の巾集合演算の繰り返しを必要とするが，Π^1_2 となっているような，簡明な "ボレル対角化" の命題を定式化している（H. Friedman [81: 235]）．

持続した関心が寄せられていたのは，より強い仮説と帰結を求める Martin [70] からの

上への方向であった．より多くの決定性を得ようとする初期の試みでは，すでに Det($\mathbf{\Pi}^1_1$) より先の決定性のために可測性かそれ以上の無矛盾性の強さが必要であることが知られていた：

最初に事態を明らかにしたのは，またもやソロヴェイであった．全部の AD から ω_1 と ω_2 が可測であることを示した後で，彼は Det($\mathbf{\Pi}^1_3$) が ZFC の推移的な $\in$-モデルで可測基数を持つものの存在を帰結することを示している．この方向で，フリードマン H. Friedman [71a: §3] とマルティンにより，いくつかの同様な結果が得られた後，ソロヴェイは，Det($\mathbf{\Delta}^1_2$) から ZFC の推移的な $\in$-モデルでたくさんの可測基数を持つものの存在が帰結できることを確立している．この後，マルティンや他の人々によってもっと強い帰結が得られている．これらの結果は，ソロヴェイの発見した，チューリング度に関するマルティンの結果 28.4 の局所バージョンによる手法に基づいている．

これを補足する形で，同じ時期にマルティンは，ソロヴェイの AD から ω_1 の可測性を確立するためのもとの手法に戻り，この手法を用いて，彼はたくさんの可測基数の存在することを決定性の度合と関連付ける一連の結果を得ることになる．これは次の**差異階層**に基づくものとなっている：

可算な集合族の共通部分をとることに関して閉じたクラスを扱うことにして，Λ がそのようなクラスで，$\alpha < \omega_1$ のとき，クラス α-Λ は $A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ がその元であることは次のようなときであるとして定義される：A が α-Λ に属すのは，Λ に属す ${}^k({}^\omega\omega)$ の部分集合の列 $\langle A_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$ で，$A_\zeta \supseteq A_\xi$ がすべての $\zeta \leq \xi < \alpha$ に対し成り立つようなものがあり，

$$\mathbf{w} \in A \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{w} \notin A_\xi \text{ または } \xi = \alpha \text{ となるような最小の } \xi \text{ は奇数}$$

となるものが存在する，ちょうどそのときである（普通にそうであるように，順序数 α が奇数とは，ある極限順序数 δ により α が $\delta + 2n + 1$ の形に表せることとする）．A は Λ の集合のある $\supseteq$-錯の交代する同心環と見なせる：A が 1-Λ に属すのは，A が Λ に属す，ちょうどそのときで，A が 2-Λ に属すのは，ある Λ に属す集合 A_i により $A = A_0 - A_1$ となるときで，A が 3-Λ に属すのは，ある Λ に属す集合 A_i により $A = (A_0 - A_1) \cup A_2$ となるときである．A が 4-Λ に属すのは，ある Λ に属す集合 A_i により $A = (A_0 - A_1) \cup (A_2 - A_3)$ となるときである．等々．$\alpha \leq \beta < \omega_1$ なら，α-$\Lambda \subseteq \beta$-Λ となる．

$$\mathrm{Diff}(\Lambda) = \bigcup\nolimits_{\alpha < \omega_1} \alpha\text{-}\Lambda$$

とおく．この累積的階層を Λ の**差異階層**とよぶ．

ハウスドルフ Hausdorff [14: 460ff] は閉集合に対し，差異階層を定式化して，

$$\mathrm{Diff}(\mathbf{\Pi}^0_1) = \mathbf{\Delta}^0_2$$

となることを示し，この "溶解可能性" を用いてこのクラスの性質を調べている．クラトフスキー Kuratowski [58: §37III] はこの仕事をボレル階層で一般化して，各 $\xi < \omega_1$ に対し，

$$\mathrm{Diff}(\mathbf{\Pi}^0_\xi) = \mathbf{\Delta}^0_{\xi+1}$$

となることを示している（ボレル=ワッジ決定性に関する Louveau-Saint Raymond [87, 88]

はこの概念を用いて書かれている．極限順序数 δ に対する $\mathbf{\Delta}^0_\delta$ の類似の特徴付けもできる）．マルティンの考察は α-$\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合に基づくものであった．この議論を通じて，クラトフスキーの結果と対照的に，$\mathbf{Diff}(\mathbf{\Pi}^1_1)$ は $\mathbf{\Delta}^1_2$ にははるかに及ばないものであることを銘記しておく必要がある．

細文字版のデリケートな定式化は直接的にはできない．$\supseteq$-列は適当なやり方で定義可能でなければならないからである．(細文字の) α-Π^1_1 のためには，まず，α は帰納的である，つまり帰納的な整列順序 $E \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$ で順序型が α となるものが存在すると仮定し，ここでは暫定的に $m \in \omega$ に対し $\|m\|$ で E での m の前の元たちの順序型を表すことにする．このとき，$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ に対し，A が α-Π^1_1 とは，${}^k({}^\omega\omega)$ の部分集合の列 $\langle A_\xi \mid \xi < \alpha\rangle$ で，$\{\langle m, \mathbf{w}\rangle \mid \mathbf{w} \in A_{\|m\|}\}$ は Π^1_1; $\zeta \le \xi < \alpha$ に対し，$A_\zeta \supseteq A_\xi$; かつ，

$$\mathbf{w} \in A \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{w} \notin A_\xi \text{ または } \xi = \alpha \text{ となる最小の } \xi \text{ は奇数}$$

となるものが存在すること．$a \in {}^\omega\omega$ に対しても，同様にクラス

$$\alpha\text{-}\Pi^1_1(a)$$

を a 上で帰納的な α に対し定義する．このとき任意の $A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ と $\alpha < \omega_1$ に対し，A が α-$\mathbf{\Pi}^1_1$ **となるのは，ある** $a \in {}^\omega\omega$ **に対し，**α **が** a **上で帰納的となり，**A **が** α-$\Pi^1_1(a)$ **となる，ちょうどそのときである．**

このような様々な場合において，各レヴェルで普遍集合が存在し，したがって階層は真の階層となっている（12.8 を参照）．

マルティンのたくさんの可測基数の結果は $0^\#$ の新しい解明と対をなすものとなっている．$\mathrm{Diff}(\mathbf{\Pi}^1_1)$ に関する最初の顕著な結果は H. Friedman [71a] で得られているが，ここでは 31.2 を拡張して，$0^\#$ **が存在するなら** Det(3-$\mathbf{\Pi}^1_1$) **が成り立つ**ことが示されている．フリードマンはまた Det(Π^1_1) が L のすべての generic 拡大で成り立たないことを示す方法を見いだしている．マルティンは，この後 $0^\#$ の本質的な必要性と差異階層の妥当性を次の特徴付けにより確立している：

31.4 定理 (Martin). $0^\#$ が存在するのは，Det($\bigcup_{\beta<\omega^2} \beta$-$\Pi^1_1$) が成り立つ，ちょうどそのときである．

（証明は Martin [∞] または Dubose [90] を参照されたい.）

イェンセンの被覆定理（第 II 巻を参照）のアイデアに続くようにして，マルティンは 1975 年に 31.4 を応用して，フリードマンの結果の逆を得ている：Det(3-Π^1_1) **なら**，$0^\#$ **が存在する．** 3-Π^1_1 と Π^1_1 のギャップは残りのものよりずっと大きなものに見えるが，ハリントンは少し後にサミとスティールによるアイデアを用いて，このギャップを埋めて，マルティンの 31.2 の逆を確立している：

31.5 定理 (Harrington [78]). $a \in {}^\omega\omega$ で Det($\Pi^1_1(a)$) が成り立つと仮定する．このとき，$a^\#$ が存在する．

一般性のために，これ（と 31.2）は $a \in {}^\omega\omega$ に相対化された形で記述されていた．これ

らのマルティンとハリントンの結果を合わせると，非常にエレガントな特徴付けが得られる．任意の $a \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$a^\# \text{ が存在する} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Det}(\Pi^1_1(a))$$

となる．これは超数学的なシャープと解析集合の決定性の間の注目すべき同値関係となっており，巨大基数と決定性の理論を支える予期しない合流であり，背後に隠れている統一性にかかわる豊かな結果がさらに発掘されるであろうことをほのめかしている．

この統一性は，マルティンによる，たくさんの可測基数に関連した諸結果により，さらに補強されることになる．$\alpha+1$ 個の可測基数からスタートして，$\mathrm{Det}((\omega^2{\cdot}\alpha+1)\text{-}\mathbf{\Pi}^1_1)$ を得ることに成功しており，実際には差異階層にそってもう少し多くの決定性を確立している．31.1 と 31.2 のパターンをつづけて，彼は，α 個の可測基数を持つ内部モデルとその構造に対する識別不可能クラスで十分であることを見つけており，されに逆も成り立つことを示している！

M を ZFC の内部モデルとする．用語をはっきりとさせるために，**M が α 個の可測基数を持つ**とは，順序数の列 $\langle \rho_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$ で，各 $\xi < \alpha$ に対し，$M \models$「ρ_ξ は可測基数」となるものが存在することである．$M \models$「δ は可測基数の上限である」とする．細かく言うことを避けて，**M が識別不可能クラスを持つ**とは，順序数の非可算な識別不可能集合でその最小元は δ より大きいようなものが存在することとする．§21 により，このような識別不可能集合を持つことは，このモデルからの超越性の概念となっており，$0^\dagger$ のタイプの理論が展開できる．21.26 とその後の注意により，任意の $a \in {}^\omega\omega$ に対し，**$a^\dagger$ が存在するのは，a を含む内部モデルで可測基数を持ち，識別不可能集合を持つようなものが存在する，ちょうどそのときである．**

次は，31.4 と 31.5 を一般化するものとなっており，これらは，$\alpha = 0$ の場合と見なせる：

31.6 定理 (Martin). 任意の $a \in {}^\omega\omega$ と a 上で帰納的な α に対し，次は同値である：

(a) $\mathrm{Det}(\bigcup_{\beta<\omega^2}(\omega^2{\cdot}\alpha+\beta)\text{-}\Pi^1_1(a))$.

(b) $\mathrm{Det}((\omega^2{\cdot}\alpha+1)\text{-}\Pi^1_1(a))$.

(c) ZFC の内部モデルで a を含み，α が可測基数となり，識別不可能集合を持つようなものが存在する．

特に，すべての $a \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$a^\dagger \text{ が存在する} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Det}((\omega^2+1)\text{-}\Pi^1_1(a))$$

となる．

マルティンの学生のスィムス John Simms [79] は推移的な ZFC の $\in$-モデルで，“任意の大きさの可測基数が存在する” を満たし，ある適切な性質の識別不可能クラスを持つようなものが存在することの同様な特徴付けを与えている：これは Π^1_1 集合のブール結合の可算和に対する決定性 $\mathbf{\Sigma}^0_1(\Pi^1_1)$ と同値になる（Martin [∞: §5.5] を参照）．スィムスは実際には 31.6 と同様の同値性を，$\mathbf{\Sigma}^0_1(\Pi^1_1)$ の差異階層において，各レヴェルが前のレヴェルの基数の可測な極限となるような階層的に大きな可測基数にの言葉で与えている．

これらの様々な決定性の仮説は,(30.10により Det($\mathbf{\Pi}^1_2$) と同値になる) Det($\mathbf{\Delta}^1_2$) には遙かに及ばない．当時の印象的な結果は，ハリントンの学生のグリーン John Green [78] によるもので，彼は，可測基数の可測な極限より多くのものを得ている：Det(Δ^1_2) なら，**ZFCの内部モデルで，$\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ は可測基数$\} \in U$ となるような正規超フィルター U を持つ κ を持つものが存在する．** このような κ は "可測基数の可測な極限" の階層で大きなものとなっている．内部モデルの研究により，スティール Steel [82] はそのような κ があることから，どれだけの決定性が導けるのかを決定することに成功している．

後になって，より詳細な点に関しての訂正があった．31.6 は Det(ω^2-$\Pi^1_1(a)$) と同値の条件を与えない ($\alpha = 1$ としてみよ)．マルティンは1970年代の終わりに，ZFCの内部モデルで，a を含み可測基数を持つものの存在が十分であることを示しており，しばらくしてから，Martin [90] でこの結果を改良して，**ZFCの内部モデルで a を含み可測基数を持つものが存在すれば，実数の集合で，それ自身もその補集合も (ω^2+1)-$\Pi^1_1(a)$ に属すようなものはすべて決定的であるということ**を示している．31.6では Det((ω^2+1))-$\Pi^1_1(a)$) を得るために内部モデルの識別不可能クラスが必要だった，という意味で，この結果は最良のものとなっている．マルティンは可測基数を持ち特別な役割を果たす閉非有界集合を持つモデルについての， Det(ω^2-$\Pi^1_1(a)$) との技術的な同値命題も確立している．最近になって，ウェルシュPhilip Welch は，31.6 とより類似した，しかし弱い集合論に関した Det(ω^2-$\mathbf{\Pi}^1_1$) との同値命題を見つけている．

マルティンの学生のドゥボーズ Derrick Dubose は，Det($\bigcup_{\beta<\omega^2} \beta$-$\Pi^1_1$) と Det($\omega^2$-$\Pi^1_1$) の間の決定性の仮説にシャープがどのように関連するかを，子細に研究している．集合の階層を用いて定式化されるこのような仮説で，彼 Dubose [90] は，シャープの繰り返し $0^\#$, $0^{\#\#}$, $0^{\#\#\#}$, 等々の存在の特徴付けを見いだしている．Dubose [91, 92] は，$\#(a) = a^\#$ で与えられる実数上のシャープ関数とこの関数の様々な拡張版の存在の特徴付けを与えている．さらに，Dubose [95] は，実数の集合，実数の集合の集合，等々の，より高いタイプの対象に対するシャープ関数の存在の特徴付けを与えている．

$\mathbf{\Pi}^1_1$ 上の差異階層での集合の決定性の仮説に関する結果について詳述したので，マルティンがそのような仮説からどのようにして可測基数を得たのかを，1970年代初期に確立された彼のこの方向での一番初めの結果の一つを例にとって，見てみることにする．

31.7 定理 (Martin). Det($((\omega^2+1)$-$\Pi^1_1)$) を仮定する．このとき，内部モデルで可測基数を持つものが存在する．

証明 ω_1 の可測性のもとの証明でソロヴェイの用いたゲームの，ω-行の繰り返しのようなものを使って証明する．各プレイヤーはいつものように自然数を選ぶ：

$$\begin{array}{llllll} I: & x(0) & & x(2) & & \ldots \\ II: & & x(1) & & x(3) & \ldots \end{array}$$

帰納的なコーディングにより，x_I を列 $\langle (x_I)_\xi \mid \xi \leq \omega^2 \rangle \in {}^{\omega^2+1}({}^\omega\omega)$ をコードしていると見なし，x_{II} は列 $\langle (x_{II})_\xi \mid \xi < \omega^2 \rangle \in {}^{\omega^2}({}^\omega\omega)$ をコードしていると見なす．各 $z \in {}^\omega\omega$ は関係 $E_z \subseteq \omega \times \omega$ をコードし，これが整列順序のときには，$\|z\|$ でその順序型を表すこと

にしていた (§13) ことを思い出そう．

まず，ある $\xi < \omega^2$ に対し，$E_{(x_I)_\xi}$ か $E_{(x_{II})_\xi}$ が整列順序でない場合を考える．このときには ξ をそのようなのの最小なものとして，$E_{(x_I)_\xi}$ が整列順序でないときには，II の勝ち，そうでないときには I の勝ちとする．

今度は各 $\xi < \omega^2$ に対し，$E_{(x_I)_\xi}$ と $E_{(x_{II})_\xi}$ の両方が整列順序である場合を考える．このような ξ と $n \in \omega$ に対し，

$$\begin{aligned}
\beta^x_\xi &= \|(x_I)_\xi\|\,, \\
\gamma^x_\xi &= \|(x_{II})_\xi\|\,, \\
\rho^x_n &= \sup(\{\beta^x_{\omega\cdot n+i} \mid i \in \omega\} \cup \{\gamma^x_{\omega\cdot n+i} \mid i \in \omega\})\,, \\
\delta^x &= \sup(\{\rho^x_n \mid n \in \omega\})
\end{aligned}$$

とおく．F^x を $\{\rho^x_n \mid n \in \omega\}$ によって生成される δ^x 上のフィルターとする．つまり，

$$X \in F^x \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq \delta^x \wedge \exists m \in \omega(\{\rho^x_n \mid m \le n \in \omega\} \subseteq X)$$

である．ここでの意図は，ρ_n たちが上昇列であるときには，$L[F^x] \models$「$F^x \cap L[F^x]$ は δ^x 上の正規超フィルター」となり，以下のゲームの規則により I はこれを打ち破る努力を果されている．これを定式化するために，各 $z \in {}^\omega\omega$ は構造 $N_z = \langle \omega, E_z, A_z \rangle$ をコードし，これが整順的で外延的なら，$\mathrm{tr}(N_z)$ はその推移的崩壊を表し，$\pi_z\colon N_z \to \mathrm{tr}(N_z)$ は崩壊の写像であったことを思い出す（20.18の前を参照）．

$N_{(x_I)_{\omega^2}}$ が整順的で外延的で，ある極限順序数 $\theta^x > \omega$ に対し，

$$\mathrm{tr}(N_{(x_I)_{\omega^2}}) = \langle L_{\theta^x}[F^x], \in, F^x \cap L_{\theta^x}[F^x] \rangle$$

となっていなければ II の勝ちとする．I はこれらをすべてクリアしたとして，次のような正規性に対する反例がなければ II の勝ちとする： 写像 $f\colon \delta^x \to \delta^x$ で，$f \in L_{\theta^x}[F^x]$ かつ $\{\rho < \delta^x \mid \rho \le f(\rho)\} \notin F^x$ だが，f はどの F^x に含まれる集合上でも定値関数とならない．もし，このような f が存在するときには，f^x をそのようなもののうちで $L[F^x]$ の標準的な整列順序で最小のものとして，

$$\begin{aligned}
&x(0) = 0 \ \wedge \ f^x(\rho^x_0) \ge f^x(\rho^x_1)\,,\ \text{または，} \\
&x(0) = 1 \ \wedge \ f^x(\rho^x_0) < f^x(\rho^x_1)
\end{aligned}$$

のどちらかが成り立たないときには，II の勝ちとし，上が成り立つときには I の勝ちとする．

このゲームのペイオフを分析するために，$\xi < \omega^2$ に対し，

$$\begin{aligned}
Y_{2\xi} &= \{x \in {}^\omega\omega \mid E_{(x_I)_\xi} \text{ は整列順序 }\}\,, \\
Y_{2\xi+1} &= \{x \in {}^\omega\omega \mid E_{(x_{II})_\xi} \text{ は整列順序 }\}
\end{aligned}$$

を考える．前の文節で述べたような I が勝つ様々な条件に対応する集合は，

$$Y_{\omega^2} = \{x \in \textstyle\bigcap_{\xi<\omega^2} Y_\xi \mid E_{(x_I)_{\omega^2}} \text{ は整順的 } \wedge\ N_{(x_I)_{\omega^2}} \models \sigma_1 \wedge \psi \\ \wedge\ \pi_{(x_I)_{\omega^2}} “A_{(x_I)_{\omega^2}} = F^x \cap \pi_{(x_I)_{\omega^2}} “\omega\}$$

のようなものとなる．ここに σ_1 は 3.2(b) のもので，ψ は，ω が存在して最大の順序数は存在しないことを述べ，I が正規性の反例をもって勝つときの様々な条件を記述するものとする．ψ をうまくとると，

$$I \text{ はプレイ } x \text{ で勝つ} \iff \text{最小の } \xi \text{ で } x \notin Y_\xi \text{ か } \xi = \omega^2 + 1 \text{ となるものは奇数である}$$

とできることが直ぐに分かる．13.8(a)(c) でのように，Y_{ω^2} の定義で，整順性以外は算術的であるから，このペイオフ集合は (ω^2+1)-Π^1_1 であることが直ぐに分かり，したがってこのゲームは仮定により決定的である．他のソロヴェイのゲームでもそうであったように，I は必勝法を持つことができない：

逆に σ が I の必勝法だったとしてみよう．まず 28.2 の最初の証明でのように $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 有界性の議論を適用して，ω_1 の閉非有界集合を得る：$\eta < \omega_1$ に対し，

$$B_\eta = \{((\sigma * y)_I)_\xi \mid \xi < \omega^2 \wedge\ y \in {}^\omega\omega\ \wedge \\ \forall\zeta < \xi(E_{(y)_\zeta} \text{ は整列順序で } \|(y)_\zeta\| < \eta)\}$$

とおく．B_η は順序型 η をコードする実数上 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ である．さらに，σ が必勝法であることから，13.6 の意味で $B_\eta \subseteq \mathrm{WF}$ となる．したがって，ある $\beta < \omega_1$ に対し，$B_\eta \subseteq \mathrm{WF}_\beta$ となる．$w(\eta)$ をそのような β のうち最小のものとすると，これによって得られる関数 $w\colon \omega_1 \to \omega_1$ により ω_1 の閉非有界部分集合

$$C = \{\rho < \omega_1 \mid \rho \text{ は無限極限順序数 } \wedge\ \forall\eta < \rho(w(\eta) < \rho)\}$$

が得られる．

C は次のような決定的な性質を持っていて，以下ではそれが繰り返し用いられる：$\langle\rho_n \mid n \in \omega\rangle \in {}^\omega C$ **なら，このゲームの** σ **によるプレイ** $x \in \bigcap_{\xi<\omega^2} Y_\xi$ **で** $\rho^x_n = \rho_n$ **がすべての** $n \in \omega$ **に対し成り立つものが存在する**．これを示すために，$\langle\eta_\xi \mid \xi < \omega^2\rangle$ を，各 $n \in \omega$ に対し，$\{\eta_{\omega\cdot n+i} \mid i \in \omega\} \subseteq \rho_n$ となり，ρ_n で共終的なものとする．このとき，$y \in {}^\omega\omega$ を，各 $\xi < \omega^2$ に対し，$\|E_{(y)_\xi}\| = \eta_\xi$ となるようなものとする．このとき $\sigma * y \in \bigcap_{\xi<\omega^2} Y_\xi$ となるから，w と C の定義により，$\rho^{\sigma*y}_n = \rho_n$ がすべての $n \in \omega$ に対し成り立つことが分かる．

ここで，σ の存在から次のようにして矛盾を導く：C の極限点の上昇列 $\langle\rho_n \mid n \in \omega\rangle$ で，各 $n \in \omega$ に対し，$C \cap \rho_n$ が順序型 ρ_n を持つようなものを固定する．$x \in Y_{\omega^2}$ を σ によるプレイで，すべての $n \in \omega$ に対し，$\rho^x_n = \rho_n$ となるようなものとする．このとき対応する F^x と正規性の反例 f^x が存在し，$x(0)$ は 0 か 1 かのどちらかである．

まず最初に $x(0) = 0$ と仮定してみる．$k \in \omega$ をしばらくの間固定して，$z \in Y_{\omega^2}$ を σ によるプレイで，すべての $n \in \omega$ に対し，$\rho^z_n = \rho_{n+k}\rho^z_n = \rho_{n+k}$ となるようなものとし，対応する F^z と f^z を持つものとする．$F^z = F^x$ でなければならないから，$f^z = f^x$ である．ところが，$x(0)$ の値から $z(0) = x(0) = 0$ となり，これは σ によりプレイされた

ゲームの最初の手である．したがって，

$$f^x(\rho_k) = f^z(\rho_0^z) \geq f^z(\rho_1^z) = f^x(\rho_{k+1})$$

となる．不等式は σ が必勝法であるからである．これはすべての $k \in \omega$ に対し成り立つから，$f^x(\rho_k)$ は十分に大きな $k \in \omega$ に対し，一定にならなくてはならない．ところが，f^x はどんな F^x の元でも定値関数にならないから，これは矛盾である．

次に $x(0) = 1$ となる場合を考えてみる．$k \in \omega$ をとりあえず固定して，$\rho \in C$ を $\rho < \rho_k$ となるものとし，y を σ によるプレイで，$\rho_0^y = \rho$ かつ $\rho_{n+1}^y = \rho_{n+k}$ がすべての $n \in \omega$ に対し成り立つものとする．このとき，$F^y = F^x$, $f^y = f^x$ で $y(0) = x(0) = 1$ となるから，

$$f^x(\rho) = f^y(\rho_0^y) < f^y(\rho_1^y) = f^x(\rho_k)$$

が成り立つ．さらに，$\rho < \zeta < \rho_k$ となる $\zeta \in C$ を固定すると，σ によるプレイ z で $\rho_1^z = \zeta$ かつ $\rho_n^z = \rho_n^y$ がすべての $n \neq 1$ に対し成り立つようなものによる同様の議論で，

$$f^x(\rho) < f^x(\zeta)$$

が示せる．ρ と ζ を動かすと，$f^x|(C \cap \rho_k)$ は $f^x(\rho_k)$ への増加関数であることが分かる．ところが，$C \cap \rho_k$ は順序型 ρ_k を持つから，

$$\rho_k \leq f^x(\rho_k)$$

となる．最後に，k を動かすと，$\{\rho < \delta^x \mid \rho \leq f^x(\rho)\} \in F^x$ が得られるが，これは f^x の選び方に矛盾である．

I は必勝法を持ちえないことが判ったので，II が必勝法を持たなければならない．τ をそのような必勝法とする．σ から集合 C を導いた議論をなぞると，τ により ω_1 での閉非有界集合 D で次を満たすものがとれる：$\langle \rho_n \mid n \in \omega \rangle \in {}^\omega D$ で，**$\theta > \omega$ は可算な極限順序数，$i < 2$ なら，ここでのゲームのプレイ $x \in \bigcap_{\xi < \omega^2} Y_\xi$ で τ により，$\rho_n^x = \rho_n$ がすべての $n \in \omega$ に対し成り立ち，θ^x（は定義されていて）θ に等しく，$x(0) = i$ となるようなものが存在する．**

上昇列 $\langle \rho_n \mid n \in \omega \rangle \in {}^\omega D$ を固定して，$\delta = \sup(\{\rho_n \mid n \in \omega\})$ とおき，F を $\{\rho_n \mid n \in \omega\}$ から生成される δ 上のフィルターとする．$L[F] \models$「$F \cap L[F]$ は正規超フィルター」を示すことで完了する．これは，次の性質から導かれる：**$f \in {}^\delta\delta \cap L[F]$ で $\{\rho < \delta \mid \rho \leq f(\rho)\} \notin F$ なら，f はある F に属す集合上で一定である．**これが示せたとして，まず $F \cap L[F]$ が $L[F]$ で超フィルターとなることは，関数 ${}^\delta 2 \cap L[F]$ を用いれば容易に分かり，これから正規性を導くことができる．

上の性質を調べるために，逆に，F に属すどの集合上でも一定の値をとらないような反例が存在する，として，f^* を $L[F]$ の標準的順序でそのようなもののうち最小なものとする．20.2(a) での議論により，可算な θ^* で，これは極限順序数としてとれるが，$f^* \in L_{\theta^*}[F]$ となるようなものがある．$f^*(\rho_0) \geq f^*(\rho_1)$ なら $i^* = 0$, $f^*(\rho_0) < f^*(\rho_1)$ なら $i^* = 1$ とする．このとき D に対する条件により，τ によるプレイ x で，すべての $n \in \omega$ に対し，$\rho_n^x = \rho_n$ となり，$\theta^x = \theta^*$ で $x(0) = i^*$ となるものが存在する．ところが，τ は必勝法だ

から，これは矛盾である．これによって証明が完了した． ⊣

この証明で閉非有界集合 C によって提示された特別な性質は，Det((ω^2+1)-Π^1_1) からの最良の帰結，$0^\dagger$ の存在があり得ないことでないことを示唆するものとなっている．これより少し複雑な証明で，Det($(\omega^2 \cdot \alpha+1)$-$\Pi^1_1$) なら α 個の可測基数を持つ内部モデルが存在することを示すことができる．

これらの結果により，1970 年代中盤に，手始めの場合としての，射影的決定性の切辺を成り立たせるのにちょうど良い量のランクの階層で補強された，巨大基数との関係のパターンが明らかになってきた．ここで扱われている決定性の仮説は，しかしながら，Det($\mathbf{\Pi}^1_2$) には遙かに及ばないものであり，これは無矛盾性の強さで大きくそびえているように思えた．1970 年代を通じて，いくつもの強い命題の，超コンパクト基数からの相対的無矛盾性が示されたが，様々な試みにもかかわらず，Det($\mathbf{\Pi}^1_2$) はこれらの命題の中に入っていなかった．この後，もっと高く I0-I3 の仮説の無矛盾性の縁 (§24) まで上って，マルティンは 1978 年に次の人工的な関係を確立することがてきた：

31.8 定理 (Martin [80]). I2 を仮定する．このとき，Det($\mathbf{\Pi}^1_2$) が成り立つ．

実際には，これは反復可能性の条件を満たす $j\colon V_\delta \prec V_\delta$ の存在で十分であった．この仮説は I2 と I3 の真の間にあるものとなっている．マルティンは Det($\mathbf{\Pi}^1_1$) の証明の基本的なアイデアを使い，$\mathbf{\Pi}^1_2$ 集合の上のような埋め込み j による表現を用いることで，その 24.6 での性質を使えるようにした．

この巨大基数による肯定的結果は希望を高めたが，同時に憂慮も高めることになった．これに対する逆のようなものはあり得るのか？ この種類の結果はつねにある巨大基数の仮説の内部モデルをもたらすように思えたが (31.7 を参照)，1980 年代の初めには内部モデルの理論は，ミッチェル Mitchell [79] のものを越えていなかった，これは “超可測基数” に対するもので，本質的には，小さな γ に対する γ-強基数 (§26) に対するものとなっており，これらによる決定性の範囲はスティール Steel [82] により研究されている．いずれにしても，これらのモデルはすべて順序型が ω_1 の実数の Δ^1_3 整列順序を持つものとなっており，したがって，Det($\mathbf{\Pi}^1_2$) は満たすことができない (27.14 と 13.10 の証明による)．

巨大基数の内部モデルで Det($\mathbf{\Pi}^1_2$) を帰結するようなものえお得ることに対するこの明らかな障害が主な理由で，マルティンの結果により，I0-I3 のレヴェルでの仮説のための当時知られていたような内部モデルの可能性が否定されたのであった．

もっと高い決定性の仮説がもしどこかに置かれることがあるとすれば，それはどこであるのか，というのがもう一つの問題であった．それらは巨大基数の系列とは直交する方向を向いているのではないか？ もっとも強い巨大基数の仮説に注意が向いたとき，ウディンは勇敢にクーネンの矛盾の縁にある I0 を定式化して，マルティンの埋め込みによる証明を拡大して，1984 年の初めに次の定理を証明している：

31.9 定理 (Woodin). I0 を仮定する．このとき $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ が成り立つ．

このようにして，決定性は巨大基数の階層のぎりぎりのところでおさえられたわけであるが，仮説 I0-I3 はあまりよく理解されておらず，クーネンの命題でのように破綻してし

まうかもしれない危険をはらんでおり，内部モデルの理論を進めて無矛盾等価性の結果が得られる望みもほとんどなかった．しかし，少なくとも，決定性をつなぎとめることはできたわけであり，そこには巨大基数と決定性を統一する新しい動きが始まっていた．これがどのような結果に至るかは，次の節で述べることになる．

§32　AD の無矛盾性

この章ならびに本書を終えるにふさわしい結語として，この節では決定性の仮説の相対的無矛盾性に関して達成されたはなばなしい成果についてのパノラマを与える概説を行う．一般的な枠組となるべき基礎を用意した後は，証明は省略されるが，いずれにしても，ここで論じられることになる結果の証明は，その範囲と洗練から本書はおさまりきらないものになている．むしろ，アイデアの歴史的進歩に基づく，来るべき解説（Martin [∞] および Woodin-Solovay-Mathias [∞]）のためのガイドになるような足場を与えることを試みる．

究極の無矛盾等価の結果はウディン Hugh Woodin によるもので，彼のいくつかの結果はすでにこれまでの節で考察された．ウディンは 1976 年のまだ学部生だったころにバナッハ代数のある命題を集合論の命題に帰着させているが，後者の命題の無矛盾性はソロヴェイによって確立された．この後，バークレイの学生だったころ，ウディンはマルティンの公理をとり入れることにより，この無矛盾性に対するより系統的な道すじを発見して（Dales-Woodin [87] を参照），ほどなく，ラディン強制を用いて ω_1 上のイデアルに関する重要な無矛盾性の結果を得ている（第 II 巻を参照）．強い仮説と集合論の構造的な問題が彼の仕事での至上命令となってきたとき，ウディンは 1980 年代のカバル・セミナーに参加して決定性の研究に没頭すようになる．1980 年中盤頃には，たくさんのすばらしい結果により，彼は，1970 年代から脚光を浴びていたシェラハのそれとくらいしか比べられないような名声を得るようになった．しかし，シェラハとは違い，ウディンは結果をどんどん発表することはなく，彼の仕事の多くは未発表のままである．

もとに戻ると，巨大基数からの決定性の相対的無矛盾性に向けての主要な突破口を開いたのはマルティンとスティールであり，マルティンにとって，これは，ほとんど 20 年にわたるたゆまない努力の頂点であった．後になって見ると，この統合は，初等的埋め込みに基づく ZFC の諸原理は，実数の集合に対し，それらの正則性にかかわる，ある種の組合せ論的原理を供するはずである，という驚くべき慧眼に基づくものであった．マルティンの木の表現を用いて決定性を確立することによる初期の成功を確認して，そのような表現のための一般的なアプローチをまず与える．これは，巨大基数を含む前のいくつかの構成法の本質の，エレガントな抽象化となっている．

一様な木

一様な木は（§15 で述べた）Martin-Solovay [69] での仕事や，マルティンの $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_1)$ に関する結果 31.1, クーネンの 1971 年の δ^1_3 と δ^1_5 の解析といった，決定性の初期の仕事に潜在的に見いだせる．この概念そのものは，ずっと後になってからケクリス Kechris [81: 63]

とマルティンによって抽出されており，巨大基数から決定性を導くときの手法となる．パラダイムを与えるのは，任意の $\kappa > \omega$ に対し，実数の $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合は κ-スースリンである (13.14) から，$\omega \times \kappa$ 上の木の射影である．ところがそのような木の無限枝の全体は期待される意味で ${}^\omega\omega \times {}^\omega\kappa$ の閉集合となっており（12.10 を参照）したがって決定的である (27.1)．マルティンは κ を可測基数ととり，κ 上の超フィルターで ${}^\omega\omega \times {}^\omega\kappa$ 上の閉集合に対する必勝法を "積分" してそれらの射影である ${}^\omega\omega$ の $\mathbf{\Pi}^1_1$ 部分集合に対する戦略を得ることで $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_1)$ を得ている．§15 での分析を思い出すと，一様な木はちょうどマルティンの議論を進めるのに具合のよい超フィルターの構造を乗せた木となっていた．定義のためにいくつかの用語を導入する：

ある ${}^k\omega \times Y$ 上の（12.8 の後で定義されたような）木 T と $s \in \bigcup_{m\in\omega} {}^k({}^m\omega)$ に対し，

$$T_s = \{u \mid \langle s, u\rangle \in T\}$$

とする．この節では**木と言ったときには，普通には簡単のために** $k = 1$ **とした，このような木で，**$T_s \neq \emptyset$ **がすべての** $s \in \bigcup_{m\in\omega} {}^k({}^m\omega)$ **に対し成り立つようなものを意味する．**また，今までの取り決めに逆らって，**単項超フィルターも許す**ことにする．

ある集合 Y と $m \leq n \in \omega$ に対し，U はある $I \subseteq {}^mY$ 上の超フィルターで，W はある $J \subseteq {}^nY$ 上の超フィルターであるとする．このとき，U が W の**射影**であるとは，任意の $X \subseteq I$ に対し，

$$X \in U \quad \Leftrightarrow \quad \{u \in J \mid u|m \in X\} \in W$$

となることとする．さらに U と V が ω_1-完備のときには，

$$\begin{aligned} j_U\colon V \prec M_U &\quad \cong \mathrm{Ult}(V, U)\,, \\ j_W\colon V \prec M_W &\quad \cong \mathrm{Ult}(V, W) \end{aligned}$$

として，

$$k([f]_U) = [\langle f(u|m) \mid u \in J\rangle]_W$$

で与えられる写像 $k\colon M_U \to M_W$ は初等的となり，$k \circ j_U = j_W$ が成り立つ．

ω_1-完備超フィルターの列 $\langle U_m \mid m \in \omega\rangle$ が**塔**であるとは，ある集合 Y に対し，$U_m \subseteq \mathcal{P}({}^mY)$ がすべての $m \in \omega$ に対し成り立ち，U_m は $m \leq n \in \omega$ となる U_n の射影となっていることとする．このような塔に対し，

$$j_m\colon V \prec M_m \cong \mathrm{Ult}(V, U_m)$$

として，

$$j_{mn}\colon M_m \to M_n$$

を U_m が U_n の射影であることに対応する埋め込みとする．したがって，$j_{mn} \circ j_m = j_n$ が成り立つ．このとき，

$$\langle\langle M_m \mid m \in \omega\rangle, \langle j_{mn} \mid m \leq n\rangle$$

は順系となる．

$\langle U_m \mid m \in \omega \rangle$ が**可算完備**であるとは，$m \in \omega$ に対し $X_m \in U_m$ なら，$d \in {}^\omega Y$ で $d|m \in X_m$ が各 m に対し成り立つことである．15.7 での議論から，**塔が可算完備となるのは，対応する順系が整順的な順極限を持つ，ちょうどそのときである．**

ここでの中心的な定義に進むことにして，ある ${}^k\omega \times Y$ 上の木 T と $\kappa > \omega$ に対し，T が **κ-一様**とは，記述の簡単のために $k = 1$ として，$s \in {}^{<\omega}\omega$ に対し，T_s 上の κ-完備超フィルター U_s で，$s \subseteq \bar{s}$ のときには，U_s が常に $U_{\bar{s}}$ の射影となっているようなものが存在して，任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，

$$x \in p[T] \text{ なら，} \langle U_{x|m} \mid m \in \omega \rangle \text{ は可算完備な塔となる}$$

こととする．$m \in \omega$ に対し，$X_m = T_{x|m}$ なら，$d|m \in X_m$ がそれらの m に対し成り立つような対応する $d \in {}^\omega Y$ により $x \in p[T]$ であることが保証されるから，上の命題の逆は明らかである．

$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ として，A が **κ-一様スースリン**であるとはある κ-一様な木 T に対し，$A = p[T]$ となること．A が**一様スースリン**であるとは，ある $\kappa > \omega$ に対し，A が κ-一様スースリンとなることとする．このような集合が実際に存在するためには，可測基数が存在する必要があることに注意する：そうでなければ，U_s は単項でなければならないから (2.2.), 一様スースリンは閉集合であることと同値になってしまう（12.10 を参照）．また，2.8 の議論から $\kappa > 2^{\aleph_0}$ **あるいはもっとずっと大きいと仮定してよい．**

先に述べたように，マルティンの $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_1)$ に関する結果 31.1 は一様な木の概念を用いることで次の 2 つの演習問題に分割できる．

32.1 演習　可測基数 κ が存在すると仮定する．このとき，すべての $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合は κ-一様スースリンである．

ヒント　31.1 の証明で定義された，U_s が必要な性質を満たすものとなっていることを確かめればよい．　⊣

32.2 演習　実数の集合が一様スースリンなら，これは決定的である．

ヒント　$A = p[T]$ とする．ここに T は $\omega \times Y$ 上の κ-一様な木とし，U_s, $s \in {}^{<\omega}\omega$ を対応する κ-超フィルターとする．$G_\omega(A)$ が決定的であることを示すには，31.1 の証明でのような次の補助的なゲーム G^* を考える：

$$\begin{array}{lllll} I: & \langle x(0), g(0)\rangle & & \langle x(2), g(1)\rangle & & \ldots \\ II: & & x(1) & & x(3) & \ldots \end{array}$$

I と II は両方とも自然数 $x(i)$ をプレイして実数 x を作るが，それに加えて，I は $g(i) \in Y$ をプレイし，関数 $g\colon \omega \to Y$ を作る．I が勝つのは，$\langle x, g\rangle \in [T]$ となるときで，そうでなければ II の勝ちとする．

前と同じように G^* は決定的で，I がこのゲームで必勝法を持てば，彼は $G_\omega(A)$ でも必勝法を持つ．あとは，II が G^* で必勝法 τ を持てば，彼は $G_\omega(A)$ でも必勝法を持つことが示せればよい：

31.1 と同じように議論して，$n \in \omega$ と $t \in {}^{2n+1}\omega$ と $u \in {}^{n+1}Y$ に対し，$\tau(t,u)$ で

$$\langle\langle t(0), u(0)\rangle, t(1), \ldots, \langle t(2n), u(n)\rangle\rangle$$

に対する τ による応答を表すことにする．このとき，上のような t と $k \in \omega$ に対し，

$$Z_{t,k} = \{u \in T_{t|(n+1)} \mid \tau(t,u) = k\}$$

とおく．次に，戦略 $\tau_0\colon \bigcup_{n\in\omega} {}^{2n+1}\omega \to \omega$ を，

$$\tau_0(t) = k \quad \Leftrightarrow \quad Z_{t,k} \in U_{t|(n+1)}$$

により定義する．これは U_s が ω_1-完備であることから，うまく定義できている．最後に，τ_0 が $G_\omega(A)$ での II の必勝法になっていることを示す：

逆に，x が τ_0 によるプレイだが，$x \in A$ だったとしてみる．T の一様性から，$d \in {}^\omega Y$ で，すべての $n \in \omega$ に対し，$d|(n+1) \in Z_{x|(2n+1),\tau_0(x|(2n+1))}$ となるものがある．ところが，このとき，$\langle x, d\rangle$ は $[T]$ の元となり，G^* のプレイで II が τ によりプレイし，しかも負けたものに対応している．これは矛盾である． ⊣

弱一様木

弱一様木は一様な木を弱めた技術的な概念であり，やはりケクリス Kechris [81: 66] とマルティンによって最初に考察されている．これは，ウディンの仕事により，巨大基数から得られる決定性と関連した最初の構造的性質として中枢概念になった．ある $\kappa > \omega$ と ${}^k\omega \times Y$ 上の木 T に対し，再び簡単のために $k = 1$ として，T が **κ-弱一様**とは，$s, t \in {}^{<\omega}\omega$ で $|s| = |t|$ なら，T_s 上の κ-完備超フィルター $U_{s,t}$ があって，ある $m \in \omega$ に対し，$\bar{s}|m = s$ で $\bar{t}|m = t$ なら，$U_{\bar{s},\bar{t}}$ が常に成り立ち，任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対し，

$x \in p[T]$ なら $y \in {}^\omega\omega$ で，
$\langle U_{x|m,y|m} \mid m \in \omega\rangle$ が可算完備な塔になるものが存在する

が成り立つこととする．一様な木のときと同様に上の条件の逆は直ぐに分かる．明らかに κ-一様な木は κ-弱一様である．

$A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ に対し，A **κ-弱一様スースリン**であるとは，ある κ-弱一様木 T に対し，$A = p[T]$ となることとし，A が**弱一様スースリン**とは A がある $\kappa > \omega$ に対し，κ-弱一様スースリンとなることとする．一様性のときと同じに $\kappa > 2^{\aleph_0}$ **かもっとずっと大きいと仮定してよい．**

次の 2 つの演習は弱一様を別の角度から見るものとなっている．

32.3 演習 $A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ が κ-弱一様スースリンとなるのは，ある κ-一様スースリンな $B \subseteq {}^{k+1}({}^\omega\omega)$ に対し，$A = pB$ となる，ちょうどそのときである．

ヒント $k = 1$ として，順方向のために，$A = p[T]$ で T は $\omega \times Y$ 上の κ-弱一様木で，対応する κ-完備は $s, t \in {}^{<\omega}\omega$ で $|s| = |t|$ となるものに対し $U_{s,t}$ となっているとする．任意の $x, y \in {}^\omega\omega$ に対し，$\langle U_{x|m,y|m} \mid m \in \omega\rangle$ が可算完備でなかったとして，$X^{x,y}_m \in U_{x|m,y|m}$，

$m\in\omega$ を，$d|m\in X^{x,y}_m$ がすべての m に対して成り立つような $d\in{}^\omega Y$ の存在しないようなものとする．そうでなければ，すべての $m\in\omega$ に対し，$X^{x,y}_m=T_{x|m}$ とする．次に，$|s|=|t|$ となる $s,t\in{}^{<\omega}\omega$ に対し，

$$Z_{s,t}=\bigcap\{X^{x,y}_{|s|}\mid x,y\in{}^\omega\omega\ \wedge\ x||s|=s\ \wedge\ y||t|=t\}$$

とおく．このとき，$U_{s,t}$ は（前にも注意したような 2.8 での議論から）$(2^{\aleph_0})^+$-完備となるから，$Z_{s,t}\in U_{s,t}$ である．最後に，${}^2\omega\times Y$ 上の木 T^+ を

$$T^+=\{\langle s,t,u\rangle\mid u\in Z_{s,t}\}$$

により定義して，$|s|=|t|$ となる $s,t\in{}^{<\omega}\omega$ に対し，$\overline{U}_{s,t}=U_{s,t}\cap\mathcal{P}(Z_{s,t})$ とする．ここで，T^+ が $\overline{U}_{s,t}$ たちとともに κ-一様な木となり，$B=p[T^+]$ とすると $A=pB$ となることを確かめればよい．

逆は素直にやればできる．　$\dashv$

一様スースリン集合が閉集合の一般化と見なされ，これを確証する超フィルターが決定性を確立するのに対し，弱一様スースリン集合は，32.3 により解析集合の一般化と見ることができる．32.1 から，**可測基数 κ が存在するなら，すべての $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合は κ-弱一様スースリンであることが帰結できる．**

32.4 演習　T を，ある ${}^k\omega\times Y$, $\kappa>\omega$ 上の木とする．このとき，T が κ-弱一様となるのは，κ-完備な超フィルターの可算な族 $\mathcal{D}$ がって，任意の $x\in{}^k({}^\omega\omega)$ に対し，$x\in p[T]$ なら，可算完備な塔 $\langle U_m\mid m\in\omega\rangle\in{}^\omega\mathcal{D}$ で，すべての $m\in\omega$ に対し，$T_{x|m}\in U_m$ となるようなものが存在する，ちょうどそのときである．

ヒント　$k=1$ として，$\mathcal{D}$ から出発する方向に対しては，$\mathcal{D}$ が射影に関して閉じていると仮定してよい：もし $W\in\mathcal{D}$ である $n\in\omega$ と集合 Y に対して，$W\subseteq\mathcal{P}({}^nY)$ なら，各 $m\le n$ に対し，

$$\{\{u|m\mid u\in Z\}\mid Z\in W\}\in\mathcal{D}$$

となるからである．ここで，$|s|$ に関して帰納的に議論して，$U_{s,t}$ を，単項フィルターであることも許して，すべての $i\in\omega$ に対し，

$$\begin{aligned}&\{U_{s^\frown\langle i\rangle,t^\frown\langle e\rangle}\mid e\in\omega\}\supseteq\\&\qquad\{W\cap\mathcal{P}(T_{s^\frown\langle i\rangle})\mid W\in\mathcal{D}\ \wedge\ T_{s^\frown\langle i\rangle}\in W\ \wedge\ U_{s,t}\text{ は }W\text{ の射影}\}\end{aligned}$$

となるようにとればよい．　$\dashv$

32.3 は，弱一様性がいかに一様性と深く結びついているかを示しているが，32.4 は，前者がずっと簡単に得られるように見えることを示唆している．これからの一つの帰結は，弱一様スースリンであることは，ワッジ還元可能性で，つまり，連続な逆像をとることで保存される，ということである：

32.5 演習　$B\subseteq{}^l({}^\omega\omega)$ を κ-弱一様スースリンとして，$f\colon{}^k({}^\omega\omega)\to{}^l({}^\omega\omega)$ を連続写像とし，$A=f^{-1}(B)$ とする．このとき，A は κ-弱一様スースリンとなる．

ヒント $k=l=1$ として，$\omega\times Y$ 上の木 T に対し，$B=p[T]$ となっているとして，13.13(g) の証明でのように T と関数 T から定義された $\omega\times Y$ 上の木 S に対し，$A=p[S]$ となっているとする．$\mathcal{D}$ が T の弱一様性を 32.4 でのようにして保証しているなら，これが S の弱一様性も保証するものとなっていることを示せばよい：

$x\in p[S]$ とする．このとき，$f(x)\in p[T]$ となるから，可算完備な塔 $\langle U_m\mid m\in\omega\rangle\in{}^{\omega}\mathcal{D}$ で，すべての $n\in\omega$ に対し，$T_{f(x)|n}\in U_n$ となるものがある．証明を完了するには，$S_{x|m}\in U_m$ がすべての $m\in\omega$ に対し成り立つことを示せばよい：

$$\begin{aligned}S_{x|m}&=\{u\in{}^mY\mid\langle x|m,u\rangle\in S\}\\&=\{u\in{}^mY\mid\langle\theta(x|m),u||\theta(x|m)|\rangle\in T\}\\&=\{u\in{}^mY\mid u|n\in T_{f(x)|n}\}\end{aligned}$$

である．ここに，$n=|\theta(x|m)|$ したがって，$\theta(x|m)=f(x)|n$ とする．ところが $T_{f(x)|n}\in U_n$ で U_m は U_n に射影されるから，$S_{x|m}\in U_m$ が帰結できる． ⊣

弱一様スースリン集合の非常に重要な性質の 1 つは，それの補集合が標準的な "双対化" の方法により，再びスースリンになるということである．これはすでに§15 で開発したことであり，そこで与えられた動機付けにより，直ちにその定式化を行うことができる：

T を $\omega\times Y$ 上の κ-弱一様木として，対応する κ-完備超フィルターを $s,t\in{}^{<\omega}\omega$ で $|s|=|t|$ となるものに対し，$U_{s,t}$ とする．$s,t,\overline{s},\overline{t}\in{}^{<\omega}\omega$ である $m\in\omega$ に対し，$s=\overline{s}|m$ かつ $t=\overline{t}|m$ となるものに対し，

$$j_{s,t}\colon V\prec M_{s,t}\cong\mathrm{Ult}(V,U_{s,t})$$

と

$$j_{\langle s,t\rangle,\langle\overline{s},\overline{t}\rangle}\colon M_{s,t}\prec M_{\overline{s},\overline{t}}$$

を $U_{\overline{s},\overline{t}}$ の射影である $U_{s,t}$ に対応する埋め込みとする．したがって，$j_{\langle s,t\rangle,\langle\overline{s},\overline{t}\rangle}\circ j_{s,t}=j_{\overline{s},\overline{t}}$ である．${}^{<\omega}\omega$ の帰納的な枚挙 $\langle\mathbf{s}_i\mid i\in\omega\rangle$ を固定して，$\omega\times(2^{|Y|})^+$ 上の木を

$$\begin{aligned}\tilde{T}=\{\langle s,\langle\delta_i\mid i<|s|\rangle\rangle\ &\in\textstyle\bigcup_{m\in\omega}({}^m\omega\times{}^m((2^{|Y|})^+)\mid\\&\forall i,j<|s|(\mathbf{s}_i\supset\mathbf{s}_j\ \to\ \delta_i<j_{\langle s||\mathbf{s}_j|,\mathbf{s}_j\rangle,\langle s||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i\rangle}(\delta_j))\}\end{aligned}$$

で定義する．

次の表現の最初の部分は，15.5 と 15.7 の可算完備な塔による言い直しとなっており，二番目の部分はこの表現が大変頑丈なものとなっていることを示している．

32.6 命題

(a) $p[\tilde{T}]={}^{\omega}\omega-p[T]$.

(b) 任意の p.o. P で $|P|<\kappa$ となるものに対し，$\Vdash_P p[\check{\tilde{T}}]={}^{\omega}\omega-p[\check{T}]$ となる．

証明 (a) まず，$x\in p[\tilde{T}]$ として，たとえば，$\langle x,g\rangle\in[\tilde{T}]$ となっているとする．$i\in\omega$ に対し，$h_i\colon T_{x||\mathbf{s}_i|}\to\mathrm{On}$ を $M_{x||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i}$ で $g(i)=[h_i]$ となるようにとる．このとき，$\mathbf{s}_i\supset\mathbf{s}_j$

に対し，

$$Z_{ij} = \{u \in T_{x||\mathbf{s}_i|} \mid h_i(u) < h_j(u||\mathbf{s}_j|)\} \in U_{x||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i}$$

となる．ここで，反対に $x \in p[T]$ だったとしてみる．このときには，$y \in {}^\omega\omega$ で，$\langle U_{x|m,y|m} \mid m \in \omega\rangle$ が可算完備となるものがあり，したがって $d \in {}^\omega Y$ で，任意の $\mathbf{s}_i \subset y$ に対し，$d||\mathbf{s}_i| \in \bigcap\{Z_{ij} \mid \mathbf{s}_i \supset \mathbf{s}_j\}$ となる．したがって，$y \supset \mathbf{s}_i \supset \mathbf{s}_j$ なら $h_i(d||\mathbf{s}_i|) < h_j(d||\mathbf{s}_j|)$ となる．これから順序数の無限下降列が得られるが，これは矛盾である．

逆を示すために，$x \in {}^\omega\omega - p[T]$ とする．T_x は整順的だから，ρ: $T_x \to \|T_x\|$ をランク関数とする．$i \in \omega$ に対し，

$$\delta_i = [\rho|T_{x||\mathbf{s}_i|}]_{U_{x||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i}}$$

とおく．このとき $\mathbf{s}_i \supset \mathbf{s}_j$ なら，

$$\{u \in T_{x||\mathbf{s}_i|} \mid \rho(u) < \rho(u||\mathbf{s}_j|)\} \in U_{x||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i}$$

となるから，$\delta_i < j_{\langle s||\mathbf{s}_j|,\mathbf{s}_j\rangle,\langle s||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i\rangle}(\delta_j)$ である．はじめに本質的でない場合を片付けてしまうことにして，もし Y が有限なら，$U_{s,t}$ はすべて単項となり，したがって $p[T] = {}^\omega\omega$ である．もし Y が無限なら，$i \in \omega$ に対し，

$$|\delta_i| \leq |\{f \mid f\colon T_{x||\mathbf{s}_i|} \to \|T_x\|\}| \leq 2^{|Y|}$$

となることに注意する．したがって，すべての条件が満たされ，$x \in p[\tilde{T}]$ である．

(b) P を p.o. で $|P| < \kappa$ となるものとし，G を P-generic とする．$V[G]$ で $p[\tilde{T}] = {}^\omega\omega - p[T]$ となること示さなければならない．10.15 の証明から，各 $U_{s,t}$ は $V[G]$ での T_s 上の κ-完備超フィルター $U^+_{s,t}$ を生成する．$s, t, \overline{s}, \overline{t} \in {}^{<\omega}\omega$ で，ある $m \in \omega$ で，$s = \overline{s}|m$ かつ $s = \overline{s}|m$ となるものに対し，

$$j^+_{s,t}\colon V[G] \prec M^+_{s,t} \cong \mathrm{Ult}(V[G], U^+_{s,t})$$

として，$U^+_{s,t}$ が $U^+_{\overline{s},\overline{t}}$ の射影となっていることは直ぐに分かるから，

$$j^+_{\langle s,t\rangle,\langle\overline{s},\overline{t}\rangle}\colon M^+_{s,t} \prec M^+_{\overline{s},\overline{t}}$$

を対応する埋め込みとする．したがって，$j^+_{\langle s,t\rangle,\langle\overline{s},\overline{t}\rangle} \circ j^+_{s,t} = j^+_{\overline{s},\overline{t}}$ となる．このとき，

(i) f: $T_s \to V$ が $V[G]$ の元なら，V の元 g: $T_s \to V$ で $[f]_{U^+_{s,t}} = [g]_{U^+_{s,t}}$ となるものが存在する．

(ii) 任意の V の元 f: $T_s \to V$ に対し，$[f]_{U^+_{s,t}} = [f]_{U_{s,t}}$ となる．

(iii) $j^+_{\langle s,t\rangle,\langle\overline{s},\overline{t}\rangle}|\mathrm{On} = j_{\langle s,t\rangle,\langle\overline{s},\overline{t}\rangle}|\mathrm{On}$.

(i) は 10.15 の証明での主張 (*) から導ける．(ii) は (i) からランクに関する帰納法で導ける．最後に，(iii) については，まず，すべての順序数 ξ に対し，(i) から，ある V での g: $T_s \to V$ により $\xi = [g]_{U^+_{s,t}}$ となることに注意する．ところがこのときには，

$$
\begin{aligned}
j^{+}_{\langle s,t\rangle,\langle \bar{s},\bar{t}\rangle}([g]_{U^{+}_{s,t}}) &= [\langle g(u|m) \mid u \in T_{\bar{s}}\rangle]_{U^{+}_{\bar{s},\bar{t}}} \\
&= [\langle g(u|m) \mid u \in T_{\bar{s}}\rangle]_{U_{\bar{s},\bar{t}}} && \text{((ii) による)} \\
&= j_{\langle s,t\rangle,\langle \bar{s},\bar{t}\rangle}([g]_{U_{s,t}}) \\
&= j_{\langle s,t\rangle,\langle \bar{s},\bar{t}\rangle}([g]_{U^{+}_{s,t}}) && \text{(ふたたび (ii) による)}
\end{aligned}
$$

となり，(iii) が示せた．

$p[\tilde{T}] = {}^{\omega}\omega - p[T]$ が $V[G]$ の中で成り立つことの証明に移って，まず，$p[T] \cap p[\tilde{T}] = \emptyset$ がここで成り立つことを示す：T と $\tilde{T}$ を融合する木 S を

$$S = \{\langle s, u, \langle \delta_i \mid i < |s|\rangle\rangle \mid \langle s, u\rangle \in T \wedge \langle s, \langle \delta_i \mid i < |s|\rangle\rangle \in \tilde{T}\}$$

で定義する．このとき，V でも $V[G]$ でも，$p[S] = p[T] \cap p[\tilde{T}]$ となっているから，$p[T] \cap p[\tilde{T}] = \emptyset$ となるのは，S が整順的である，ちょうどそのときである．ところが，S は V で整順的であり，したがって絶対性 (0.3) により $V[G]$ ででもそうである．したがって得たい結果が得られた．

後は，$V[G]$ で，$x \in {}^{\omega}\omega - p[T]$ なら，$x \in p[\tilde{T}]$ となることを示せばよい：$V[G]$ で (a) と同じように議論して，T_x が整順的であることから，ρ: $T_x \to \|T_x\|$ をそのランク関数として，$i \in \omega$ に対し，

$$\delta_i = [\rho | T_{x||\mathbf{s}_i|}]_{U^{+}_{x||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i}}$$

とおく．$\mathbf{s}_i \supset \mathbf{s}_j$ に対し，前と同じように，$\delta_i < j^{+}_{\langle s||\mathbf{s}_j|,\mathbf{s}_j\rangle,\langle s||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i\rangle}(\delta_j)$ となるから，(iii) により，$\delta_i < j_{\langle s||\mathbf{s}_j|,\mathbf{s}_j\rangle,\langle s||\mathbf{s}_i|,\mathbf{s}_i\rangle}(\delta_j)$ である．したがって，$\langle x, \langle \delta_i \mid i \in \omega\rangle\rangle \in [\tilde{T}]$ となり，$x \in p[\tilde{T}]$ が分かる． ⊣

弱一様スースリン集合が正則性を持つことは，この概念が定式化された直後から知られていた．最初の証明はこれらの集合を生成するゲームによるものであったが，ウディンは新しい抽象的なアロプーチを示唆する強制法による証明を発見している．次の証明では両方のやり方が用いられている．

32.7 定理 ある実数の集合が弱一様スースリンであるとする．このとき，この集合は，ルベーグ可測で，ベールの性質を持ち，完全集合の性質も持つ．

証明 $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ が κ-弱一様スースリンとする．まずゲームを用いて A に対する完全集合の性質を確立する：

27.6 での完全集合の性質のためのゲーム $G_2^*(\Psi``A)$ を考える．I が有限列でなく，有限列をコードする自然数をプレイすることにより，このゲームは $G_\omega(B)$ の形に変換できる．B は A の連続な逆像としてとれることが容易に確かめられるから，32.5 により κ-弱一様スースリンである．

32.3 により，κ-一様スースリンな $C \subseteq {}^{2}({}^{\omega}\omega)$ で，$B = pC$ となるものがある．27.14 の証明でのように，$G_\omega(B)$ の押し広げバージョンで I は付加的な選択 $y(i)$ をするようなものを考える．32.2 により，このバージョンは決定的である．ところが，$G_\omega(B)$ は本質的には $G_2^*(\Psi``A)$ であり，したがって，27.14 の証明から，A は完全集合の性質を持つことが

分かる．

ルベーグ可測性とベールの性質を持つことも，32.5 を適用するためにはもう少し複雑な検証が必要になるが，同様に示せる．ここでは，代りに，ソロヴェイの 11.11 のアイデアに基づくウディンの強制法による議論を与える：

T を κ-弱一様木で $A = p[T]$ となるものとし，$\tilde{T}$ を 32.6 を満たすような補集合に対する標準的な木とする．A がルベーグ可測であることを示すには，ランダム実数を用いて 11.11 と同じように議論し，そこでの p.o. $\mathcal{B}^*$, 閉集合コードと G_δ コードを用いる．

ここでは $\Vdash$ で $\mathcal{B}^*$ の強制関係を後に続く議論のために十分なだけの集合に制限したものを表すことにして，μ を正則基数で，H_μ が $T, \tilde{T}, \mathcal{B}^*$ および $\Vdash$ を含むものとし，$N \prec H_\mu$ を可算でこれらの集合を含むものとする．以下では，強制法の概念を ZFC^- のモデルに対しても自由に用いることにする．

$$\bigcup\{A_c \mid c \in N \text{ は零集合の } G_\delta \text{ コード }\}$$

は零集合の可算和だから，11.10 により，これと等しい

$$\{x \in {}^\omega\omega \mid x \text{ は } N \text{ 上ランダム実数でない }\}$$

は零集合であることに注意する．したがって，ボレル集合 X で $A \triangle X$ が N 上ランダムでない実数からなるものが見つかればよい．

N の意味での $\mathcal{B}^*$ の強制法で，$\dot{r}$ をランダム実数の標準的名称として，$Q \in N$ を $\dot{r} \in p[\check{T}]$ を N の意味で決定するような閉集合からなる反鎖として，

$$X = \bigcup\{A_c \mid A_c^N \in Q \ \wedge \ A_c^N \Vdash \dot{r} \in p[\check{T}]\}$$

とおく．ω_1-c.c. により Q は可算だから，X はボレル（実際には F_σ）となる．証明を終えるには，N 上ランダムな x に対し，

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad x \in X$$

が示せればよい．まず，x を N 上ランダムで，$x \in X$ とする．このときには，X の定義から $N[x] \models x \in p[T]$ となり，したがって，$x \in p[T] = A$ である．逆方向には，決定的な性質である 32.6(b) が用いられる：$\mathcal{B}^*$ は濃度 $2^{\aleph_0}$ の稠密な部分集合（たとえば零集合でない閉集合の全体）を持ち，$\kappa > 2^{\aleph_0}$ は常に仮定できるから，

$$\Vdash_{\mathcal{B}^*} p[\check{\tilde{T}}] = {}^\omega\omega - p[\check{T}]$$

が成り立つ．このことと，X の定義から，x が N 上ランダムで，$x \notin X$ なら，$N[x] \models x \in p[\tilde{T}]$ となり，したがって，$x \in p[\tilde{T}] = {}^\omega\omega - A$ である．

ベールの性質についての議論は，コーエン実数を用いることで同様にできる．　$\dashv$

§§11, 27 の終わりでラムズィーの性質について議論した．マサイアス強制を用いて同様の議論をすることにより，**ラムズィーの性質も 32.7 の結論に加えることができる．** また，ルベーグ可測性やベールのカテゴリーと同じように，もっと複雑なゲームによる議論も可能である．これはラムズィーの性質を持つことが（§27 で言及した）ある位相空間でベー

ルの性質を持つことと同値であることと，これに対応する 27.14 でのような **-ゲームの押し広げバージョンの決定性による（Kechris [95: 19D, 21D]）．

強制法によるアプローチは，集合とその補集合の両方が強制法に関して頑丈な木による表現を持つという 32.6 での性質に依存するものであった．Feng-Magidor-Woodin [92] では，この性質が "universally Baire" と呼ばれており，決定性との関連だけでなく，それ自身を対象として研究されている．

一様な木と弱一様木の基本的な理論を確立して舞台の準備ができたので，歴史的な登坂をはじめる．決定性と弱一様性の関係を最初に確立したのはマルティンで，彼は，ZF で，$AD_{\mathbb{R}}$ **がすべての木が** ω_1**-一様になることを帰結する**ことを示している．この結果に触発されて，ウディンは 1982 年頃に，それに続く仕事の一般的な枠組の中の最初の結果を得ている：

32.8 定理 (Woodin [86]). κ を超コンパクト基数として，G を $\mathrm{Col}(\omega, \kappa)$-generic とする．このとき，$L(\mathbb{R})^{V[G]} \models$「すべての木は κ-弱一様である」が成り立つ．

$L(\mathbb{R})^{V[G]}$ を用いるのは，ソロヴェイの 11.1 と同じである．ウディンは，超コンパクト性により得られる超フィルターを弱一様性を確立するために用いているが，いずれにしても，32.8 は相対的無矛盾性の結果である．巨大基数からの帰結となっている結果にむけての進展を記述するために，まず強い仮説に関する 1980 年代初めの研究を要約するが，これは，第 II 巻で本格的に取りあげることになる話題である．

超コンパクト基数の役割

（第 5 章で記述したような）強い巨大基数のいくつかの仮説が導入された後で，1970 年代を通じての仕事により，これらの仮説がすべての無矛盾性の強さを測るための究極の物差しになっているという確信が強まってきた．強い命題は，大体の場合，超コンパクト基数から相対的無矛盾であることが示せ，それらからは強い意味でたくさんの可測基数が存在することが示せることが多かった．しかしながら，初期のもので一つだけ目立つ反例があって，それは，ω_1 上に ω_2-飽和的イデアルが存在するという命題であった．クーネン Kunen [78] は 1972 年に，この命題の膨大基数からの相対的無矛盾性を確立して，なぜこれが必要なのか，ということの発見法的な説明もしている．

クーネンは，その際に膨大基数の埋め込みが ω_1 上の ω_2-飽和的イデアルであることを保存するようなやり方で膨大基数を ω_1 に崩壊している．このようなイデアルに興味が持たれていたのは，その組合せ論的な性質が累積的階層での低い場所でのものであることだけでなく，ソロヴェイ Solovay [71] が示したように，そのようなものの持つ不思議な技術的な性質のためであった：そのようなイデアル I から出発すると，ある強制拡大 $V[G]$（実際 p.o. $\mathcal{P}(\omega_1) - I$ によるもの）で，**generic な初等的埋め込み** $j: V \prec M$ で ω_1 を臨界点として持つものが存在する．クーネンは，${}^{<j(\omega_1)}M \subseteq M$ であることに注意しているから，j は ω_1 が殆ど膨大であることを保証しているように見える．しかし，埋め込みの定義域は，基礎モデル V にすぎず，埋め込みは $V[G]$ の中に存在するだけである．しかしなお，

これは飽和イデアルが膨大性のレヴェルの無矛盾性の強さを持ち，generic な埋め込みが，一人前の埋め込みを示唆するように思えることの発見法的理由付けとしては十分であった．

クーネンの仕事は，集合論の研究者たちに強い巨大基数の仮説を使うことをうながし —— フォアマンの Foreman [82, 83] はその具体例であった —— 累積的階層の下方での強い性質を持つイデアルに対する永続的な関心を高めた．実際，このような関心は決定性の無矛盾性に対する主要な進展の引き金となっただけでなく，イデアルを統一理論に織り込みつつ，巨大基数，決定性とイデアル，という三和音を形成させたのである．

1970 年代の終わりの 2 つの統一化の結果が生成しつつあったモザイクの予兆とその神秘の感覚をさしはさんだ．一つは I2 が $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_2)$ を帰結するというマルティンの結果 31.8 であり，もう一つは Steel-Van Wesep [82] での，ZF で，$\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ **が成り立ち，**Θ **が正則基数なら，ある強制拡大の ZFC の内部モデルで，**NS_{ω_1} **は** ω_2**-飽和的である**という結果であった．これより前のマルティンや他の人々の仕事は，$\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_2)$ が明らかに非常に強い仮説であることを示唆していたが，マルティンによって上限が確立され，巨大基数の階層の一番上まで行ってやっと決定性を引き込むことができたのであった．スティール=ファン・ウェセプの結果は，ω_1 の定常部分集合に関する，それまで巨大基数で導き出すことのできなかった，基本的な命題の無矛盾性を確立した．§16 でのイデアルに関する用語を思い出すと，クーネンのイデアルは，任意の定常集合 $S \subseteq \omega_1$ に対し，$\mathrm{NS}_{\omega_1}|S$ の形で表すことはできない．このことから，ZFC での強い組合せ論的命題の無矛盾性を得るためには決定性の仮説をとりこむことが必要になるのではないか，という見方が強くなった．

マルティンの結果もスティール=ファン・ウェセプの結果もウディンによって改良されている．1981 年頃，彼は，後者の結果の仮定を AD に弱め（Woodin [83a] を参照），1984 の初めに，マルティンの結果で，より強い I0 から出発してはいるが，結論を $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ に強めている (31.9). 巨大基数の階層で AD を越えられたという点でこれは重要な進歩であったが，無矛盾等価の結果の可能性にはまだ遠かった．後になって分かるが，数学でしばしば起こるように，異なる領域からのアイデアの抽入が大きな方向転換を促し，新しい結果を生みだすことになるのであった．

この突破口は巨大基数の研究の最前線にいた三人の一流の数学者フォアマン，マギドア，シェラハによってもたらされることになった．1984 年の初めにイェルサレムでの共同研究 Foreman-Magidor-Shelah [88, 88a] で彼等は集合論にとって広域的な重要性を持つことになるプロジェクトを発足させたが，これが強い諸命題の新しい理解と強制法による新しい可能性を促したのであった．シェラハ Shelah [82] の強力な semi-proper 強制法のテクニックを応用して，彼等は，Foreman-Magidor-Shelah [88, 88a] で κ-c.c. 強制により κ を ω_2 に崩壊し，その際，この拡大でマルティンの公理の極大な拡張 *Martin's Maximum* が成り立つようにした．ここで彼等は，この新しい公理からいくつもの命題を直接導くことにより，これらの命題の相対的無矛盾性を確立したのである．それらの命題の一つは NS_{ω_1} が ω_2-飽和的であることであった．したがって，ω_1 上の ω_2-飽和的イデアルが存在することの無矛盾性の強さの上限がクーネンでの膨大基数から大幅に引きさげられただけでなく，NS_{ω_1} が ω_2-飽和的であることの無矛盾性が，初めて，決定性からではなく，巨大基数から確立されたのであった．

フォアマンとマギドアとシェラハは彼等の仕事により長い間信じられていた巨大基数の性質の引き下げに関する見方を覆したのであった．新しい仮説と諸命題の最初の瞬間にクーネンは巨大基数を ω_1 に崩壊して，この基数の強い性質を ω_1 用の ω_2-飽和的イデアルに変換したが，この種類の直接的な関連は常識になった．新しい発見は，巨大基数の $\aleph_2$ への注意深い崩壊がそのようなイデアルを保証するのに十分な構造を与える，ということであった．特に，この飽和イデアルでさらに強制拡大することで得られる generic な初等的埋め込みは，もとの巨大基数に付随したどの埋め込みも拡張することはない．

ここで，ルベーグ可測性によりもたらされる重要な関連がある．Foreman-Magidor-Shelah [88: §3] でも述べられているように，シェラハとウディンの結果を合わせると，$L(\mathbb{R})$ に関する超コンパクト性からの次の直接的な帰結が得られる：

Martin's Maximum からは $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ が導かれる．シェラハは，彼の Shelah [82] での S-閉鎖強制法のテクニックを Martin's Maximum の議論に組み合せると，この公理の変形で CH と無矛盾なものが得られることに気がついた：超コンパクト基数 κ は修正された κ-c.c. 強制で，さらに ω_1-ベールであるようなもの，したがって新しい実数を付加しないようなものにより崩壊される．基礎モデル V と $S \subseteq \omega_1$ で S も $\omega_1 - S$ も定常であるようなものから出発すると，S-閉鎖強制により，任意の generic 拡大 $V[G]$ で，$\mathrm{NS}_{\omega_1}|(\omega_1 - S)$ は ω_2-飽和的となる．

1984 年の 4 月に，ウディンはフォアマンへの長距離電話で，このような崩壊で実数が変わらないとき，さらに拡大したのきの $V[G]$ での ω_1 上の ω_2-飽和的イデアルにより与えられる generic な初等的埋め込みから**基礎モデル V で $L(\mathbb{R})$ に含まれるすべての実数の集合がルベーグ可測である**ことが帰結されることの証明の概要を話した．これはソロヴェイの結果 11.1 と巨大基数 κ に関して知られていた性質と，κ の ω_1 への任意の κ-c.c. 強制による generic な崩壊での実数がレヴィ崩壊 $\mathrm{Col}(\omega, \kappa)$ での実数と一致する，という事実に依存するものであった（generic な初等的埋め込みを用いて基礎モデルでのルベーグ可測性を確保するという議論が前に Magidor [80] と Foreman [86] で用いられていたことは，注目すべきことである）．ここでシェラハの実現とウディンによる次の注意が確立された：**超コンパクト基数が存在するなら，$L(\mathbb{R})$ に含まれるすべての実数の集合はルベーグ可測である．**

このような巨大基数の仮説からの帰結は，妥当な実数の整列順序を持つような内部モデルの存在の可能性を除外する（31.8 の後を参照）．よく知られた超コンパクト基数が，このような "手におえない" 性質を露呈したことから，このような帰結を得るのに十分であるように巨大基数の仮説を弱めることができるかが問われた．これは後に Shelah-Woodin [90] で記述されることになるが，ここで関連する概念は§26 ですべに述べたものであった：ウディンはまず，超強基数が十分であることに気付いている．ウディンが 1984 年の 6 月にイェルサレムを訪れたとき，シェラハは，後に**シェラハ基数**と呼ばれるようになる，さらに弱い概念を抽出して，そのような基数を一つ考えてそこから射影的階層の各レヴェルでのルベーグ可測性を得るための決定的なアイデアを提供している．しかし，そのような基数は，必要な技術的な性質をさらに下に反映しており，したがってもっと少しのものでできるはずであった．すぐ後に，ウディンはシェラハの定義で量化子を入れかえることで，

決定的なウディン基数の概念を定式化して，これがシェラハの図式のために十分であることを示している：

32.9 定理 (Shelah-Woodin [90]).

(a) $n \in \omega$ で，n 個のウディン基数とその上に可測基数が一つ存在するなら，すべての実数の $\mathbf{\Sigma}^1_{n+2}$ 集合はルベーグ可測である．

もし無限個のウディン基数とその上に可測基数が一つ存在すれば，$L(\mathbb{R})$ に含まれるすべての実数の集合はルベーグ可測である．

(a) の $n = 0$ の場合はちょうどソロヴェイの 14.3 となっている．ウディン基数は，崩壊による議論を行って飽和イデアルを得るためにちょうど必要なものを含んでいるように見え，さらにこれらの証明は最適のものになっているように思えた —— ウディン基数は弱コンパクトとは限らないので，直接には強い性質を反映しないことに注意する．可測基数が上に浮かんでいるという条件は繰り返し現れるものであるが，これは，大雑把に言えば，シャープたちの存在により安定な環境を保持するためのものである．ウディン基数の無矛盾性の強さは可測基数のそれよりずっと大きいので，これはこの理論でじゃまになる特性であるとしても，大した障害ではない．最後に，32.9 は仮定の最適性が保証されるような驚くべき状況の一番最初の例となっている：(a) から無限個のウディン基数があった場合にはすべての射影的集合のルベーグ可測が帰結できるが，(b) でのそれよりほんの少しだけ強い仮定により，$L(\mathbb{R})$ に含まれるすべての実数の集合の可測性への水門が急に開くことになるのである．

この展開の中で，シェラハは 1985 年の初めに飽和イデアルの無矛盾性の強さをウディン基数に落している：

32.10 定理 (Shelah). κ をウディン基数とする．このとき強制拡大で，$\kappa = \omega_2$ で NS_{ω_1} が ω_2-飽和的となるようなものが存在する．

CH と無矛盾な Martin's Maximum のバージョンと同じように，シェラハはここでも，イデアルは $\mathrm{NS}_{\omega_1}|S$ のような標準的なものではなくなるが，CH が強制拡大で成り立つようにすることに成功している．これに関連する諸結果は Shelah [87] を参照されたい．

ウディンは，1984 年の秋に，前の結果をずっとなめらかにする重要な概念的進展を得ている．この仕事は，まず巨大基数を崩壊して飽和イデアルを得て，さらに generic な初等的埋め込みを得るものである．いずれにしてもこれをすべて行う強制法が存在するので，ウディンはこれの本質をとらえて，彼の *stationary tower* **強制**を定式化している．この強制法の概念は，十分な仮説のもとで，多くの可能性の中で，generic な初等的埋め込み $j \colon V \prec M$ で $\mathrm{crit}(j) = \omega_1$ かつ ${}^{\omega}M \subseteq M$ となるものを直接に与える．これは一見奇妙なものに見えるが，よく見ると，定常性の一般化の採用においても，鍵となる "semi-proper" の性質が開稠密集合を "とらえる" ために必要となる，という点においても，Foreman-Magidor-Shelah [88] の仕事からの発展であることが分かる．stationary tower 強制により，ウディンは実数の集合の正則性の導出から飽和イデアルによる議論を除去した．

1985 年の初めウディン Woodin [88] は彼の stationary tower 強制を応用して，彼の前

の結果 32.8 を直接の帰結の形に改良し，ルベーグ可測をより本質的な実数の集合の表現可能性に置き換えた：**超コンパクト基数が存在するなら，$L(\mathbb{R})$ に含まれるすべての実数の集合は弱一様スースリンである．** stationary tower 強制のためにはウディン基数がちょうど必要な技術的な強さを提供することが直ぐに分かり，ウディンはこの命題の仮定を多くのウディン基数の極限に弱めている．彼はまだ最適の結果を得てはいなかったが，これには別の領域からの主要な発展がなされる必要があった．

ウディン基数と決定性

射影的集合のルベーグ可測性を得るための仮定が劇的に削減されてくると，複雑になってゆく諸命題間の関係の網目がマルティンとスティールによる 1985 年 9 月の革命的結果の舞台を用意することになった．この新しく発見されたウディン基数がマルティンによる $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_1)$ とたくさんの可測基数を持つ内部モデルとの関係の延長線上の結果が得られることの望みを高めた．この可能性に勇気づけられて，マルティンとスティールは発展しつつあった内部モデルの理論での障害をばねにして，決定性を導き出すことに成功した．系統的な解説である Martin-Steel [89: 74] で彼等は次のように書いている：

> ... 著者らはフォアマン，マギドア，シェラハ，ウディンの仕事に負うところが大きい．しかしながら，証明の技術的なアイデアはこれらの仕事とは何も関連を持たない．我々は，ウディン基数がその内部モデルを複雑にするのは何によるのかを問うことによって我々の証明に到達した．内部モデルの理論の初期の仕事では，超強基数が複雑な “反復” の木を生成するかもしれない，ということが心配事であった .... ウディン基数がそのような木を生成することが判明したのであるが，これは内部モデルの理論にとっては問題であったが，逆にこれを決定性の証明に用いることができるのである．

マルティンとスティールが彼等の結果を確立したのは反復の木によってであり，ウディン基数が，その役割を stationary tower 強制で補足して，そのような木を構成するためにちょうど必要な技術的な強さを用意したのであった．ウディン基数はこのようにして，決定性の無矛盾性の研究における中心的な巨大基数として，強固に確立されたのである．

分解の性質が前整列順序により，また単層化がスケールにより，射影的階層を伝播したように，マルティンとスティールの結果は，決定性を射影的階層を通じて一様な木により伝播させるための “遷移” 定理である．もし可測基数 κ が存在すれば，$\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合は κ-一様スースリンで，したがって決定的となり (32.1, 32.2), $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合は κ-弱一様スースリンとなる (32.3)．他の正則性のときと同じように，これを次のレヴェルに続けるための手段が講じられなくてはならない．弱一様木 T には $p[\tilde{T}] = {}^{\omega}\omega - p[T]$ となるような木 $\tilde{T}$ が対応する (32.6)．この遷移定理はウディン基数と前に述べた反復の木を用いて，T の弱一様性から，$\tilde{T}$ の一様性を導き，これから $p[\tilde{T}]$ の決定性を導く：

32.11 定理 (Martin-Steel [88, 89])．λ をウディン基数として T を λ^+-弱一様木とする．このとき，任意の $\gamma < \lambda$ に対し，$\tilde{T}$ は γ-一様となる．

したがって，$\mathbf{\Sigma}^1_2$ が κ-弱一様スースリンであることから続けて，もしウディン基数 $\lambda_0 < \kappa$ が存在するなら，$\mathbf{\Pi}^1_2$ は任意の $\mu < \lambda_0$ に対し，μ-一様スースリンとなり，このような μ

に対し，$\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合は，μ-弱一様スースリンとなる．したがって，もしウディン基数 $\lambda_1 < \lambda_0$ が存在するなら，この伝播を先に進めることができる：

32.12 系　$n \in \omega$ で，n 個のウディン基数とその上に可測基数が一つ存在すれば，$\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_{n+1})$ が成り立つ．

この結果の形式は，32.9(a) の還元から示唆されるものとなっている．$\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_{n+1})$ からすべての実数の $\mathbf{\Sigma}^1_{n+2}$ 集合がルベーグ可測であることが帰結できる (27.14) ことを思い出そう．1986 年の 7 月には，マルティンとスティールは内部モデルの理論を進めてこのような n 個のウディン基数と実数の Σ^1_{n+2}-善良整列順序を持つようなモデルを得ることができるようになっていた（Martin-Steel [94] を参照）．このような整列順序はルベーグ可測ではない（13.10 を参照）から，32.12（と 32.9(a)）で上に浮かんでいる可測基数は除去できないことが分かる．

マルティンとスティールの結果が出てから数週間以内に，ウディンは 1985 年の秋，弱一様な方言を $L(\mathbb{R})$ で得るための最適な結果を得ている：

32.13 定理　(Woodin). 無限個のウディン基数が存在してその上に 1 つ可測基数が存在するとする．このとき，これらのウディン基数最小上界より小さい任意の λ に対し，$L(\mathbb{R})$ に含まれるすべての実数の集合は λ-弱一様スースリンとなる．

次は，32.11 と 32.13 からの直接の帰結であり，後者と同じように，32.12 の最適性に照らしあわせて，1 つ可測基数を上に持っていることが，射影的集合から急に $L(\mathbb{R})$ での実数の集合へと運ばれるのは驚くべきことといえる．

32.14 系　無限個のウディン基数が存在してその上に 1 つ可測基数が存在するとする．このとき $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ が成立する．

話の勢いをそいではしまうが，巨大基数がどのようにして実数の集合の弱一様表現を与えるのかということの感覚を伝えるために 32.13 の一部を証明してみる：

32.15 命題　(Woodin). κ を到達不可能として，generic 拡大 $V[G]$ で，そこで，$\kappa = \omega_1$ となり，$j\colon V \prec M$, $\mathrm{crit}(j) = \omega_1$ かつ ${}^{\omega}M \subseteq M$ となるものがあるとする．また，$A \subseteq {}^{\omega}\omega$ で，木 T と T' で，$A = p[T]$ かつ $p[T'] = {}^{\omega}\omega - p[T]$ となるものがあり，これが $V[G]$ で成り立つとする．最後に $\lambda < \kappa$ を T-強基数とする．このとき，A は λ-弱一様スースリンとなる．

注意　このような generic 拡大の存在は κ がウディン基数のときには，stationary tower 強制から導かれる．任意の実数の集合 A とその補集合に対する，このような generic 拡大に対し頑丈な木の表現の存在は，無限個のウディン基数とその上の 1 つの可測基数の存在から導ける．最後に，ここでの文脈では $T \subseteq V_\kappa$ を仮定してもよいことが分かり，任意の大きさの T-強基数となっている $\lambda < \kappa$ の存在は，κ がウディン基数の場合には，26.4 から導ける．特に，この結果は，ウディン基数の存在のもとでは，32.6 の逆の弱い形となっている．

証明　まず，λ が T-強基数であることから，$A = p[T] = p[T \cap V_\lambda]$ を導き，期待される

ような論法により超フィルターの族を生成して，これにより中心となる構成の動機付けをする：

$x \in A$ として，たとえば $\langle x, f\rangle \in [T]$ となっているとする．$\gamma = \mathrm{rank}(f)$ として，$e\colon V \prec N$ を $\mathrm{crit}(e) = \lambda$, $\gamma < e(\lambda)$, $V_{\gamma+1} \subseteq N$ かつ $T \cap V_{\gamma+1} = e(T) \cap V_{\gamma+1}$ となるようなものとする．このとき，$\langle x, f\rangle \in [e(T)]$ となることは直ぐに分かるから，初等的埋め込みにより，ある $g \in V_\lambda$ で $\langle x, g\rangle \in [T]$ となるものがある．このとき $x \in p[T \cap V_\lambda]$ となる．

上のような $\langle x, f\rangle \in [T]$ と e で，$m \in \omega$ に対し，U_m を

$$X \in U_m \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq V_\lambda \ \wedge \ f|m \in e(X)$$

で定義する．このとき U_m は V_λ 上の λ-完備超フィルターとなる（単項フィルターである可能性もある）．この定義は，集合 $\mathrm{ran}(f|m)$ ではなくて関数 $f|m$ が用いられていることを除くと，初等的埋め込みからのエクステンダーの記述 (§26) を思い起こさせるものとなっている．エクステンダーでもそうだったように，$\langle U_m \mid m \in \omega\rangle$ は可算完備な塔となる．これが塔であることは U_m の定義から明らかである．これが可算完備であることは，初等的埋め込みから直接確かめられる：$m \in \omega$ に対し $X_m \in U_m$ なら，このような m に対し，$f|m \in e(X_m)$ となるり $f \in N$ だから，ある $d \in V$ で，そのような m に対し $d|m \in X_m$ となるものがなでればならないからである．最後に，すべての $m \in \omega$ に対し，

$$(T \cap V_\lambda)_{x|m} \in U_m \quad \Leftrightarrow \quad f|m \in e(T_{x|m}) \quad \Leftrightarrow \quad f|m \in e(T)_{x|m} \quad \Leftrightarrow \quad \langle x|m, f|m\rangle \in e(T)$$

となるが，これの最後のものは，前と同じに成り立っていることに注意する．

$$\mathcal{E} = \{U \mid U \text{ は } V_\lambda \text{ 上の } \lambda\text{-完備超フィルター}\}$$

とおくと，上の議論により $\mathcal{E}$ は，可算であることを除くと，32.4の特徴付けの意味で $T \cap V_\lambda$ が λ-弱一様であることを示している，この欠陥を補うために他の仮定を用いてさらに反映の議論を行う．まず，κ は V で到達不可能で $V[G]$ では $\kappa = \omega_1$ だから，$\mathcal{E}$ は $V[G]$ では可算であることに注意する．${}^\omega M \subseteq M$ だから，$j``\mathcal{E} \in M$ であることが分かり，これはそこで可算である．このことから，V と M の間に十分な結びつきがあることを使って，次の“保証する”を 32.4 の意味として，

$$M \models j``\mathcal{E} \text{ は } j(T \cap V_\lambda) \text{ が } j(\lambda)\text{-弱一様であることを保証する．}$$

という主張を確立する．これが示せたとすると初等的埋め込みにより，$T \cap V_\lambda$ が λ-弱一様であることを保証する例証が何かあり，$A = p[T \cap V_\lambda]$ となるから，証明は完了する．

上の主張を確立するために，$M \models x \in p[j(T \cap V_\lambda)]$ と仮定する．M で可算完備な塔 $\langle W_m \mid m \in \omega\rangle \in {}^\omega j``\mathcal{E}$ があって，すべての $m \in \omega$ に対し $j(T \cap V_\lambda)_{x|m} \in W_m$ となることが示せればよい．まず，V で $p[T'] = {}^\omega\omega - p[T]$ だから，初等的埋め込みにより $M \models x \notin p[j(T')]$ となっていることに注意する．このことから，$V[G]$ で $x \in p[T]$ となることが分かる：

$V[G]$ で議論して，逆に $x \notin p[T]$ となっていたと仮定してみる．このときには，仮定

によりそこでも $p[T'] = {}^\omega\omega - p[T]$ となっているから，$x \in p[T']$ であるので，例えば $\langle x, g\rangle \in [T']$ とする．このとき $\langle x, j``g\rangle \in [j(T')]$ が直ぐに分かる．もちろんここで $j``g$ は 関数 $\{\langle n, j(g(n))\rangle \mid n \in \omega\}$ となっており，${}^\omega M \subseteq M$ により $j``g \in M$ である．するとこのとき，$M \models x \in p[j(T')]$ となってしまうが，これは矛盾である．

$x \in p[T]$ が $V[G]$ で成り立つことが確かめられたので，$f \in V[G]$ を $\langle x, f\rangle \in [T]$ となるものとし，$\mathrm{rank}(f) = \gamma$ とおく．V で，$e\colon V \prec N$ をこの証明の最初でのようなもので，$\mathrm{crit}(e) = \lambda$, $\gamma < e(\lambda)$, $V_{\gamma+1} \subseteq N$, $T \cap V_{\gamma+1} = e(T) \cap V_{\gamma+1}$ となっているとする．f は V の元とは限らないが，各 $m \in \omega$ に対し，有限集合 $f|m$ は前と同じように V で用いることができるから，$U_m \in \mathcal{E}$ が定義できる．

$V[G]$ では f が使えるから，列 $\langle U_m \mid m \in \omega\rangle$ が得られ，前と同じように議論すると，この列は可算完備な塔で，各 $m \in \omega$ に対し，$(T \cap V_\lambda)_{x|m} \in U_m$ となる．したがって，${}^\omega M \subseteq M$ から，$j``f = \{\langle n, j(f(n))\rangle \mid n \in \omega\} \in M$ かつ $\langle j(U_m) \mid m \in \omega\rangle \in M$ となり，初等的埋め込みから，この列は $j``\mathcal{E}$ からとられた塔で，$j(T \cap V_\lambda)_{x|m} \in j(U_m)$ が各 $m \in \omega$ に対し成り立っていることが分かる．証明を終えるために，この塔が M で可算完備であることを確かめる：

V で $\bar{e} = e|V_{\lambda+1}$ とおく．このとき U_m の定義での e は $\bar{e}$ で置き換えることができる．これにより U_m たちに関した議論が V から移動できるようなる：M で $m \in \omega$ に対し，$X_m \in j(U_m)$ となっているとすると，初等的埋め込みから，$j(f|m) \in j(\bar{e})(X_m)$ が各 m に対し成り立つ．$j``f \in M$ で初等的埋め込みにより $\mathrm{rank}(j``f) = j(\gamma)$ となり，$V^M_{j(\gamma)+1} \subseteq \mathrm{ran}(j(\bar{e}))$ だから，$j``f \in \mathrm{ran}(j(\bar{e}))$ となり，もちろん $m \in \omega$ に対し，$(j``f)|m = j(f|m)$ である．ところが，このとき $j(\bar{e})$ が初等的埋め込みであることから，$d \in M$ で $d|m \in X_m$ がすべての $m \in \omega$ に対し成り立つようなものがなければならない．これにより M での $j``\mathcal{E}$ に関する主張が証明でき，命題の証明も完了したことになる．$\dashv$

この証明は，この理論で，${}^\omega M \subseteq M$ と $p[T'] = {}^\omega\omega - p[T]$ が $V[G]$ でも V でも成り立つという性質の決定的な役割を際立たせて示している．

AD の無矛盾性の強さが 32.14 で擁護されたわけだが，ウディンはまもなく究極の無矛盾等価性の結果を確立した：

32.16 定理　(Woodin). 次は無矛盾等価である：

(a) ZFC + 無限個のウディン基数が存在する．

(b) ZF + AD.

これが得られるべき定理であったのかどうかはともかく，ここでの乏しい記述ではこの証明の深さと洗練を表すことは到底できない（この証明や他の事柄については，Woodin-Mathias-Hauser [∞] を参照されたい）．順方向は，無限個のウディン基数がすべて可算に崩壊されて，それらの stationary tower 強制の generic 集合の列 $\langle G_n \mid n \in \omega\rangle$ で次の意味で一貫性を持ったものが構成される：各 $V[G_n]$ には generic な初等的埋め込み $j_n\colon V \prec M_n$ が存在して，$n \leq \overline{n}$ に対し，写像 $j_{n,\overline{n}}\colon M_n \prec M_{\overline{n}}$ で j_n と可換なものが存在する．$\mathbb{R}_n$ を M_n での実数の集合として，目的の AD のモデルは $L(\bigcup_n \mathbb{R}_n)$ とする．議論は背理法で構成可能性に関して最小の反例が存在すると仮定する．そのような決定的でないことを

宣言された実数の集合 A に対し，それとその補集合に対する頑丈な木の表現が見つかり，これから帰結される弱一様性により，マルティン=スティールの結果 32.11 を応用することで A の決定性が導かれる．

逆方向には，まず，AD が成り立ち $V = L(\mathbb{R})$ なら，Θ は HOD でウディン基数になることが示される．ここで HOD はもちろん遺伝的順序数定義可能集合のクラスである．AD が直接なやり方で用いられて，ソロヴェイの ω_1 が可測基数であることの証明に似た議論により，ある超フィルターの族が得られる．ここで，HOD で使うことのでき定義可能性の性質を用いて，これらの超フィルターに対する決定的な正規性の性質が導かれる．最後に，モショヴァキスのコーディングの補題の一様なバージョンにより，これらの超フィルターから，それがウディン基数であることを示すために必要となる HOD の埋め込みで Θ の下での強基数の性質を例証するものが得られることを示す．

無限個のウディン基数を持つ内部モデルを得るには，まず，上の HOD での結果を用いて，内部モデルの $\supseteq$-無限下降列 $\langle M_i \mid i \in \omega \rangle$ を構成する．まず $M_0 = \mathrm{HOD}^{L(\mathbb{R})}$ として，M_1 は，M_0 の $L(\mathbb{R})$ で構成されたマルティンのチューリング度上の超フィルターに似たものによる超巾（の推移的崩壊）とする．この超巾は間接的に新しい実数の集合 $\mathbb{R}_1$ で $\mathbb{R}_1 \supseteq \mathbb{R}$ となるものと，埋め込み $L(\mathbb{R}) \prec L(\mathbb{R}_1)$ を生成する．初等的埋め込みにより AD は $L(\mathbb{R}_1)$ でも成り立っており，$M_1 = \mathrm{HOD}^{L(\mathbb{R}_1)}$ となる．そこでこの構成を繰り返して，すべての M_i が得られる．$\mathrm{HOD}^{L(\mathbb{R})} \models \ulcorner\Theta$ はウディン$\urcorner$ から，順序数の上昇列 $\langle \theta_i \mid i \in \omega \rangle$ とこれに付随する一様に定義された θ_i が $M_i[W_i]$ でウディンとなるような例証，$W_i \subseteq \theta_i$ を構成する．$W = \langle W_i \mid i \in \omega \rangle$ と $M = \bigcap_i M_i$ として，$M[W]$ で各 θ_i がウディンであることを示して議論が締めくくられる．

§31 で述べたように，$\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_2)$ は 1970 年代の決定性の無矛盾性の研究で注意の注がれた仮説であった．1989 年にウディンは次のようなエレガントな特徴付けにより，これに結着をつけている：

32.17 定理 (Woodin). 次は無矛盾等価である：

(a) ZFC + $\mathrm{Det}(\Pi^1_2)$).

(b) ZFC + ウディン基数が存在する．

32.18 定理 (Woodin). 次は無矛盾等価である：

(a) ZFC + $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_2)$).

(b) すべての $a \in {}^\omega\omega$ に対し，可算順序数 δ で δ は a を含む ZFC のある内部モデルでウディン基数となるものが存在する．

(a) から (b) への方向は，32.16 の証明に表されているが，これはケクリスとソロヴェイ Kechris-Solovay [85] の ZF + DC での，任意の $a \in \omega$ に対し，$L[a] \models \mathrm{Det}(\Delta^1_2)$ なら Det(OD) である，という驚くべき結果から出発している．つまり，このようなモデルで，細文字の Δ^1_2 集合の決定性が成り立つなら，このことから，細文字で “定義される” 最大のクラス，つまり順序数定義可能な集合のクラスが決定的であることが帰結できるということである．

$n > 2$ となる $\mathrm{Det}(\Pi^1_n)$ に対しては，ある数のウディン基数を持つということのみに関

するような 32.17 と直接に類似性を持つ命題は成り立たないことが知られている．ウディンはこの領域も探索しており，無矛盾等価性のための暫定的な巨大基数の定式化をいくつか持っている．

$\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ についてはどうだろうか？ §27 の終わりで触れたように，$\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ の内部モデルは任意の $S \subseteq \mathbb{R}$ に対し，$L(\mathbb{R} \cup \{S\})$ という形であり得る．ウディンは，もし $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ のモデルですべての実数を含むものがあれば，それらのうちで最小のものがある，ということを示している（[88: §3] を参照）．さらに，彼は，無限個のウディン基数が存在するということの議論の比較的弱いものから，そのようなモデルを得ることに成功している：

32.19 定理　(Woodin). δ で $\mathrm{cf}(\delta) = \omega$ となり，δ はウディン基数の極限で，また，すべての $\gamma < \delta$ に対し，γ-強基数の極限でもあるようなものとする．このとき，ある強制拡大があって，その中で，すべての実数を含むような内部モデルで，$\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ を満たすようなものがとれる．

これの証明は，32.16 の順方向の証明のような方針で行うが，最近の諸結果はここでの仮定が，ちょうど $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ の無矛盾性の強さのものとなっていることを示唆している．前に述べたように，$\mathrm{ZF} + \mathrm{AD}_{\mathbb{R}} +$「$\Theta$ は正則基数」は，$\mathrm{ZF} + \mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ の無矛盾性を帰結する強い仮説となっており (Solovay [78a]), NS_{ω_1} が ω_2-飽和的であることの相対的無矛盾性が最初に得られたときの十分条件であった (Steel-Van Wesep [82]). $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}} +$「$\Theta$ は正則基数」がウディン基数のどんな集積よりも強い無矛盾性の強さを持つことを示唆する様々な結果があったが，1992 年にウディンはこの仮説さえ手なずけることに成功している．§24 での仮説 I1 の，ある δ に対し，$j\colon V_{\delta+1} \prec V_{\delta+1}$ がある，と，AD の最初の無矛盾性証明 (31.9) で用いられた，これよりほんの少し強い，クーネンの矛盾すれすれの仮説を思い出そう．

32.20 定理　(Woodin). ある δ に対し，$j\colon V_{\delta+1} \prec V_{\delta+1}$ で，例えば $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ となるものが存在するとする．このとき，次が $\mathrm{Col}(\omega, \kappa)$ による任意の generic 拡大で成り立つ：すべての実数を含む内部モデルで，$\mathrm{AD}_{\mathbb{R}} +$「$\Theta$ は正則 を満たすものが存在する．

巨大基数がまた現れたわけだが，ここでの仮定は，まだ最適なものになっていないことは確実である．

決定性にまつわる関係の大きな網目を作る統合的な結果がどんどん増えゆくが，このなかのうち手元にあるものを急いで述べて，この概論を終えることにする．

正則性から見た決定性

ウディンは，彼の決定性との同値性の研究の初期に（30.28 を参照），決定性の仮説がそれらの実数の集合に対する構造的な帰結と同値になるかもしれない，という可能性について考察している．彼は射影的集合に関して次の問題を提出している：

32.21 未解決問題　(ZF + DC)(Woodin [82]). 次は同値か？:

(a) PD.

(b) すべての実数の射影的集合はルベーグ可測でベールの性質を持ち，すべての ${}^2({}^{\omega}\omega)$ の射影的部分集合は射影的集合で単層化できる．

ルベーグ可測性とベールの性質を持つことは，選択原理と反対のものであるが，これらは単層化の性質によって補足されて，これらのPDからの帰結が全部でPDを再現できるだけの強さを与える，ということである．もしこれが正しいなら，アド・ホックな性格を持つ仮説が，かなりの程度正当化され，構造的に直接的な帰結との同値性により説明がつくことになる．ウディン Woodin [82] 彼の問題に答えていないが，(b) から $\forall a \in {}^{\omega}\omega(a^{\dagger}$ が存在する）が帰結できることを示している（$a^{\dagger}$ は§21の終わりで定義していた）．

1990年代の初めに，ウディンは全面的なADに対して，同様の問題に答えることができている．30.25での $\boldsymbol{\Pi}^2_1$ での単層化の限定を思い出そう．

32.22 定理 (ZF + DC)(Woodin). $V = L(\mathbb{R})$ を仮定する．このとき，次は同値である：

(a) AD.

(b) すべての実数の集合はルベーグ可測でベールの性質を持ち，すべての ${}^2({}^{\omega}\omega)$ の $\boldsymbol{\Sigma}^2_1$ 部分集合は単層化できる．

新しい (a) から (b) への方向はスティールによる内部モデルの理論での最近の結果により与えられている．32.21のPDに対する意味は32.22でADに移されており，この結果は，$L(\mathbb{R})$ の大きな集合のクラスの正則性の特徴付けとして，古典的な記述集合論の研究の頂点と見なすことができるだろう．

正則性から見たとき $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ はどうなるのであろうか？この方向での定式化はこの強い仮説を理解するためのアプローチの可能性の1つとして非常に興味をかきたてられる．$\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ は ${}^2({}^{\omega}\omega)$ のすべての部分集合が単層化できることを帰結する (27.15)．次のADと $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ の間にある仮説を考えてみよう：

($\mathrm{AD}^{1/2}_{\mathbb{R}}$) 片方のプレイヤーが実数をプレイし，他のプレイヤーは自然数をプレイするような，すべてのゲームは決定的である．

明らかに，27.15の証明には，この仮説で十分である（プレイヤー I は実数 x を選び，彼の残りの手は忘れてしまい，プレイヤー II は自然数を選んでいってこの結果得られる実数 y が $\langle x, y\rangle \in A$ となるように試みればよい）．1980年代の初めに，ケクリス Kechris [88] は，ZF + DCで逆を確立している： $\mathrm{AD}^{1/2}_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$ AD +「${}^2({}^{\omega}\omega)$ のすべての部分集合は単層化できる」．単層化は弱い形の選択原理と見なせるから，この結果は，$\mathrm{AD}^{1/2}_{\mathbb{R}}$ はADよりそれほど強くないことを示唆する．

他方，ウディンは，ZF + DCで，AD +「すべての実数の集合はスケールを持つ」から $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ が帰結できることを示している．スケールは木の表現を与え (30.2)，木の表現は，γ-ボレル集合としての表現 (30.13(a)) と射影的順序数と類似のものを与える（30.12を参照）．したがって，AD +「すべての実数の集合はスケールをもつ」は $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ から導かれることが知られているものの先にあるものを帰結する：(i) すべての実数の集合は ∞-ボレルである，つまり，開集合から出発して補集合と（任意の長さの）整列順序集合の和集合をとる演算で閉じているような最小のクラスに属す．(ii) Θ の下に任意の大きさの正規非極限基数が存在する（これらは射影的順序数に似たものとなっている）．

スケールを持つことは，ADをかなり強めることになるように思えるのに対し，単層化

はそれほど強くない拡張であるようであった．しかしながら，ベッカーの結果 Becker [85] を用いることにより，ウディンは 1980 年代の初めに，次の無矛盾等価性の結果を得ている： Con(ZF + DC + AD + すべての $^2({}^\omega\omega)$ の部分集合は単層化が可能である) $\Leftrightarrow$ Con(ZF + DC + AD + すべての実数の集合はスケールを持つ)．これは同値性を予告しており，1980 年代終わりの展開に続けて，ウディンはこれを確立して，様々な仮説を 1 つに結びつけている：

32.23 定理　(ZF + DC)(Woodin). 次は同値である：

(a) $AD_{\mathbb{R}}$

(b) AD + すべての実数の集合はスケールを持つ．

(c) AD + すべての $^2({}^\omega\omega)$ の部分集合は単層化できる．

$AD_{\mathbb{R}}$ がこのような (c) より見かけ上こんなにも弱い命題と同値になるとは非常にショッキングである．

イデアルから見た決定性

イデアルの研究が決定性に関する主要な問題解決を導いたが，これに続く展開は，次第にイデアルに関する結果に帰ってくることになる．ミッチェルとスティールはウディン基数のための内部モデルの展開を追って，後にシェラハの 32.10 が本質的に最適なものになっていることを示している：

32.24 定理　(Steel). ω_1 上の ω_2-飽和的イデアルと可測基数が存在するとする．このとき，ZFC の内部モデルで，ウディン基数を持つものが存在する．

ここでも，可測基数がちょっと邪魔になっているが，少なくとも，飽和イデアルとウディン基数の無矛盾等価性の結果は，両方上に可測基数が浮かんでいる形で述べることができる．

内部モデルの理論は，さらに力強く発展していった．1992 年にスティールはウディン基数を無限に持つ内部モデルを用いて，ウディン Woodin [88: 6591] による問題の 1 つを，次の結果によって解いている：**$L(\mathbb{R})$ に含まれるすべての実数の集合が弱一様スースリンなら，$AD^{L(\mathbb{R})}$ が成り立つ．**

終わりに向かってダッシュするが，イデアルに関する重要なアイデアがほどなく導入されている．§16 での用語を用いて，κ 上のイデアル I が **λ-稠密**であるとは，集合族 $D \subseteq \mathcal{P}(\kappa) - I$ で $|D| = \lambda$ となり，任意の $X \in \mathcal{P}(\kappa) - I$ に対し，$Y \in D$ で，$Y - X \in I$ となるものが存在することである．これは，ブール代数 $\mathcal{P}(\kappa)/I$ での稠密性の自然な概念となっている．明らかに，**I が λ-稠密で，$\lambda < \mu$ なら，I は μ-飽和的である．**ウディンは，彼のイデアルに関する変わらない興味から，1980 年代の初めに，前に述べた Steel-Van Wesep [82] の結果を改良して，ZF で，**$AD_{\mathbb{R}}$ が成り立ち Θ が正則基数であるとする．このとき，ある強制拡大に ZFC を満たす内部モデルが存在して，そこで，ある定常な $S \subseteq \omega_1$ に対し $NS_{\omega_1}|S$ が ω_1-稠密になる．**という命題を確立している．彼は後に同じ結論を**殆ど膨大な基数の存在**の仮定から導きだしている．シェラハ Shelah [86: 247ff] は ZFC が興味深い制限を果たすことを示している：**もし $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ なら，NS_{ω_1} は ω_1-稠密でない．** 特に，

CHがこの結論を帰結する．32.10では連続体は ω_2 なので，CHは NS_{ω_1} が ω_2-飽和的であることと無矛盾であるか，というのは重要な未解決問題の1つとなっている．

イデアルと決定性との関係を押し進めて，ウディンは次を確立しているが，ここでも32.22と同じように，スティールの内部モデルの理論での最近の仕事が用いられている．

32.25 定理 (Woodin). ω_1 上に ω_1-稠密なイデアルが存在するとする．このとき，$\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$ が成り立つ．

無矛盾性の強さでの逆はウディン Woodin [∞] により1992年の終わりに，新しい一群の結果の一部として確立されている．ADの結果を取り込んで一歩さがることにより，巨大基数と決定性と無限組合せ論の，息を飲むような統合が見えてくるが，これは，来たるべき，より深い理解をもたらす偉大な成果を約束しているようである．

32.26 定理 (Woodin). 次は無矛盾等価である：

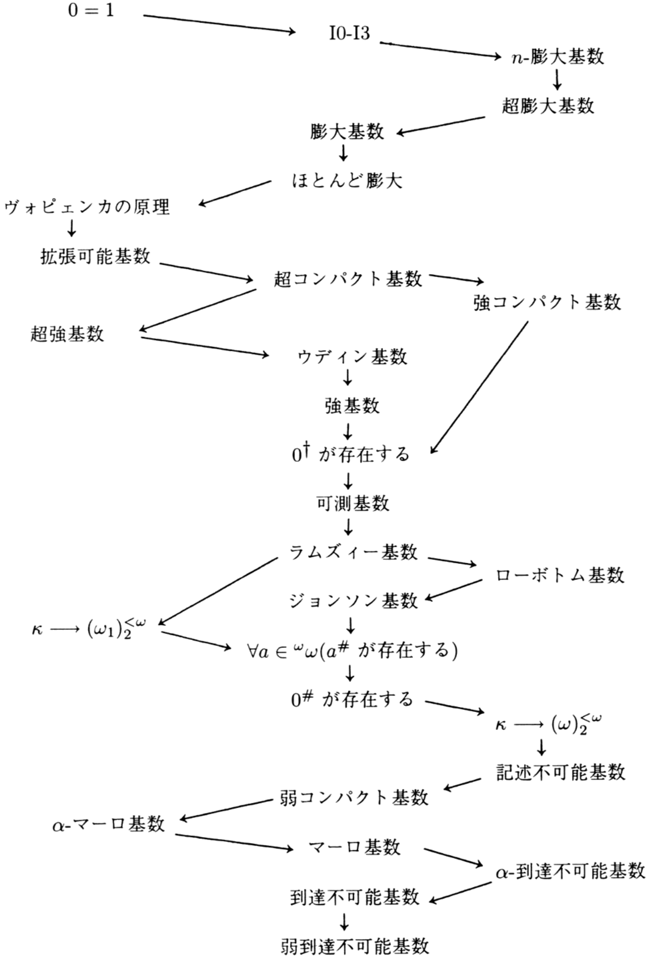
(a) ZF + AD.

(b) ZFC + 無限個のウディン基数が存在する.

(c) ZFC + ω_1 上に ω_1-稠密なイデアルが存在する.

巨大基数の表

矢印は直接の導出または相対的無矛盾性による導出を表し，多くの場合にはこの両方が成り立っている．



付録

（バートン・ドレーベンへのおわびをそえて）

この付録は，集合論，あるいはさらに切実には，巨大基数の理論から，提起される，より大きな哲学的な問題について議論する．これらの問題を過大評価しすぎないよう留意して，形而上学に帰着してしまうような方向には行きすぎないように注意する．数学の諸分野，あるいはもっと特定して集合論の歴史と実践は，これらの分野が外側からの説明や推定や指示を必要としない明白な自立性を得ていることを強く示唆している．

数学の研究の出発点には形而上学にかかわる強い動機付けがあったにしても，常に余分なものをけずりさり，普遍性の純度を上げてゆくことで，数学は，人類の他の企てとは明確に異なるものとなっていったのであった．ラプラスが，彼の仕事には何故神が言及されていないのかというナポレオンの問いに答えて，“その仮定は必要ないからです！”と答たように．この普遍性は，数学の言語の汎用性と，諸結果と手法の受容から明らかに読みとれるものであり，おそらく，数学的である，ということの重要な要素となっている．さらに，科学に比べてずっと大きな継続性を持ち，哲学での弁証法の行きつ戻りつとは明確に異なる，数学の累積的な進歩を可能にしたのは，まさにこの普遍性であった．

他方，数学の長い歴史からは，秩序のとれた進歩という印象は全く受けないばかりか，突然の変化が多く見られ，これらのうちの重要なものは，用語群，アプローチの仕方，手法といったものの新しい文脈の複合から惹き起こされている．これらの新しい文脈は，古い概念を変換，精密化して，前に問われた問題をそれによりとらえ直すような新しい直観を生み，より高い普遍性のレヴェルでの安定へと導いてゆくものとなっていた．集合論でこれを見るために（ここで都合の良いような解釈を交じえて），連続体から実数への進歩，つまり“連続体の算術化”と言われるものの極立った特徴を振りかえってみよう．

古典ギリシャ人による数学の発見で，もっとも重大なものは，正方形の一辺と対角線が比較不可能であること，つまり我々の言葉で言うと $\sqrt{2}$ が無理数である，ということであった．紀元前5世紀のピタゴラス派の秘教を通して，メタポントゥムのヒッパススという人によると言われている，この最初の不可能性の結果は，幾何は（自然）数の比により研究できる，というピタゴラス派の人々の確信を覆したのであった．無限的な動的プロセスの理解可能性に対する攻撃であるゼノンの逆理によって，状況はさらに険しいものとなったが，これに対する答えはギリシャ数学の最も偉大な達成の一つとなった：『原論』第V巻に記述されたような，ユークリッドの幾何比の理論がそれである．この文脈は，比較可能であるかもしれない大きさを順序付ける方法を与え，これにより，連続体の最初の数学化となった．しかし，幾何が支配的であったために，2つの数の積はそれらが長さであることから，面積と考えられる，など，数は幾何的大きさの意味あいのみから考察され，その結果として乗法は実際には数回以上は繰り返すことができなかった．

それからほとんど2000年後，基礎的な代数的記法の導入が，商業計算の勃興や，科学における量的な研究と同時に進行した．17世紀の初めには，$+$，$\times$，$=$，$<$ は一般に用いられるようになっており，$\sqrt{}$ や変数 x, y もそうであった．この文脈で，長い計算も見と

おせるようになり，個々の無理数は計算操作上での市民権を得て，代数を系統だてて発展させることができるようになった．このような標準化がおこる前から，線型な記法による等式の研究から，その意味が何であるかを考える前に $\sqrt{-1}$ のような新しい組合せが考察されるようなったが，これは新しい可能性を示唆するものではあった．

17世紀の中葉に，偉大な哲学者ルネ・デカルトは，解析幾何という連続体の研究のための新しい枠組を提唱して，それに続く数学の発展の時代の舞台を設定することになった．代数の幾何に対する優位を確立する過程において，デカルトはよく知られた座標系への概念の移行を果しただけでなく，乗法と大きさとの結びつきの絶対視をほどき，多項式は，例えば x^2 を面積と考えることなく考察できるようにした．また彼により注意の焦点は閉曲線から，関数変数により与えられた曲線に移行した．

ギリシャ・ローマ時代以降の数学での最大の進歩は，間違いなく，17世紀後半にニュートンとライプニッツにより独立になされた解析学の創造であろう．ニュートンは曲線を物理的運動を表すものととらえ，無限級数を自由に使うことを始めた．ライプニッツは，曲線を無限小を通じてとらえ，記号計算の大きな可能性を強調した．二人とも曲線の接線と曲線の下の部分の面積の間の基本関係に，ニュートンは前者から後者へ，ライプニッツは後者から前者へという方向で到達している．しかし，このような複数の創造であっても，歴史の文脈に依存するものとなっており，絶対的なものではなく，ニュートンが“巨人の肩の上に乗ったから”遠くが見えた，という言葉は確かに本質に触れるものである．ニュートンとライプニッツが遂行したのは，それまでのばらばらの諸結果を包含する一般的なアプローチを作りあげたことであり，ここでのアプローチは，そこでの新しい用語により，ギリシャ時代から継承されてきた数々の問題を解決しただけでなく，新しい様々な問題や，そこで出現しはじめた数理解析という分野の可能性を，示唆するものであった．

ニュートン力学とライプニッツの生産的な記号法の遺産を継承して，18世紀に，数学は非凡な拡大を遂げる．特に，関数，無限級数，微分方程式などで新しい分野ができあがる．この最後のものは，物理現象の記述のための言語を提供し，特に天体力学での，経験主義的な強化があった．この世紀は，現代物理学でのような経験的事実に支援された演繹的数学や，最近の数学の傾向を先取りするような驚くべき計算力で特徴付けられるあやうい足どりで，結果を出したオイラーに，象徴されるといえる．

19世紀になると，数学は非常な速さで拡張を続けただけでなく，新しい構造原理に基づく変容を始めた．前の世紀では振動する糸について多く議論されていた；物理は多数の振動の重ね合わせを示唆したが，これは記法としての無限三角級数を導き，また，任意の初期条件の可能性は，解析的表現により与えられているものとしての関数の概念の拡張をうながした．このようにして，“無限級数”と“関数”の新しい拡張された意味においての並置から生じた緊張は，コーシーにより始められた解析の算術化をうながし，カントルを次第に集合論の創造へと導くことになるのである．

コーシーは1820年代に，彼の関数列の研究のために，極限の概念を表明し，これを用いて，級数の収束や関数の連続性を導入した．このことから，発散級数を除外して，関数の性質で，その幾何的な意味から示唆される否定されるべき性質を考える素地が敷かれる，というように数理解析が再編成されることになった．実際，連続関数の収束級数の和は連

続である，というコーシー自身の主張に対する不連続な反例は，より注意深い解析をうながすことになった．

カール・ヴァイアシュトラスは1850年代に，今ではよく知られている，$\forall\epsilon$-$\exists\delta$による極限の記述を導入して，無限小による論証の方法を一挙に除去した．数学を物理学的あるいは幾何的直観の助けによらないものにするという過程の中で，この新しい言語が違いを細かく区別できることから，その受容は急速に進んだ．この手法により，ヴァイアシュトラスは，一様連続の概念を導入し，さらに，連続だがどこでも微分不可能な関数を記述し，連続性と微分可能性の間にくさびを打ちこむことで，コーシーの主張を訂正することができたのであった．

無限小を極限の概念で置き換え，さらにこれをϵ-δの言葉に表すことで，2000年の間欠けていたような演繹的な厳密さのレヴェルがふたたび数学に取り入れられることになった．これは驚くべきことであるかもしれないが，初めにギリシャ人により押し進められた証明の概念は，数学で最重要とはみなされていなかったのである．解析が創られたとき，使うことのできる計算の手続きと，経験的な事実による援助は，数学を帰納的に前進させるために十分だったが，関数の概念が，物理的運動としてのニュートンの見方ではとらえきれなくなってゆくにしたがって，新しい解析が不可避となってきたのである．無限級数の言葉で与えられる新しい関数の概念は注意深く選ばれた推論の手続きによってのみ発展させることが可能なものであり，これにより新しい計算のテクニックがもたらされた．ギリシャ人にとって，証明が幾何的な構成法を明らかにするものであったように，証明はここでは代数計算の延長として再出現し，ほどなく数学全般の基礎として本質的なものとなっていった．

新しい論法が証明によって保証され，証明は今度はそれより前にある原理に基づく，という後戻りは，1870年の初めに，いくつかの互いに独立な実数の定式化をもたらした．このうち最も良く知られているのはカントルによるものとリヒャルト・デデキントによるものである．クラスとしての実数がこんなにも後になってから発展させられたというのは，ちょっと考えると驚くべきことに思えるかもしれないが，これは，前に説明したような，内包的な数学から，外延的な数学へ，つまり，規則から対象へ，という，もっと大きな概念の変遷の一部としてとらえられるべきものである：

解析により変貌をとげた連続体の幾何的研究は関数変数を数学での中心的なものとした．しかし，初めは関数は解析的表現と同一視されていたので，これらは幾何的図形を形成するものと見たときにも，物理的運動を表現していると見たときにも，内包的に規則としてとらえられていた．無限小の変化が微分と積分をこれらの規則の変形として把握されていたとしても，そこには，連続体それ自身を解析する必要は何もなかった．数学はこのことに対してほとんど関心をはらわずとも大丈夫だったのであるが，19世紀になって，極限と連続性が証明によって示されなくてはならないものになってくると，このことが関数を点集合に作用しているものとして外延的にとらえることへの新しい圧力として働いたのであった．幾何的な仮定がもっと明確になり，無限級数が直観を越えて用いられるようになると，連続体を点集合として外延的にとらえるという算術的な視点が必要になってきたのである．

カントルの実数体の定式化は彼のフーリエ級数に関する画期的な論文Cantor [72]に現れているが，そこで彼は，基本列を用いて，列の収束に関する彼の定理群のための基礎を

作っている．デデキント Dedekind [72] は実数を連続体の完全性を表現するためのカットにより定式化しており，最小上界の原理をそこからの帰結として導いている．彼はここで連続関数の基本性質が成立することを示している．任意の列や任意の無限集合により，カントルもデデキントも連続体の対象化をはたし，これに続く一段と優れた外延的数学，つまり集合論への舞台を用意したのであった．カントルはどちらかというと，個々の結果を保証するために現実主義的な立場から彼の定式化へと導かれていったのであったが，これらの結果は枚挙を示唆するものでもあり，そのことが彼を超限の研究へと向かわせたのであった．デデキントは Dedekind [72] で，彼のカントルよりずっと前になされた彼の定式化がいかにして得られたかを記述しているが，カントルの仕事も認めている．

カントルもデデキントも彼等のそれぞれの定式化と先験的な連続体との相関関係を自動的なものとは考えていない．カントルは Cantor [72: 97] で次のように書いている：

> ... 直線の幾何学との ... 関係を完成させるためには，逆に，すべての数量は，その座標がこの数量となるような，この直線上の決まった点を持つ，ということを述べている**公理**を，付け加えなくてはならない．私がこの命題を**公理**と呼ぶのは，それが，その性質上，一般に証明されることができないからである．数量はこれとはまったく独立ではあるが，これにより数量に対する，ある種の客観性が得られる．

デデキントは Dedekind [72] で以下のように書いている（Dedekind [63: 11ff] を参照）：

> 直線上のすべての点が 2 つのクラスに分けられて，最初のクラスの点はすべて二番目のクラスの点より左にあるとき，ちょうど一つの点がこの分割を生成している ...
>
> ... もしすべての人が上の原理を自明で，彼の直線のイメージとマッチするものと考えるなら，私はうれしく思う．なぜなら，私には，このことの正しさのいかなる証明も与えることができないし，何人もこれができるとは思えないからである．直線のこの性質の仮定は，それによって実数に連続性を与え，それにより我々が実数の連続性を見ることができるような公理以外の何物でもないからである．

デデキントは，基本原理を "証明" しようとしていたわけではなく（彼の有名な（悪名高き）Dedekind [66] の定理 66 での無限集合の存在証明を参照），ここで彼はカントルと同じように公理論的相関関係を強調している．デデキントのカットによる "創造" という持って回った言い方はラッセル Russell's [03: 279ff] に批判されている．しかしながら，ラッセルの，単純に実数をカットとして定義する，という解決方法では，これが彼の還元主義とは相いいれるものであったとしても，カントルの場合もデデキントの場合も，先に連続体に対する先験的直観があって，これをうまく定式化しようとしている，という状況が分からなくなってしまう．いずれにしてもこれだけでは十分ではない；カントルもデデキントも，一種のチャーチの提唱，つまり，新しい連続体の点集合としての構成の妥当性に対する提唱が必要であることを認識したのであった．

集合論はこのような文脈から，数学での代数的，あるいは幾何学的構造の理論の展開での外延的な気運というもっと大きな背景のものに立ち興ったのであった．集合論の誕生には，カントルの絶対という形而上学が立ちあい人になった．これは論理学での微妙な形而上学的な関心から生じたもので，無限の数学化は常にその可能性に対する危惧と対峙することになったのであった．

無限級数の算術的な無限は長い間，完了した全体としては，理論的に扱えないものであると思われていた．アリストテレスの潜在的無限，対，実無限という捉えかたは，後者にたまに触れることがあるとしてもそれは一対一対応の逆理で釘どめされた寓話にすぎない，という保守的な立場の表明にほかならなかった．特に，“実数直線上にどれだけたくさんの点が存在するか？”という問いの唯一の可能な答は“潜在的に無限”であり，ここでの“無限”は決定的に否定的な響きを持つもので，語源学上“有限でない”という感覚に近いものであった．無限を肯定的な概念に高め，この問いに構造化された直観を持って $2^{\aleph_0}$ という答を与えたのは，ほかならぬカントルであった．カントルは超限を簡明な生成的な算術規則としてとらえ，無限の集まりの研究のための数学的文脈を用意したのであった．無限は，このようにとらえられたとき，数学的に全く整合性のとれたものとなった．

数学で前にもそうだったように，新しい言語はたくさんの新しい可能性を示唆することになり，ここで最も注目に値するのは $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ であるが，超限的な景観が広く受け入れられるようには，なかなかならなかった．カントの，ユークリッド幾何学がア・プリオリである，というドグマが非ユークリッド幾何学に対してそうだったように，実無限に対する哲学的懐疑主義がこれを阻止する役目をはたしたと言えなくもない．しかし，むしろ，単に増殖する新しい実体を考察することの数学的な躊躇が，主要な原因だったのではないだろうか．自然数が時間と同じくらい古いものとして数学の直観的支えの中心に位置するものであったのに対し，超限的数は初めは人工的で数学的には何の役にも立たないものに見えたのであった．コーシーに連続性の記述が幾何的仮定の表現法として，すぐに受け入れたれたのに対し，超限数に対してはこれと比較できるような後援はなされることがなかった．このような支援は，超限の使用が次第に頻繁になり，ついに巨大基数の理論として開花することで，また，集合論が公理化されて，それが明白に外延的なものとなることで代償されるしかなかった．

序論でも述べたように，ツェルメロが集合論を公理化したのは，集合の存在の仮定を明確にするためであったが，これによって，$\in$ と簡単な操作のみにより構造化された，集合の組合せ論的な見方を進めた．分出公理での“確定的な性質”ということのあいまいさが，スコーレムに，これを一階の論理に基づくものとする，という提案をさせることを促し，フォン・ノイマンの超限的数を順序数，つまり $\in$ で整列順序付けされた推移的集合として，再定式化するときの置換の公理を付加することを促した．

外延の数学的理論として出発した公理的集合論は，一般に数学的対象の存在にかかわるところで，より大きな重要性をになうようになった．しかし，ユークリッドの幾何の公理が許された幾何的構成法を提示しているにすぎないように，集合論の公理は，集合の生成のための個々の条件を一階の論理に基づいた新しい解析で提示しているにすぎない．市場での算術とギリシャ幾何学から数学が立ち興ったのとは違い，集合や超限的数は，いかなる先験的な実体によっても荷を負わされていないし逆に支えられてもいなかった．見知らぬ国での異邦人のように，集合や超限的数に関する直観は，新しい手続きの規則としての，公理的枠組にささえられて勇敢に発展していった．特に，集合論での存在命題は，その実践においてさえ，一階の論理の $\exists$ と強く結びつけられていたが，後者の意味はその論理規則により決定されるもので，何かもっと大きな意味での“存在”との関連によるものではな

かった．

無限集合の，この文脈に埋め込まれた意味での存在と同じく，無限の公理は，その普通の定式化では，全称的 $\forall n\varphi(n)$ を演繹するための規則としての数学的帰納法の存在命題としての対応物にすぎない．自然数がその先験的な意味を持っているように，$\forall n\varphi(n)$ はこれの非形式的な対応物 $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots$ と関連している．しかしながら，この関連は，連続体と実数の定式化の間のそれより間接的なものである：それは数論的主張が作られたものであるからである．ポワンカレとは反対に，ヒルベルトは，一つの数から，次の数へ帰納的に進む**内容的** (inhaltlich) 帰納法と，$\forall n\varphi(n)$ が $\varphi(0) \wedge \forall n(\varphi(n) \rightarrow \varphi(n+1))$ から一気に帰結される**形式的**帰納法を分けて考えており，後者によってはじめて，“数学的変数は，形式体系の中でその役割を果たすようになるのである”（Hilbert [28]; Heijenoort [67: 473] を参照）．公理化により間引きされたカントルの形而上学では，存在の意味は形式的推論としてのものの先には，何もなく，これによって無限は飼い慣らされたものとなった．ある $\forall n\varphi(n)$ が間違った証明により確立された疑いがあるときには，特定の数 a で $\varphi[a]$ が成り立たないものを探すより，算術計算の検算のように，この疑いのある証明を注意深く調べてみることが多い，という観察は多くを語っている．無限の公理には，形式的帰納法のための外延を得るということ以外の意味はないのだが，これからの一つの帰結は，カントルの自然数に対する，古典的な“次の元”で終わりのないもの，という直観でとらえたときの順序数 ω と“次の元”を“$\in$”ととらえなおしたものにおける帰納法を，自然に外延することができるようになることである．

超限性も，置換の公理と超限帰納法の原理により同じように，この文脈に埋め込められる．カントルの有限と超限に関する一元論的な見方を思い出すと，この原理は，極限点による帰納法の拡張でしかなく，実無限への突入による見かけの悪化は単にこの新しい規則による文脈上の推論にすぎない．この見方からは，選択公理は，文脈に埋め込まれた超限に，有限ではすでに内在している順序をそそぎ込むために同様に必要な原理，と見なせる．

序論でも述べたように，基礎の公理と，集合の繰り返しによる着想は，集合論を整順性の研究に変えた．これにモデル理論的な手法が持ち込まれ，強制法と内部モデルの理論の進歩が，集合論を洗練され独立した数学の一分野として確立させた．そして，もう一度繰り返すと，形式化された真理と無矛盾性は，代数でのような，組合せの操作の問題となり，巨大基数は，エレガントで十分に強力な，無矛盾性の強さの研究のための上部構造を供することになったのである．

相対的無矛盾性の諸結果がそれらを測定基準にしてゆくことで，存在命題としての巨大基数の諸仮説は，極立った位置をしめるようになり，強制法と内部モデルの相互作用により，それらは総体として集合論で意味を持つようになった．大きな有限の数が算術記法により把握できるようになったように，巨大基数も，それらの集合論的定式化により，ツェルメロの集合論での算術の一部としてとらえられるようになった．また大きな有限の数が，一つ一つ数えてゆくことではとても到達できないように見えるように，巨大基数も，それらより階層的に簡単な手続きによっては到達できない．しかし，我々が $10^{1,000,000}$ を普通の文脈の中で扱うことができるように，可測基数を扱うことも可能なのである．

それでは数学の基礎としての集合論の役割は何なのであろうか？ 外延の数学的理論とし

て，ツェルメロの集合論の小さな部分が，すでにほとんどすべての現存する数学の枠組として十分である．今までに述べた歴史を復習して，規則は外延化できて，集合と $\in$ と $=$ による形で記述できる．そうだとしても，このような還元が状況を明らかにする保証とはなってはいない．一般に，数学はいくつもの組織化と表現のレヴェルで稼働しているからである：数論はまず算術規則のレヴェルで発達するが，その後にフレーゲやペアノをはるか下に見て解析的上位構造に進む．数理解析は，まずヴァイアシュトラスのレベルで発達して，その後，カントルやデデキントの実数論を通りこして，関数解析的上位構造のレベルに移ってゆく．有機化学の素粒子論との関係のように，還元可能性は十分認識されていても，異なるレヴェルでの組織における個別の概念の図式による可能性に焦点が置かれることになるのである．

他方，整順性の研究としての ZFC に，様々な巨大基数を合わせたものは，その変数の走る領域を集合論的ユニヴァースとすることで実質的内容を保存して集合論の文脈に組みこまれる数学の諸命題の，相対的無矛盾性の意味での，裁きの庭となる．このように，集合論は，数学の明快な基礎であるというよりは，数学のための開かれた枠組であるわけである．集合論は，その内的な問題意識にしたがって発展し，広い範囲をその文脈にとりこむことができるような数学の一分野で，このような性質が集合論を，非常に面白く個性的な研究分野にしているのである．

それでは哲学については何が残されたのか？ 存在，真理，そして知識は，大きく捉えたときには，説明のできる概念であるより，完全に内容的な，討論の対象となるべき問題である．哲学的な問題として，これら，および，客観/ 主観，現実主義/反現実主義，偶然/必然，といった雑多の二分律は，どうしようもなく流動的で変動的である．例えば，テーブル，月，一角獣は，あまりにも違う仕方で存在しているので，存在それ自身は，先験的なカテゴリーとしての意味を持ちようがないことが分かる．対話と学習によらなければ，我々は，言語の一部として，この用語になじむことはできない．そうであるならば，そのように一般的な用語は，何の考察もなしに，あるいは短い “定義” を与えて，ある分析のための基礎として用いることはできず，むしろそれ自身が文脈の中で記述されるべきものである．数学は，長い間明瞭さと知識の典型と考えられてきたが，そうだとしても，“数学は真理である” とか，“数は存在する” というような主張は先験的な意味を持っておらず，これらは，各々，知っている単語からなる文章のように，全体として発展させ議論されるべきものである．

それならどこから始めて，どこまで行けばいいのか？ “明日エーゲ海で海戦がある” とか “明けの明星は宵の明星である” という主張，あるいは “$7+5=12$” という主張でさえ，その考察は，これらの普遍な性質，つまり言葉それ自身から始めるしかない．そしてそのような考察は，普遍性の限界を越えて形而上学の網にかかってしまわないようにするなら，我々の言語の使用の方法の一部としての，それらの相互関係の記述を議論すること以上には先に進みようがない．ヴィットゲンシュタインの『哲学の研究』(§109) によれば：

> 我々は説明することをやめて，記述がそれにとってかわるべきである．そしてこの記述はその光を，つまり，言わばその目的を，哲学的諸問題から得ることになる．これらは，もちろん，経験論的な問題ではない；それらは，むしろ，我々の言語のはたらきを見すえること

> により，そして，そのようにして我々がそのはたらきを認識できるようなやり方で解決されるものである；それらを誤解することが起こりがちであるとしても．問題の解決は，新しい情報を与えることによってではなく，我々がすでに知っていることを組み合せることでなされる．哲学は言葉による知性の呪縛に対する闘いである．

集合論の文脈に埋め込まれた存在の記述を記述するための“我々がすでに知っていることを組み合せる”ことに関しての歴史の説明が上で与えられたわけである．真理についても，同様である．あえて言えば，**数学的真理は，我々がそういうことにしたものにすぎない．** 知識については，記述は，最終的には記述以上の洞察を与えない．もっと勇気を持って言えば，それは，**数学の知識の修得はただそうであるにすぎない．** 夜明け百合が花開くように，リスたちが木の実をたくわえるように，**我々はただそれをやるだけである．**

例えて言えば，数学の世界は，巨大なカテドラルのようなものである．威厳のある側廊の厚い石壁は，この偉大な建造物の前にあった古代の教会の容貌を残している．中央のドームは，名の知れない名工たちの残した，高く，しなやかな石のアーチで支えられている．そのデザインはともかく，これらのアーチは，空にとどくような，後代のエレガントな尖塔を軽々と支えてきた．最初の装飾品はまだ一番古い礼拝堂で見ることができる．そこでは過去との聖体拝領の結果，常に新しいものが付け加えられてきたが，各々の新しい時代は，その明らかに区別できる様式で寄与している．最近になって広い礼拝堂とそれを支えるための控え壁が側翼に付け加えられた．すばらしいはめこみの像をちりばめた，巨大な磨かれた木製の扉から，人々が毎日ものめずらしそうに入ってくる．そのうちの何人かは，祭壇の秩序と美に魅入られたように，教示を求めて，さらにそのなかの幾人かは入会をさえ求めて，長い身廊にまで下り入ってくる．そして建造はさらに続けられる：建築家たちは，カテドラルの全体の改変についての計画をしており，彼等のうちの何人かは，大規模な改修を提案している．職人たちは新しい木のはめ板をとりつけたり，彫像を修復したり，歳月のもたらした壁の亀裂をモルタルで埋める作業を着々と進めている．そして，高い足場にささえられて，細工職人たちは美しいステンドグラスをはめこむ作業を続けている．彼等は隣の枠組の同僚たちと協調して仕事を進めようと努力をしているが，時たまこの目もくらむ高さが，彼等にまったく新しいはめこみのグラスを作る霊感を与えてしまう．後戻りして眺めている人達にはもう少し大きな図式が見えてくるが，しかし彼らにも本当の全体像までは見えていない．そして彼等はあまりにも高いところで仕事をしているので，彼等が足台にしているところは見えなくなっている．それでもなお，彼等は，共同体として，つまり今なお進行中の人類の冒険の一部としての共同体として，支えられている．

経典外聖書からの寓話を一つ付け加えておこう： 勤勉な蜘の一群が，新しく掘り出されたカテドラルの地下のアーチに複雑な蜘の巣を張りはじめた．それはすぐに厚く複雑なものになったので，この蜘の巣に掛かることをさけて，誰もここを通りぬけようとしなくなった．ある日，恐ろしい強風がうなり声を上げて入ってきて，この蜘の巣に大きな穴をあけた．蜘たちは死にもの狂いになって蜘の巣の修理をはじめた．なぜなら，蜘たちは，彼等が注意深く作りあげた蜘の巣はカテドラルの基礎であり，それがなければカテドラルが崩れ落ちてしまう，と信じはじめていたからであった．もちろん，上の階の職人たちは眉も上げはしなかったが．

形而上学の乱用の可能性がまだ多少残っているが，これはむしろ阻止されるべきものであろう．数学者たちは，しばしば自立した対象を扱っているという感覚について語っており，その中の何人かは公然と数学に対する現実主義的な見方を言明している．これに対する解答としては，このような対象化は数学の実践の一部であり，ここでの存在の意味は，他の人類の一致強力による活動のどれにでも見られるものであると言っておこう．ここで，エドワード・ギボンがキリスト教の出現を歴史の一部として記述したことで，信者たちからいかに徹底的に批判されたかを，そのような類似の多くの例のうちの一つとして，銘記しておく必要があろう．そして，目隠しをされて，ゲームをプレイするチェスの選手の比喩も考えられる．彼はある特定のチェス盤での駒を視覚化することができるのかもしれないが，最終的に残るのは，彼により残されたゲーム譜による構造である．最後に，ゲーデルの Gödel [47] での現実主義的な論説は多く議論されたが，ひとつには彼の数学での諸結果の重要性によるところが多いことは疑いの余地はない．しかし，それらの結果の普遍性が問題の核心である，ということも事実である．ゲーデル自身はロビンソンの仕事を大変評価していて，彼を高等研究所での自分の後続者にしたいと思っていた．ここでロビンソン Robinson [65] が忠実な形式主義者であったことは，数学的には何の問題にもならなかったのである．

しかし，形而上学のいらない部分をそぎ落した後でも，現役の数学者のよく知っている，問題がある文脈から立ち起こり，それが解かれるやいなや，その解がそれでなくてならないものであったという思いにとらわれるときの，あの何度も戻ってくる感覚が残っている．数学者は可能性のカオスにむかって，秩序の限界線を拡張することに取りつかれた人々であるから，これはもう一つの新しい形而上学の乱用を示唆するものでもある．しかし，この感覚は，文脈の全体像が凝結すると，あとは様々な分岐点を迷うことなく通過してつき進むことのできる芸術家にもなじみのものである：ジェームス・ジョイスは『ユリシーズ』(17:1012-15) でデイダラスについて次のように述べている，

> 彼は自分の重要性を，三段論法的に既知から未知へ進む意識的な動物として，無の不確定性の上に不可避的に構成された小宇宙と大宇宙の差異を検出する意識的に理性的な試薬として，認めていた．

これを言ってしまった後でも，まだ，数学の事実は，何かの解説を求めているという，おぼろげな感覚がよどんでいる．それの自然科学での説明のつかない有効性よりさらにむこうに，数学の世界が興って，整合性のとれた全体へとまとまってきた，そのありかたの神秘に関する，もっと大きな感覚が残っているように思える．しかし，この最終的な形而上学の乱用は，星にみちた天国やそこでのモラルの法則などとともに，この世のものというより，神話の世界に属すもので，大きな意味での経験の総体に対する感覚の一部である．ヴィットゲンシュタインは『トラクタス』(6.41) で次のように述べている：

> 世界の意味は世界の外側にある．世界の中では，すべては，ただそうであるだけであり，それが起こるように起こるだけである．そこでは何の価値も存在しない，あるいは，もし価値が存在するとしたら，それは価値のないものであろう．
>
> もし価値のある価値というものが存在するのなら，それはすべての現象と事象の外側になくてはならないからである．なぜなら，すべての現象と事象は偶発的なものであるからで

ある.
　それを偶発的でないものにするものは世界の内側にはあり得ない．なぜなら，そうでなければ，それはふたたび偶発的なものになってしまうからである.
　したがって，それは世界の外側にあるものでなければならない.

ふたたび『トラクタス』(6.44) から：

神秘的なのは，世界のあり方ではなく，それがあるということである.

そして，このヴィットゲンシュタインの弁証法的弁別は，示されるものであり，述べられるのものではなく，そのことが彼を『トラクタス』の最後での沈黙することへの忠告へと一直線に導いてゆくのである．形而上論も唯我論も，まだ論考の先にある人類の経験の一部にはなっていない．老子の『道徳経』は次のように始まっている：

語ることのできる道は永遠の道ではない.
名付けることのできる名は永遠の名ではない.

インデックス付き文献表

以下は度々引用されている雑誌の名称の略語表である.

AAMS	Abstracts of papers presented to the American Mathematical Society
ALS	Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio Scientiarum Mathematicarum（1946 年からは: Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged）
AdM	Advances in Mathematics
AM	Annals of Mathematics
AMAH	Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
AMM	American Mathematical Monthly
AML	Annals of Mathematical Logic (1983 年から Annals of Pure and Applied Logic に継続)
APAL	Annals of Pure and Applied Logic（1983 年の Annals of Mathematical Logic から継続）
BAMS	Bulletin of the American Mathematical Society
BAPS	Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques（1983 年から Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics に継続）
BKSG	Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematische-Physische Klass
BLMS	Bulletin of the London Mathematical Society
CMUC	Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
CRP	Comptes Rendus Hebomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris.
FM	Fundamenta Mathematicae
IJM	Israel Journal of Mathematics
JAMS	Journal of the American Mathematical Society
JSL	Journal of Symbolic Logic
MA	Mathematische Annalen
NAMS	Notices of the American Mathematical Society
PAMS	Proceedings of the American Mathematical Society
PJM	Pacific Journal of Mathematics
PLMS	Proceedings of the London Mathematical Society
PNAS	Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.
RMS	Russian Mathematical Surveys
TAMS	Transactions of the American Mathematical Society
ZML	Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik

文献の最後のイタリックの数は本文でその文献の引用されているページを示す．著者の後のイタリックの数は彼または彼女の本文で引用されているページを示す，ただしこれらのページは文献あるいは特定の結果との関連のある場所のみを収録している（[訳注]：文献表および後出の索引は，原著の TEX ファイルを変換して作成したため，頁数に±1のずれが出ている場合が若干ある）．

Aanderaa, Stål O.

[74] Inductive definitions and their closure ordinals. In: Fenstad-Hinman [74], 207-220. *79*

Abe, Yoshihiro

[84] Strongly compact cardinals, elementary embeddings and fixed points. JSL **49** (1984), 808-812. *322*

[85] Some results concerning strongly compact cardinals. JSL **50** (1985), 874-880. *325*

[86] Notes on $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ and $[\lambda]^\kappa$. Tsukuba Journal of Mathematics **10** (1986), 155-163. *352*

Abel, Niels H. *161*

Aczel, Peter

[77] An introduction to inductive definitions. In: Barwise [77], 739-782. *79*

Richter, Wayne H., and Peter Aczel も参照.

Addison Jr., John W. *44, 164, 170, 190, 425*

[58] Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory. FM **46** (1958), 123-135. *159, 165, 170, 423, 424, 427*

[59] Some consequences of the axiom of constructibility. FM **46** (1959), 337-357. *164, 183, 191, 430*

[74] Current problems in descriptive set theory. In: Jech [74], 1-10. *430*

Addison Jr., John W., and Yiannis N. Moschovakis

[68] Some consequences of the axiom of definable determinateness. PNAS **59** (1968), 708-712. *430*

Addison Jr., John W., Leon Henkin, and Alfred Tarski

[65] *The Theory of Models.* Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley. Amsterdam, North-Holland 1965.

Albers, Donald J., Gerald L. Alexanderson, and Constance Reid

[90] (eds.) *More Mathematical People.* Boston, Harcourt Brace Jovanovich 1990. *128*

Aleksandrov, Pavel S.

[16] Sur la puissance des ensembles mesurables *B*. CRP **162** (1916), 323-325. *160, 161*

[79] Pages from an autobiography. RMS **34**(6) (1979), 267-302. *161*

Alexanderson, Gerald L.

Albers, Donald J., Gerald L. Alexanderson, and Constance Reid を参照.

Apter, Arthur W., and James M. Henle

[91] Relative consistency results via strong compactness. FM **139** (1991), 133-149. *254, 260*

[92] On box, weak box, and strong compactness. BLMS **24** (1992), 513-518. *254, 260*

Aristotle *3, 497*

Aronszajn, Nathan (Nachman) *90, 91*

[52] Applied functional analysis. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Cambridge, Massachusetts 1950, vol. 2. Providence, American Mathematical Society 1952, 123-127. *90*

[52a] Characterization of types of order satisfying $\alpha_0 + \alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_0$. FM **39** (1952), 65-96. *90*

Awerbuch-Friedlander, Tamara E.

Kanamori, Akihiro, and Tamara E. Awerbuch Friedlander を参照.

Baire, René *158*

[99] Sur les fonctions de variables réelles. Annali di Matematica Pura ed Applicata **(3)3** (1899), 1-123. *26, 158*

Baeten, Josephus C.M.

[86] *Filters and Ultrafilters over Definable Subsets of Admissible Ordinals.* CWI Tract #24. Amsterdam, Centrum voor Wiskunde en Informatica 1986. *79*

Baldwin, Stewart

[83] Generalizing the Mahlo hierarchy, with applications to the Mitchell models. APAL **25** (1983), 103-127. *363*

[84] The consistency strength of certain stationary subsets $P_\kappa\lambda$. PAMS **92** (1984), 90-92. *363*

[85] The $\triangleleft$-ordering on normal ultrafilters. JSL **51** (1985), 936-952. *321*

Banach, Stefan *34, 390, 392, 396*

[30] Über additive Massfunktionen in abstrakten Mengen. FM **15** (1930), 97-101. Reprinted in [67] below, 200-203. *36, 37*

[67] Hartman, Stanisław, and Edward Marczewski (eds.) *Oeuvres.* Vol. 1. Warsaw, Państwowe Wydawnidwo Naukowe, 1967.

Banach, Stefan, and Kazimierz Kuratowski

[29] Sur une généralisation du problème de la mesure. FM **14** (1929), 127-131. Reprinted in Banach [67], 182-186, and in Kuratowski [88], 327-331. *36*

Barbanel, Julius B.

[82] Supercompact cardinals, elementary embeddings, and fixed points. JSL **47** (1982), 84-88. *322*

[82a] Supercompact cardinals and trees of normal ultrafilters. JSL **47** (1982), 89-109. *322*

[85] An ordering of normal ultrafilters. FM **125** (1985), 155-165. *322*

[86] Supercompact cardinals, trees of normal ultrafilters, and the partition property. JSL **51** (1986), 701-708. *368*

[89] Flipping properties and huge cardinals. FM **132** (1989), 171-188. *352*

[91] Almost hugeness and a related notion. The Notre Dame Journal of Formal Logic **32** (1991), 255-265. *352*

[91a] Making the hugeness of κ resurrectable after κ-directed closed forcing. FM **137** (1991), 9-24. *352*

[92] A note on a result of Kunen and Pelletier. JSL **57** (1992), 461-465. *368*

[93] On the relationship between the partition property and the weak partition property for normal ultrafilters on $\mathcal{P}_\kappa\lambda$. JSL **58** (1993), 119-127. *368*

[93a] Some variations on the partition property for normal ultrafilters on $\mathrm{P}_\kappa\lambda$. FM **142** (1993), 163-171. *368*

Barbanel, Julius B., Carlos A. Di Prisco, and It Beng Tan

[84] Many times huge and superhuge cardinals. JSL **49** (1984), 112-122. *352*

Bar-Hillel, Yehoshua

[65] (ed.) *Logic, Methodology and Philosophy of Science.* Proceedings of the 1964 International Congress, Jerusalem. Amsterdam, North-Holland 1965.
[70] (ed.) *Mathematical Logic and Foundations of Set Theory.* Amsterdam, North-Holland 1970.
Fraenkel, Abraham A., Yehoshua Bar-Hillel, and Azriel Levy も参照.

Bar-Hillel, Yehoshua, E.I.J. Poznanski, Michael O. Rabin, and Abraham Robinson
[61] (eds.) *Essays on the Foundations of Mathematics.* Jerusalem, Magnes Press 1961.

Barua, Rana
[84] R-sets and category. TAMS **286** (1984), 125-158. *195*

Barwise, K. Jon
[75] *Admissible Sets and Structures.* Perspectives in Mathematical Logic. Berlin, Springer-Verlag 1975. *33*
[77] (ed.) *Handbook of Mathematical Logic.* Amsterdam, North-Holland 1977.

Baumgartner, James E. *129, 361, 362, 369, 461*
[75] Ineffability properties of cardinals I. In: Hajnal-Rado-Sós [75] vol. 1, 109-130. *89*
[76] Almost-disjoint sets, the dense set problem and the partition calculus. AML **9** (1976), 401-439. *228*
[83] Iterated forcing. In: Mathias [83], 1-59.

Baumgartner, James E., and Fred Galvin
[78] Generalized Erdös cardinals and $0^{\#}$. AML **15** (1978), 289-313. *94, 121*

Baumgartner, James E., Donald A. Martin, and Saharon Shelah
[84] (eds.) *Axiomatic Set Theory.* Contemporary Mathematics vol. 31. Providence, American Mathematical Society 1984.

Baumgartner, James E., and Alan D. Taylor
[82] Saturation properties of ideals in generic extensions. I. TAMS **270** (1982), 557-574. *228, 363*
[82a] Saturation properties of ideals in generic extensions. II. TAMS **271** (1982), 587-609. *237*

Baumgartner, James E., Alan D. Taylor, and Stanley Wagon
[82] Structural properties of ideals. Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne) **197** (1982), 1-95. *369*

Becker, Howard S.
[78] Partially playful universes. In: Kechris-Moschovakis [78], 55-90. *441*
[80] Thin collections of sets of projective ordinals and analogs of L. AML **19** (1980), 205-241. *441*
[81] AD and the supercompactness of $\aleph_1$. JSL **46** (1981), 822-842. *422*
[81a] Determinacy implies that $\aleph_2$ is supercompact. IJM **40** (1981), 229-234. *422*
[85] A property equivalent to the existence of scales. TAMS **287** (1985), 591-612. *489*
[88] More closure properties of pointclasses. In: Kechris-Martin-Steel [88], 31-36. *435*
[92] Descriptive set theoretic phenomena in analysis and topology. In: Judah-Just-Woodin [92], 1-25. *180*

Becker, Howard S., and Alexander S. Kechris
[84] Sets of ordinals constructible from trees and the Third Victoria Delfino Problem. In: Baumgartner-Martin-Shelah [84], 13-29. *443*

Becker, Howard S., and Yiannis N. Moschovakis

[81] Measurable cardinals in playful models. In: Kechris-Martin-Moschovakis [81], 203-214. *443*

Bell, John L.

[85] *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.* Second edition. Oxford Logic Guides #12. Oxford, Oxford University Press 1985. *126, 129*

Beller, Aaron, Ronald B. Jensen, and Philip Welch

[82] *Coding the Universe.* London Mathematical Society Lecture Note Series #47. Cambridge, Cambridge University Press 1982. *201, 202*

Bendixson, Ivar

[83] Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points. Acta Mathematica **2** (1883), 415-429. *145*

Bernays, Paul

[37] A system of axiomatic set theory. Part I. JSL **2** (1937), 65-77. *42*

[42] A system of axiomatic set theory. Part III. JSL **7** (1942), 65-89. *144*

[61] Zur Frage der Unendlichkeitsschemata in der axiomatischen Mengenlehre. In: Bar-Hillel-Poznanski-Rabin-Robinson [61], 3-49. See also [76] below. *71, 83*

[76] On the problem of schema of infinity in axiomatic set theory. In: Müller [76], 121-172. English translation of a revised version of Bernays [61].

Bernstein, Felix *29, 146*

[08] Zur Theorie der trigonometrischen Reihe. BKSG **60** (1908), 325-338. *146*

Blackwell, David *423, 425*

[67] Infinite games and analytic sets. PNAS **58** (1967), 1836-1837. *11, 387, 399, 422, 424*

Blass, Andreas R.

[75] Equivalence of two strong forms of determinacy. PAMS **52** (1975), 373-376. *461*

[88] Selective ultrafilters and homogeneity. APAL **38** (1988), 215-255. *254, 260*

Bloch, Gérard

[53] Sur les ensembles stationnaires de nombres ordinaux et les suites distinguées de fonctions régressives. CRP **236** (1953), 265-268. *30*

Boos, William

[74] Boolean extensions which efface the Mahlo property. JSL **39** (1974), 254-268. *249*

[76] Infinitary compactness without strong inaccessibility. JSL **41** (1976), 33-38. *50*

Borel, Emile F. *24,158*

[98] *Leçons sur la Théorie des Fonctions.* Paris, Gauthier-Villars 1898. *25, 158*

[05] *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en series de polynomes.* Paris, Gauthier-Villars 1905. *170*

[21] La théorie du jeu et les équations intégrales á noyau symétrique. CRP **173** (1921), 1304-1308. Reprinted in [72] below, 901-904. Translated in Econometrica **21** (1953), 97-100. *390*

[72] *Oeuvres de Emile Borel.* Paris, Editions de C.N.R.S. 1972.

Brouwer, Luitzen E.J. *3*

Bukovský, Lev

[73] Changing cofinality of a measurable cardinal. CMUC **14** (1973), 689-697. *276*

Bull Jr., Everett L.

[78] Successive large cardinals. AML **15** (1978), 161-191. *416*

Bulloff, Jack J., Thomas C. Holyoke, and Samuel W. Hahn

[69] (eds.) *Foundations of Mathematics.* Symposium papers commemorating the sixtieth birthday of Kurt Gödel. Berlin, Springer-Verlag 1969.

Burgess, John P.

[82] What are R-sets? In: Metakides [82], 307-324. *195*

[83] Classical hierarchies from a modern standpoint. II. R-sets. FM **115** (1983), 97-105. *195*

Burke, Maxim, and Menachem Magidor

[90] Shelah's pcf theory and its applications. APAL **50** (1990), 207-254. *110, 111*

Cantor, Georg *1, 2, 4-8, 11, 26, 29, 33, 44, 55, 131, 145, 146, 158, 159, 329, 397, 494-499*

[72] Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trignometrischen Reihen, MA **5** (1872), 123-132. Reprinted in [80] below, 92-102. *496*

[83] Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. V. MA **21** (1883), 545-591. Reprinted in [80] below, 165-209. *145*

[84] Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. VI. MA **23** (1884), 453-488. Reprinted in [80] below, 210-246. *145*

[84a] De la puissance des ensembles parfaits de points. Acta Mathematica **4** (1884), 381-392. Reprinted in [80] below, 252-260. *145*

[80] Zermelo, Ernst (ed.) *Gesammelte Abhandlungen mathematicschen und philosophischen Inhalts.* Berlin, Springer-Verlag 1980. Reprint of the original 1932 edition, Berlin, Verlag von Julius Springer.

Carr, Donna M.

[82] The minimal normal filter on $P_\kappa\lambda$. PAMS **86** (1982), 316-320. *360*

[85] $P_\kappa\lambda$ generalizations of weak compactness. ZML **31** (1985), 393-401. *369*

[86] The structure of ineffability properties of $\mathcal{P}_\kappa\lambda$. AMAH **47** (1986), 325-332. *369*

[87] $P_\kappa\lambda$ partition relations. FM **128** (1987), 181-195. *369*

[87a] A note on the λ-Shelah property. FM **128** (1987), 197-198. *369*

Carr, Donna M., Jean-Pierre Levinski, and Donald H. Pelletier

[90] On the existence of strongly normal ideals over $P_\kappa\lambda$. Archive for Mathematical Logic **30** (1990), 59-72. *370*

Carr, Donna M., and Donald H. Pelletier

[89] Towards a structure theory for ideals on $P_\kappa\lambda$. In: Steprāns-Watson [89], 41-54. *369, 370*

Cauchy, Augustin-Louis *161, 495, 497*

Chang, Chen-Chung *97, 107*

[71] Sets constructible using $L_{\kappa\kappa}$. In: Scott [71], 1-8. *274*

Chang, Chen-Chung, and H. Jerome Keisler

[90] *Model Theory.* Third edition. Amsterdam, North-Holland 1990. *15, 21, 21, 270*

Chuaqui, Rolando

[78] Bernays' class theory. In: Arruda, Ayda I., Newton C.A. da Costa, and Rolando Chuaqui (eds.) *Mathematical Logic.* Proceedings of the First Brazilian Conference. New York, Marcel Dekker 1978, 31-55. *71*

[81] *Axiomatic Set Theory. Impredicative Theories of Classes.* Amsterdam, North-Holland 1981. *71*

Cohen, Paul J. *8, 9, 44, 47, 56, 125-129, 131, 139, 144, 146, 312*

[63] The independence of the Continuum Hypothesis. I. PNAS **50** (1963), 1143-1148. *7, 126, 127*

[64] The independence of the Continuum Hypothesis. II. PNAS **51** (1964), 105-110. *7, 126, 127, 137*

[65] Independence results in set theory. In: Addison-Henkin-Tarski [65], 39-54. *127*

[66] *Set Theory and the Continuum Hypothesis.* New York, Benjamin 1966. *127*

[71] Comments on the foundations of set theory. In: Scott [71], 9-15. *127*

Cohn, Paul M.

[65] *Universal Algebra.* New York, Harper & Row 1965. *358*

Comfort, W. Wistar, and Stylianos Negrepontis

[74] *The Theory of Ultrafilters.* Berlin, Springer-Verlag 1974. *52*

Dales, H. Garth, and W. Hugh Woodin

[87] *An Introduction to Independence for Analysts.* London Mathematical Society Lecture Note Series #115. Cambridge, Cambridge University Press 1987. *470*

David, René

[82] A very absolute Π^1_2 real singleton. AML **23** (1982), 101-120. *203*

[84] Generic reals close to $0^\#$. In: Baumgartner-Martin-Shelah [84], 63-70. *203*

[89] A functorial Π^1_2 singleton. AdM **74** (1989), 258-268. *203*

Davis, Morton

[64] Infinite games of perfect information. In: Dresher, Melvin, Lloyd S. Shapley, and Alan W. Tucker (eds.) *Advances in Game Theory.* Annals of Mathematical Studies #52. Princeton, Princeton University Press 1964, 85-101. *392, 393, 396, 460, 461*

Dedekind, Richard *495-497, 499*

[72] *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Braunschweig, F. Vieweg 1872. Translated in [63] below, 1-27. *496*

[88] *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig, F. Vieweg 1888. Translated in [63] below, 29-115. *496*

[63] *Essays on the Theory of Numbers.* Translations by Wooster W. Beman. New York, Dover 1963. (Reprint of original edition, Chicago, Open Court 1901). *496*

Dehornoy, Patrick *254*

[75] Solution d'une conjecture de Bukovský. CRP **281** (1975), 821-824. *276*

[76] Intersections d'ultrapuissances iterées de modèles de la théorie des ensembles. CRP **282** (1976), 935-938. *277*

[78] Iterated ultrapowers and Prikry forcing. AML **15** (1978), 109-160. *254, 256, 259, 276, 277*

[83] An application of ultrapowers to changing cofinality. JSL **48** (1983), 225-235. *277*

[88] Π^1_1-complete families of elementary sequences. APAL **38** (1988), 257-287. *346*

[89] Free distributive groupoids. Journal of Pure and Applied Algebra **61** (1989), 123-146. *346*

[89a] Sur la structure des gerbes libres. CRP **309** (1989), 143-148. *346*

[89b] Algebraic properties of the shift mapping. PAMS **106** (1989), 617-623. *346*

[92] An alternative proof of Laver's results on the algebra generated by an elementary embedding. In: Judah-Just-Woodin [92], 27-33. *347*

[92a] Preuve de la conjecture d'irreflexivité pour les structures distributives libres. CRP **314** (1992), 333-336. *347*

[94] Braid groups and left distributive operations. TAMS **345** (1994), 115-151. *347*

Descartes, René *494*

Devlin, Keith J.

[73] Some weak versions of large cardinal axioms. AML **5** (1973), 291-325. *107, 109, 117*

[74] Some remarks on changing cofinalities. JSL **39** (1974), 27-30. *252*

[75] Indescribability properties and small large cardinals. In: Müller-Oberschelp-Potthoff [75], 89-114. *52, 75, 79*

[84] *Constructibility.* Perspectives in Mathematical Logic. Berlin, Springer-Verlag 1984. *15, 18, 40, 45, 47, 84, 117, 182, 298, 299*

Devlin, Keith J., and Jeffrey B. Paris

[73] More on the free subset problem. AML **5** (1973), 327-336. *121*

Dickmann, Máximo A.

[75] *Large Infinitary Languages.* Amsterdam, North-Holland 1975. *49, 52*

[85] Larger infinitary languages. In: Barwise, K. Jon, and Solomon Feferman (eds.) *Model-Theoretic Logics.* Berlin, Springer-Verlag 1985, 317-363. *49*

Di Prisco, Carlos A.

[77] Supercompact cardinals and a partition property. AdM **25** (1977), 46-55. *368*

Barbanel, Julius B., Carlos A. Di Prisco, and It Beng Tan も参照.

Di Prisco, Carlos A., and James M. Henle

[78] On the compactness of $\aleph_1$ and $\aleph_2$. JSL **43** (1978), 394-401. *421*

[85] Sorts of huge cardinals. In: Caicedo, Xavier, Newton C.A. da Costa, and Rolando Chuaqui (eds.) *Proceedings of the Fifth Latin American Symposium on Mathematical Logic.* Revista Colombiana de Matemáticas **19** (1985), 69-75. *352*

Di Prisco, Carlos A., and Wiktor Marek

[82] Some properties of stationary sets. Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne) **198** (1982). *361*

[84] A filter on $[\lambda]^\kappa$. PAMS **90** (1984), 591-598. *352*

[85] On the space $(\lambda)^\kappa$. In: Di Prisco, Carlos A. (ed.) *Methods in Mathematical Logic.* Lecture Notes in Mathematics #1130. Berlin, Springer-Verlag 1985, 151-156. *352*

[85a] Some aspects of the theory of large cardinals. In: Luiz Paulo de Alcantara (ed.) *Mathematical Logic and Formal Systems.* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics #94. New York, Marcel Dekker 1985, 87-139. *313*

[88] Reflection properties induced by some large cardinal axioms. In: Carnielli, Walter A., and Luiz Paulo de Alcantara (eds.) *Methods and Applications of Mathematical Logic.* Contemporary Mathematics vol. 69. Providence, American Mathematical Society 1988, 19-25. *352*

Di Prisco, Carlos A., and William S. Zwicker

[80] Flipping properties and supercompact cardinals. FM **109** (1980), 31-36. *369*

Dodd, Anthony J. *293, 312*

[82] *The Core Model.* London Mathematical Society Lecture Note Series #61. Cambridge, Cambridge University Press 1982. *271, 273, 371, 378*

Donder, Hans-Dieter, and Peter G. Koepke

[83] On the consistency strength of 'accessible' Jonsson cardinals and of the weak Chang conjecture. APAL **25** (1983), 233-261. *109, 310*

Donder, Hans-Dieter, Peter G. Koepke, and Jean-Pierre Levinski

[88] Some stationary subsets of $P(\lambda)$. PAMS **102** (1988), 1000-1004. *363*

Donder, Hans-Dieter, and Pierre Matet

[93] Two cardinal versions of Diamond. IJM **83** (1993), 1-43. *364*

Dougherty, Randall *346*

[93] Critical points in an algebra of elementary embeddings. APAL **65** (1993), 211-241.

Dougherty, Randall, and Thomas J. Jech

[∞] Finite left-distributive algebras and embedding algebras. *347*

Drake, Frank R.

[74] *Set Theory.* Amsterdam, North-Holland 1974. *13, 15, 18, 40, 46, 71, 75, 86, 182*

Dreben, Burton, and Warren D. Goldfarb

[79] *The Decision Problem: Solvable Classes of Quantificational Formulas.* Reading, Addison-Wesley 1979. *82*

Dubose, Derrick A.

[90] The equivalence of determinacy and iterated sharps. JSL **55** (1990), 502-525. *463, 465*

[91] Determinacy and the sharp function on the reals. APAL **54** (1991), 59-85. Corrected version **55** (1992), 237-263. *465*

[92] Determinacy and extended sharp functions on the reals, Part II: Obtaining sharps from determinacy. APAL **58** (1992), 1-28. *465*

[95] Determinacy and the sharp function on objects of type k. JSL **60** (1995), 1025-1053. *465*

Dummett, Michael

[77] *Elements of Intuitionism.* Oxford Logic Guides #2. Oxford, Oxford University Press 1977. *126*

Easton, William B.

[64] Powers of regular cardinals. Ph.D. thesis, Princeton University 1964. Abstracted as: Proper classes of generic sets. NAMS **11** (1964), 205. Published in abridged form as [70] below. *126, 134*

[70] Powers of regular cardinals. AML **1** (1970), 139-178. *126, 134*

Egorov, Dmitry *160*

Ehrenfeucht, Andrzej, and Jerzy Łoś

[54] Sur les produits cartésiens des groupes cyclique infinis. BAPS **2** (1954), 261-263. *40*

Ehrenfeucht, Andrzej, and Andrzej M. Mostowski

[56] Models of axiomatic theories admitting automorphisms. FM **43** (1956), 50-68. Reprinted in Mostowski [79], 494-512. *113*

Ellentuck, Erik

[74] A new proof that analytic sets are Ramsey. JSL **39** (1974), 163-165. *401*

Erdös, Paul *8, 80, 82, 87*

[42] Some set-theoretical properties of graphs. Revista, Universidad Nacional de Tucumán, Serie A, Matemáticas y Física Teórica **3** (1942), 363-367. *86, 87*

[73] Spencer, Joel H. (ed.) *Paul Erdös: The Art of Counting.* Selected Writings. Cambridge, The MIT Press 1973.

Erdös, Paul, and András Hajnal

[58] On the structure of set mappings. AMAH **9** (1958), 111-131. *92, 95, 96*

[62] Some remarks concerning our paper "On the structure of set mappings". AMAH **13** (1962), 223-226. *95*

[66] On a problem of B. Jónsson. BAPS **14** (1966), 19-23. *97, 106, 107, 336*

[71] Unsolved problems in set theory. In: Scott [71], 17-48. *110*

[74] Unsolved and solved problems in set theory. In: Henkin *et al.* [74], 269-287. *99*

Erdös, Paul, András Hajnal, Attila Máté, and Richard Rado

[84] *Combinatorial Set Theory: Partition Relations for Cardinals.* Amsterdam, North-Holland 1984. *84, 89, 97*

Erdös, Paul, András Hajnal, and Richard Rado

[65] Partition relations for cardinal numbers. AMAH **16** (1965), 93-196. *84, 86, 94, 97, 98, 107*

Erdös, Paul, and Shizuo Kakutani

[43] On non-denumerable graphs. BAMS **49** (1943), 457-461. *86*

Erdös, Paul, and Richard Rado

[52] Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set. PLMS **(3)2** (1952), 417-439. Reprinted in Erdös [73], 383-405. *83, 93*

[56] A partition calculus in set theory. BAMS **62** (1956), 427-489. Reprinted in Gessel-Rota [87], 179-241. *83, 84, 86*

Erdös, Paul, and György Szekeres

[35] A combinatorial problem in geometry. Compositio Mathematica **2** (1935), 463-470. Reprinted in Erdös [73], 5-12, and in Gessel-Rota [87], 49-56. *82*

Erdös, Paul, and Alfred Tarski

[43] On families of mutually exclusive sets. AM **44** (1943), 315-329. Reprinted in Tarski [86] vol. 2, 591-605. *49, 51, 82, 83, 87, 88, 90, 95, 226, 235*

[61] On some problems involving inaccessible cardinals. In: Bar-Hillel-Poznanski-Rabin-Robinson [61], 50-82. Reprinted in Tarski [86] vol. 4, 79-111. *49, 88*

Euclid *493, 497*

Eudoxus *493*

Euler, Leonhard *2, 494*

Euwe, Max

[29] Mengentheoretische Betrachtungen über das Schachspiel. Koninklijke Akademi van Wetenschappen, Afdeeling Natuurkundige **32** (1929), 633-642. *390*

Farrington, C. Patrick

[82] The first-order theory of the c-degrees with the # operation. ZML **28** (1982), 487-493. *201*

Feferman, Solomon *126*

Feng, Qi, Menachem Magidor, and W. Hugh Woodin

[92] Universally Baire sets of reals. In: Judah-Just-Woodin [92], 203-242. *478*

Fenstad, Jens E., and Peter G. Hinman

[74] (eds.) *Generalized Recursion Theory.* Amsterdam, North-Holland 1974.

Fenstad, Jens E., and Dag Normann

[74] On absolutely measurable sets. FM **81** (1974), 91-98. *195*

Firestone, C.D., and J. Barkley Rosser

[49] The consistency of the hypothesis of accessibility (abstract). JSL **14** (1949), 79. *42*

Fisher, Edward R.

[77] Vopěnka's Principle, category theory and universal algebra (abstract). NAMS **24** (1977), A-44. *357*

Fleissner, William G.

[75] Lemma on measurable cardinals. PAMS **49** (1975), 517-518. *275*

Fodor, Géza *95*

[56] Eine Bemerking zur Theorie der regressive Funktionen. Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged **17** (1956), 139-142. *15*

Foreman, Matthew *12, 481, 483*

[82] Large cardinals and strong model-theoretic transfer properties. TAMS **272** (1982), 427-463. *479*

[83] More saturated ideals. In: Kechris-Martin-Moschovakis [83], 1-27. *479*

[86] Potent axioms. TAMS **294** (1986), 1-28. *481*

Foreman, Matthew, Menachem Magidor, and Saharon Shelah

[88] Martin's Maximum, saturated ideals and non-regular ultrafilters. Part I. AM **127** (1988), 1-47. *348, 480, 482*

[88a] Martin's Maximum, saturated ideals and non-regular ultrafilters. Part II. AM **127** (1988), 521-545. *480*

Fraenkel, Abraham A.

[21] Über die Zermelosche Begründung der Mengenlehre. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **30**II (1921), 97-98. *4*

[22] Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre. MA **86** (1922), 230-237. *4*

Fraenkel, Abraham A., Yehoshua Bar-Hillel, and Azriel Levy

[73] *Foundations of Set Theory.* Second edition. Amsterdam, North-Holland 1973. *2*

Frayne, Thomas E., Ann C. Morel, and Dana S. Scott

[62] Reduced direct products. FM **51** (1962), 195-228. Abstracted in NAMS **5** (1958), 673-675. *50, 270*

Frege, Gottlob *3, 499*

Fremlin, David H. *231*

[84] *Consequences of Martin's Axiom.* Cambridge Tracts in Mathematics #84. Cambridge, Cambridge University Press 1984. *136*

[93] Real-valued-measurable cardinals. In: Judah, Haim (ed.) *Set Theory of the Reals.* Israel Mathematical Conference Proceedings vol. 6. Providence, American Mathematical Society 1993, 151-304. *39, 73*

Friedman, Harvey M. *387, 417, 418, 445, 460, 461*

[71] Higher set theory and mathematical practice. AML **2** (1971), 325-357. *460, 462*

[71a] Determinacy in the low projective hierarchy. FM **72** (1971), 79-84. *462, 463*

[81] On the necessary use of abstract set theory. AdM **41** (1981), 209-280. *462*

Friedman, Sy D.

[87] Strong coding. APAL **35** (1987), 1-98. *202*

[87a] A guide to "Strong coding". APAL **35** (1987), 99-122. *202*

[90] The Π^1_2-Singleton Conjecture. JAMS **3** (1990), 771-791. *203*

[94] A simpler proof of the Coding Theorem. APAL **70** (1994), 1-16. *202*
[∞∞] A short proof of Jensen's Coding Theorem, assuming $\neg 0^{\#}$. To appear. *202*

Gaifman, Haim *56, 100, 112, 121, 199, 261, 271, 273*
[64] Measurable cardinals and constructible sets (abstract). NAMS **11** (1964), 771. *10, 112*
[67] A generalization of Mahlo's method for obtaining large cardinal numbers. IJM **5** (1967), 188-200. *30*
[74] Elementary embeddings of models of set theory and certain subtheories. In: Jech [74], 33-101. *58, 342-344, 378*

Gale, David, and Frank M. Stewart
[53] Infinite games with perfect information. In: Kuhn, Harold W., and Alan W. Tucker (eds.) *Contributions to the Theory of Games*, vol. 2. Annals of Mathematical Studies #28. Princeton, Princeton University Press 1953, 245-266. *390, 391*

Galvin, Fred
[65] Problem 5348. AMM **72** (1965), 1136. *336*
Baumgartner, James E., and Fred Galvin も参照.

Galvin, Fred, and Karel L. Prikry
[73] Borel sets and Ramsey's Theorem. JSL **38** (1973), 193-198. *401*
[76] Infinitary Jonsson algebras and partition relations. Algebra Universalis **6** (1976), 367-376. *336, 338*

Gandy, Robin O., and Charles E.M. Yates
[71] (eds.) *Logic Colloquium '69.* Amsterdam, North-Holland 1971.

Gentzen, Gerhard *10*
[36] Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. MA **112** (1936), 493-565. Translated in [69] below, 132-213. *9*
[43] Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit van Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie. MA **119** (1943), 140-161. Translated in [69] below, 287-308. *9*
[69] Szabo, M.E. (ed.) *The Collected Papers of Gerhard Gentzen.* Amsterdam, North-Holland 1969.

Gessel, Ira, and Gian-Carlo Rota
[87] (eds.) *Classic Papers in Combinatorics.* Boston, Birkhäuser 1987.

Gibbon, Edward *501*

Gitik, Moti *260, 363*
[80] All uncountable cardinals can be singular. IJM **35** (1980), 61-88. *254, 260*
[85] Nonsplitting subset of $\mathcal{P}_\kappa(\kappa^+)$. JSL **50** (1985), 881-894. *362*
[86] Changing cofinalities and the non-stationary ideal. IJM **56** (1986), 280-314. *254, 260*

Gitik, Moti, and Menachem Magidor
[92] The Singular Cardinals Hypothesis revisited. In: Judah-Just-Woodin [92], 243-279. *260*

Gloede, Klaus
[72] Ordinals with partition properties and the constructible hierarchy. ZML **18** (1972), 135-164. *122*

Gödel, Kurt F. *4-10, 28, 33, 34, 40-44, 47, 56, 82, 86, 114, 125, 131, 137, 158, 181, 183, 192, 194, 278, 291*

[30] Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. Monatshefte für Mathematik und Physik **37** (1930), 349-360. Reprinted and translated in [86] below, 102-123. *5*

[31] Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik **38** (1931), 173-198. Reprinted and translated with minor emendations by the author in [86] below, 144-195. *5, 32, 40, 41*

[38] The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis. PNAS **24** (1938), 556-557. Reprinted in [90] below, 26-27. *5, 40, 41, 45, 163, 183*

[39] Consistency-proof for the Generalized Continuum-Hypothesis. PNAS **25** (1939), 220-224. Reprinted in [90] below, 28-32. *5, 40-42*

[40] *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory.* Annals of Mathematics Studies #3. Princeton, Princeton University Press 1940. Reprinted in [90] below, 33-101. See also [51] below. *42*

[44] Russell's mathematical logic. In: Schilpp, Paul A. (ed.) *The Philosophy of Bertrand Russell.* Library of Living Philosophers vol. 5. Evanston, Northwestern University 1944, 123-153. Third edition, New York, Tudor 1951. Reprinted in [90] below, 119-141. *41*

[47] What is Cantor's Continuum Problem? AMM **54** (1947), 515-525. Errata **55** (1948), 151. Reprinted in [90] below, 176-187. Revised and expanded version in: Benacerraf, Paul, and Hilary Putnam (eds.) *Philosophy of Mathematics. Selected Readings.* Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall 1964, 258-273. This version reprinted with minor emendations by the author in [90] below, 254-270. *43, 44, 127, 501*

[51] Second printing (1951) of [40]. *45, 164, 183*

[65] Remarks before the Princeton Bicentennial Conference on problems in mathematics. In: Davis, Martin (ed.) *The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions.* Hewlett, N.Y., Raven Press 1965, 84-88. Reprinted in [90] below, 150-153. *43*

[86] Feferman, Solomon, *et al.* (eds.) *Collected Works*, vol. 1. New York, Oxford University Press 1986. *40*

[90] Feferman, Solomon, *et al.* (eds.) *Collected Works*, vol. 2. New York, Oxford University Press 1990. *7, 42-44, 70, 164*

Goldfarb, Warren D.

Dreben, Burton, and Warren D. Goldfarb を参照.

Gottwald, Siegfried, and Lothar Kreiser

[84] Paul Mahlo – Leben und Werk. NTM. Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik, und Medizin **21** (1984), 1-22. *29*

Graham, Ronald L., Bruce L. Rothschild, and Joel H. Spencer

[90] *Ramsey Theory.* Second edition. New York, Wiley & Sons 1990. *82*

Green, John

[78] Determinacy and the existence of large measurable cardinals. Ph.D. thesis, University of California at Berkeley 1978. *465*

Grigorieff, Serge

[75] Intermediate submodels and generic extensions in set theory. AM **101** (1975), 447-490. *136*

Guaspari, David

[73] Thin and well ordered analytical sets. Ph.D. thesis, Cambridge University 1973. *185*

Guaspari, David, and Leo A. Harrington

[76] Characterizing $\mathcal{C}_3$ (the largest countable Π^1_3 set). PAMS **57** (1976), 127-129. *441*

Hájek, Petr

[71] Sets, semisets, models. In: Scott [71], 67-81. *128*

Hajnal, András *47, 83*

[56] On a consistency theorem connected with the generalized continuum problem. ZML **2** (1956), 131-136. *46*

[61] On a consistency theorem connected with the generalized continuum problem. AMAH **12** (1961), 321-376. *46*

Erdös, Paul, and András Hajnal も参照.

Erdös, Paul, András Hajnal, Attila Máté, and Richard Rado も参照.

Hajnal, András, Richard Rado, and Vera T. Sós

[75] (eds.) *Infinite and Finite Sets.* Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai vol. 10. Amsterdam, North-Holland 1975.

Hallett, Michael

[84] *Cantorian Set Theory and Limitation of Size.* Oxford Logic Guides #10. Oxford, Clarendon Press 1984. *2*

Halmos, Paul R.

[50] *Measure Theory.* Princeton, Van Nostrand 1950. *25*

Hanf, William P. *28, 70, 72, 82, 95*

[64] Incompactness in languages with infinitely long expressions. FM **53** (1964), 309-324. *7, 52, 54, 55*

[64a] On a problem of Erdös and Tarski. FM **53** (1964), 325-334. Abstracted in NAMS **9** (1962), 229. *88*

Hanf, William P., and Dana S. Scott

[61] Classifying inaccessible cardinals (abstract). NAMS **8** (1961), 445. *8, 52, 68, 69, 71, 73, 76*

Harada, Mikio *338, 339*

Harrington, Leo A. *387, 394, 463*

[77] Long projective wellorderings. AML **12** (1977), 1-24. *449*

[78] Analytic determinacy and $0^{\#}$. JSL **43** (1978), 685-693. *464*

Guaspari, David, and Leo A. Harrington も参照.

Harrington, Leo A., and Alexander S. Kechris

[77] Π^1_2 singletons and $0^{\#}$. FM **95** (1977), 167-171. *201, 203*

[81] On the determinacy of games on ordinals. AML **20** (1981), 109-154. *398, 401, 422, 441*

Hartogs, Friedrich

[15] Über das Problem der Wohlordnung. MA **76** (1915), 436-443. *4*

Hausdorff, Felix

[08] Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen. MA **65** (1908), 435-505. *6, 29*

[14] *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig, de Gruyter 1914. Reprinted in New York, Chelsea 1965. *25, 29, 159, 160, 463*

[16] Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen. MA **77** (1916), 430-437. *160*

Hauser, Kai

[91] Indescribable cardinals and elementary embeddings. JSL **56** (1991), 439-457. *80*

[92] The indescribability of the order of the indescribable cardinals. APAL **57** (1992), 45-91. *80*

Hawkins, Thomas W.

[75] *Lebesgue's Theory of Integration. Its Origins and Development.* Second edition. New York, Chelsea 1975. *34, 158*

Henkin, Leon, *et al.*

[74] (eds.) *Proceedings of the Tarski Symposium.* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics vol. 25. Providence, American Mathematical Society, 1974.

Henle, James M.

[77] Some consequences of an infinite exponent partition relation. JSL **42** (1977), 523-526. *416*

[79] Researches into the world of $\kappa \longrightarrow (\kappa)^\kappa$. AML **17** (1979), 151-169. *416*

[84] Weak strong partition relations. JSL **49** (1984), 555-557. *416*

[90] Partition properties and Prikry Forcing on simple spaces. JSL **55** (1990), 938-947. *254*

Apter, Arthur W., and James M. Henle も参照.

Di Prisco, Carlos A., and James M. Henle も参照.

Henle, James M., Eugene M. Kleinberg, and Ronald J. Watro

[84] On the ultrafilters and ultrapowers of strong partition cardinals. JSL **49** (1984), 1268-1272. *416*

Hewitt, Edwin

[48] Rings of real-valued continuous functions. TAMS **64** (1948), 45-99. *40*

Hilbert, David *3, 10*

[28] Die Grundlagen der Mathematik. Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität **6** (1928), 65-92. Translated in van Heijenoort [67], 464-479. *498*

Hinman, Peter G.

[78] *Recursion-Theoretic Hierarchies.* Perspectives in Mathematical Logic. Berlin, Springer-Verlag 1978. *158, 170*

Hippasus of Metapontum *493*

Hrbáček, Karel *64*

Vopěnka, Petr, and Karel Hrbáček を参照.

Ihoda, Jaime (Haim Judah), and Saharon Shelah

[89] Δ^1_2-sets of reals. APAL **42** (1989), 207-223. *196*

Judah, Haim (Jaime Ihoda), and Saharon Shelah も参照.

Isbell, John R.

[66] Directed unions and chains. PAMS **17** (1966), 1467-1468. *358*

Jackson, Steve *387, 454-455*

[88] AD and the projective ordinals. In: Kechris-Martin-Steel [88], 117-220. *416, 454*
[90] Partition properties and well-ordered unions. APAL **48** (1990), 81-101. *448*
[91] Admissible Suslin cardinals in $L(\mathbb{R})$. JSL **56** (1991), 260-275. *455*
[92] Admissibility and Mahloness in $L(\mathbb{R})$. In: Judah-Just-Woodin [92], 63-74. *455*

Jackson, Steve and Donald A. Martin
[83] Pointclasses and well-ordered unions. In: Kechris-Martin-Moschovakis [83], 56-66. *448*

Janiszewski, Zygmunt *34*

Jech, Thomas J. *250*
[68] ω_1 can be measurable. IJM **6** (1968), 363-367. *403*
[71] The closed unbounded filter over $P_\kappa(\lambda)$. NAMS **18** (1971), 663. *358, 359*
[73] Some combinatorial problems concerning uncountable cardinals. AML **5** (1973), 165-198. *358, 360, 361, 364, 369*
[74] (ed.) *Axiomatic Set Theory.* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics vol. 13, part 2. Providence, American Mathematical Society 1974.
[78] *Set Theory.* New York, Academic Press 1978. *13, 16, 18, 129, 132-136, 158, 197, 232, 241, 277, 449*
[86] A theorem on $P_\kappa(\lambda)$. Journal of the Mathematical Society of Japan **38** (1986), 421-425. *363*
[92] Singular Cardinal Problem: Shelah's theorem on $2^{\aleph_\omega}$. BLMS **24** (1992), 127-139. *110*
Dougherty, Randall, and Thomas J. Jech も参照.

Jensen, Ronald B. *71, 124, 201-203, 231, 271, 273, 278, 293, 312, 371, 378, 463*
[66] Independence of the axiom of dependent choices from the countable axiom of choice (abstract). JSL **31** (1966), 294. *144*
[70] Definable sets of minimal degree. In: Bar-Hillel [70], 122-128. *203*
[72] The fine structure of the constructible hierarchy. AML **4** (1972), 229-308. *42*
[74] Measurable cardinals and the GCH. In: Jech [74], 175-178. *280*
Beller, Aaron, Ronald B. Jensen, and Philip Welch も参照.

Jensen, Ronald B. and Håvard Johnsbråten
[74] A new construction of a non-constructible Δ^1_3 subset of ω. FM **81** (1974), 279-290. *203*

Jensen, Ronald B., and Robert M. Solovay
[70] Some applications of almost disjoint sets. In: Bar-Hillel [70], 84-104. *203*

Johnsbråten, Håvard
Jensen, Ronald B. and Håvard Johnsbråten を参照.

Johnson, Chris A.
[88] Seminormal λ-generated ideals on $\mathcal{P}_\kappa\lambda$. JSL **53** (1988), 92-102. *369*
[88a] On saturated ideals and $\mathcal{P}_\kappa\lambda$. FM **29** (1988), 215-221. *369*

Jónsson, Bjarni
[72] *Topics in Universal Algebra.* Lecture Notes in Mathematics #250. Berlin, Springer-Verlag 1972. *105*

Joyce, James *501*

Judah, Haim (Jaime Ihoda), Winfried Just, and W. Hugh Woodin

[92] (eds.) *Set Theory of the Continuum.* Mathematical Sciences Research Institute publication #26. Berlin, Springer-Verlag 1992.

Judah, Haim (Jaime Ihoda), and Saharon Shelah

[91] Forcing minimal degree of constructibility. JSL **56** (1991), 769-782. *260*

Ihoda, Jaime (Haim Judah), and Saharon Shelah も参照.

Just, Winfried

Judah, Haim (Jaime Ihoda), Winfried Just, and W. Hugh Woodin を参照.

Kakuda, Yuzuru

[72] Saturated ideals in Boolean extensions. Nagoya Mathematical Journal **48** (1972), 159-168. *236*

Kakutani, Shizuo

Erdös, Paul, and Shizuo Kakutani を参照.

Kalmár, László

[28] Zur Theorie der abstrakten Spiele. ALS **4** (1928), 65-85. *390*

Kanamori, Akihiro

[78] On Vopěnka's and related principles. In: Macintyre, Angus, Leszek Pacholski, and Jeffrey B. Paris (eds.) *Logic Colloquium '77.* Amsterdam, North-Holland 1978, 145-153. *354, 355*

Solovay, Robert M., William N. Reinhardt, and Akihiro Kanamori も参照.

Kanamori, Akihiro, and Tamara E. Awerbuch-Friedlander

[90] The compleat $0^{\dagger}$. ZML **36** (1990), 133-141. *300*

Kanamori, Akihiro, and Menachem Magidor

[78] The evolution of large cardinal axioms in set theory. In: Müller, Gert H., and Dana S. Scott (eds.) *Higher Set Theory.* Lecture Notes in Mathematics #669. Berlin, Springer-Verlag 1978, 99-275. *109, 299*

Kanamori, Akihiro, and Saharon Shelah

[95] Complete quotient Boolean algebras. TAMS **347** (1995), 1963-1979. *229*

Kanovei, V.G.

[85] The development of the descriptive theory of sets under the influence of the work of Luzin. RMS **40**(3) (1985), 135-180. *159*

Kant, Immanuel *497*

Karp, Carol R.

[64] *Languages with Expressions of Infinite Length.* Amsterdam, North-Holland 1964. *49*

Kastanas, Ilias G.

[83] On the Ramsey property for sets of reals. JSL **48** (1983), 1035-1045. *401*

Kaufman, Matthew J., and Evangelos Kranakis

[84] Definable ultrapowers and ultrafilters over admissible ordinals. ZML **30** (1984), 97-118. *79*

Kechris, Alexander S. *11, 387, 399, 441, 444, 451, 452, 455*

[73] Measure and category in effective descriptive set theory. AML **5** (1973), 337-384. *441*

[74] On projective ordinals. JSL **39** (1974), 269-282. *449*

[75] The theory of countable analytical sets. TAMS **202** (1975), 259-297. *185, 441*
[78] AD and projective ordinals. In: Kechris-Moschovakis [78], 91-132. *415, 449*
[78a] On transfinite sequences of projective sets with an application to Σ^1_2 equivalence relations. In: Macintyre, Angus, Leszek Pacholski, and Jeffrey B. Paris (eds.) *Logic Colloquium '77*. Amsterdam, North-Holland 1978, 155-160. *448*
[81] Homogeneous trees and projective scales. In: Kechris-Martin-Moschovakis [81], 33-73. *207, 437, 449, 455, 470, 473*
[84] The Axiom of Determinacy implies dependent choices in $L(\mathbb{R})$. JSL **49** (1984), 161-173. *453*
[85] Determinacy and the structure of $L(\mathbb{R})$. In: Nerode-Shore [85], 271-283. *420, 451, 454*
[88] "AD + UNIFORMIZATION" is equivalent to "HALF $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$". In: Kechris-Martin-Steel [88], 98-102. *489*
[88a] A coding theorem for measures. In: Kechris-Martin-Steel [88], 103-109. *420*
[88b] Subsets of $\aleph_1$ constructible from a real. In: Kechris-Martin-Steel [88], 110-116. *407*
[95] *Lectures on Classical Descriptive Set Theory.* New York, Springer-Verlag 1995. *158, 478*

Becker, Howard S., and Alexander S. Kechris も参照.

Kechris, Alexander S., Eugene M. Kleinberg, Yiannis N. Moschovakis and W. Hugh Woodin
[81] The Axiom of Determinacy, strong partition properties and nonsingular measures. In: Kechris-Martin-Moschovakis [81], 77-99. *452*

Kechris, Alexander S., and Donald A. Martin
[78] On the theory of Π^1_3 sets of reals. BAMS **84** (1978), 149-151. *441*

Kechris, Alexander S., Donald A. Martin, and Yiannis N. Moschovakis
[81] (eds.) *Cabal Seminar 77-79.* Proceedings, Caltech-UCLA Logic Seminar 1977-79. Lecture Notes in Mathematics #839. Berlin, Springer-Verlag 1981. *422*
[83] (eds.) *Cabal Seminar 79-81.* Proceedings, Caltech-UCLA Logic Seminar 1979-81. Lecture Notes in Mathematics #1019. Berlin, Springer-Verlag 1983. *422*

Kechris, Alexander S., Donald A. Martin, and John R. Steel
[88] (eds.) *Cabal Seminar 81-85.* Proceedings, Caltech-UCLA Logic Seminar 1981-85. Lecture Notes in Mathematics #1333. Berlin, Springer-Verlag 1988. *422*

Kechris, Alexander S., and Yiannis N. Moschovakis
[72] Two theorems about projective sets. IJM **72** (1972), 391-399. *441*
[78] (eds.) *Cabal Seminar 76-77.* Proceedings, Caltech-UCLA Logic Seminar 1976-77. Lecture Notes in Mathematics #689. Berlin, Springer-Verlag 1978. *422*
[78a] Notes on the theory of scales. In: Kechris-Moschovakis [78], 1-53. *441*

Kechris, Alexander S., and Robert M. Solovay
[85] On the relative consistency strength of determinacy hypotheses. TAMS **290** (1985), 179-211. *441, 487*

Kechris, Alexander S., Robert M. Solovay, and John R. Steel
[81] The Axiom of Determinacy and the prewellordering property. In: Kechris-Martin-Moschovakis [81], 101-125. *435*

Kechris, Alexander S., and W. Hugh Woodin
[83] Equivalence of partition properties and determinacy. PNAS **80** (1983), 1783-1786. *441, 452*

Keisler, H. Jerome *63, 97*

[62] Some applications of the theory of models to set theory. In: Nagel-Suppes-Tarski [62], 80-86. *52, 55, 56, 62*
[62a] The equivalence of certain problems in set theory with problems in the theory of models (abstract). NAMS **9** (1962), 339. *52, 62*
[71] *Model Theory for Infinitary Logic.* Amsterdam, North-Holland 1971. *49*
Chang, Chen-Chung, and H. Jerome Keisler も参照.

Keisler, H. Jerome, and Frederick Rowbottom
[65] Constructible sets and weakly compact cardinals (abstract). NAMS **12** (1965), 373-4. *106*

Keisler, H. Jerome, and Alfred Tarski
[64] From accessible to inaccessible cardinals. FM **53** (1964), 225-308. Corrections **57** (1965), 119. Reprinted in Tarski [86] vol. 4, 129-213. *40, 50, 51, 55-56, 66, 67, 76, 90*

Keldysh, Ljudmila V.
[74] The ideas of N.N. Luzin in descriptive set theory. RMS **29**(5) (1974), 179-193. *159, 161*

Ketonen, Jussi A.
[72] Strong compactness and other cardinal sins. AML **5** (1972), 47-76. *324*

Kleene, Stephen C. *126, 158, 164, 165, 167, 170*
[43] Recursive predicates and quantifiers. TAMS **53** (1943), 41-73. *164*
[55] On the forms of predicates in the theory of constructive ordinals (second paper). American Journal of Mathematics **77** (1955), 405-428. *164, 175*
[55a] Arithmetical predicates and function quantifiers. TAMS **79** (1955), 312-340. *164*
[55b] Hierarchies of number-theoretic predicates. BAMS **61** (1955), 193-213. *164*

Kleinberg, Eugene M. *410, 415*
[70] Strong partition properties for infinite cardinals. JSL **35** (1970), 410-428. *410, 411*
[72] The equiconsistency of two large cardinal axioms (abstract). NAMS **16** (1972), 329. *109, 141*
[73] Rowbottom cardinals and Jonsson cardinals are almost the same. JSL **38** (1973), 423-427. *108*
[77] AD $\vdash$ "The $\aleph_n$ are Jonsson cardinals and $\aleph_\omega$ is a Rowbottom cardinal". AML **12** (1977), 229-248. *416*
[77a] *Infinitary Combinatorics and the Axiom of Determinateness.* Lecture Notes in Mathematics #612. Berlin, Springer-Verlag 1977. *416*
[78] A combinatorial characterization of normal M-ultrafilters. AdM **30** (1978), 77-84. *262*
[79] The equiconsistency of two large cardinal axioms. FM **102** (1979), 81-85. *109, 141*
[81] Producing measurable cardinals beyond κ. JSL **46** (1981), 643-648. *416*
[82] A measure representation theorem for strong partition cardinals. JSL **47** (1982), 161-168. *416*

Henle, James M., Eugene M. Kleinberg, and Ronald J. Watro も参照.
Kechris, Alexander S., Eugene M. Kleinberg, Yiannis N./ Moschovakis, and W. Hugh Woodin も参照.

Kochen, Simon

[61] Ultraproducts in the theory of models. AM **74** (1961), 221-261. *50*

Koepke, Peter G.

[88] Some applications of short core models. APAL **37** (1988), 179-204. *109*

[89] An introduction to extenders and core models for extender sequences. In: Ebbinghaus, Hans-Dieter, *et al.* (eds.) *Logic Colloquium '87.* Amsterdam, North-Holland 1989, 137-182. *109*

Donder, Hans-Dieter, and Peter G. Koepke も参照.

Donder, Hans-Dieter, Peter G. Koepke, and Jean-Pierre Levinski も参照.

Kolmogorov, Andrei N.

[28] Operations on sets (in Russian). Matematicheskij Sbornik **35** (1928), 414-422. *195*

Kondô, Motokiti *181*

[37] L'uniformisation des complémentaires analytiques. Proceedings of the Imperial Academy of Japan **13** (1937), 287-291. *163, 190*

[39] Sur l'uniformisation des complémentaires analytiques et les ensembles projectifs de la seconde classe. Japanese Journal of Mathematics **15** (1939), 197-230. *163, 190, 191*

König, Dénes

[27] Über eine Schlussweise aus den Endlichen ins Unendliche: Punktmengen. Kartenfärben. Verwandtschaftsbeziehungen. Schachspiel. ALS **3** (1927), 121-130. *84, 87, 390*

Kranakis, Evangelos

[82] Reflection and partition properties of admissible ordinals. AML **22** (1982), 213-242. *79*

[82a] Invisible ordinals and inductive definitions. ZML **28** (1982), 137-148. *79*

[83] Definable Ramsey and definable Erdös ordinals. Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforschung **23** (1983), 115-128. *79*

Kaufman, Matthew J., and Evangelos Kranakis も参照.

Kranakis, Evangelos, and Iain Phillips

[84] Partitions and homogeneous sets for admissible ordinals. In: Müller, Gert H., and Michael M. Richter (eds.) *Models and Sets.* Lecture Notes in Mathematics #1103. Berlin, Springer-Verlag 1984, 235-260. *79*

Kreisel, Georg

[80] Kurt Gödel, 28 April 1906 – 14 January 1978. Biographical Memoirs of the Fellows of the Royal Society **26** (1980), 149-224. Corrections **27** (1981), 697 and **28** (1982), 718. *41, 44, 164*

Kreiser, Lothar

Gottwald, Siegfried, and Lothar Kreiser を参照.

Kueker, David

[72] Löwenheim-Skolem and interpolation theorems in infinitary languages. BAMS **78** (1972), 211-215. *358*

[77] Countable approximations and Löwenheim-Skolem theorems. AML **11** (1977), 57-103. *358*

Kunen, Kenneth *11, 12, 56, 73, 107, 112, 121, 123, 223, 224, 235, 261, 269, 271, 274, 278, 281, 292, 294, 299, 312, 313, 313, 327, 336-339, 341, 342, 345, 357, 368, 387, 405, 409, 411, 415, 419, 420, 448, 449, 455, 469, 470, 479-481*

[68] Inaccessibility properties of cardinals. Ph.D. thesis, Stanford University 1968. Published in part in [70] below. *261, 267, 270, 273, 282, 284, 293*
[70] Some applications of iterated ultrapowers in set theory. AML **1** (1970), 179-227. *10, 236, 249, 261, 262, 267, 270, 273, 282, 284-287, 292, 310*
[71] Indescribability and the continuum. In: Scott [71], 199-203. *73*
[71a] On the GCH at measurable cardinals. In: Gandy-Yates [71], 107-110. *311*
[71b] Elementary embeddings and infinitary combinatorics. JSL **36** (1971), 407-413. *10, 335, 336*
[73] A model for the negation of the Axiom of Choice. In: Mathias-Rogers [73], 489-494. *274, 275*
[78] Saturated ideals. JSL **43** (1978), 65-76. *227, 249, 348, 479*
[80] *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* Amsterdam, North-Holland 1980. *13, 15, 40, 92, 129, 131-133, 135, 136, 152*
[84] Random and Cohen reals. In: Kunen-Vaughan [84], 887-911. *27, 239*

Kunen, Kenneth, and Jeffrey B. Paris
[71] Boolean extensions and measurable cardinals. AML **2** (1971), 359-377. *242, 244, 246, 247*

Kunen, Kenneth, and Donald H. Pelletier
[83] On a combinatorial property of Menas related to the partition property for measures on supercompact cardinals. JSL **48** (1983), 475-481. *367, 368*

Kunen, Kenneth, and Jerry E. Vaughan
[84] (eds.) *Handbook of Set-Theoretic Topology.* Amsterdam, North-Holland 1984.

Kuratowski, Kazimierz *29, 34*
[21] Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles. FM **2** (1921), 161-171. Reprinted in [88] below, 1-11. *4*
[24] Sur l'état actuel de l'axiomatique de la théorie des ensembles. Annales de la Société Polonaise de Mathématique **3** (1924), 146-147. Reprinted in [88] below, 179. *31*
[31] Evaluation de la classe Borélienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques. FM **17** (1931), 249-272. Reprinted in [88] below, 376-399. *165*
[36] Sur les théorèmes de séparation dans la théorie des ensembles. FM **26** (1936), 183-191. Reprinted in [88] below, 461-469. *424, 427, 428*
[58] *Topologie.* Vol. 1. Warsaw, Państwowe Wydawnidwo Naukowe 1958. English translation, 1966. *463*
[80] *A Half Century of Polish Mathematics. Remembrances and Reflections.* Oxford, Pergamon Press 1980. *34, 161*
[88] Borsuk, Karol, *et al.* (eds.) *Selected Papers.* Warsaw, Państwowe Wydawnidwo Naukowe 1988.

Banach, Stefan, and Kazimierz Kuratowski も参照.

Kuratowski, Kazimierz, and Alfred Tarski
[31] Les opérations logiques et les ensembles projectifs. FM **17** (1931), 240-248. Reprinted in Tarski [86] vol. 1, 551-559, and in Kuratowski [88], 367-375. Translated in Tarski [83], 143-151. *165*

Kuratowski, Kazimierz, and Stanisław M. Ulam
[32] Quelques propriétés topologiques du produit combinatoire. FM **19** (1932), 247-251. Reprinted in Ulam [74], 32-36. *27*

Kurepa, Djuro R.

[35] Ensembles ordonnés et ramifiés. Thèse, Paris. Published as: Publications mathématiques de l'Université de Belgrade **4** (1935), 1-138. *84, 87, 90, 91*

[41] Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés (continuation). Revista de Ciencias de la Universidad Mayor de San Marcos (Lima) **43**(437) (1941), 483-500. *86*

[59] On the cardinal number of ordered sets and of symmetrical structures in dependence on the cardinal numbers of its chains and antichains. Glasnik Matematičko-fizički i astronomski, Periodicum mathematico-physicum et astronomicum **14** (1959), 183-203. *84, 86*

Kuzawa, Mary Grace

[68] *Modern Mathematics. The Genesis of a School in Poland.* New Haven, College & University Press 1968. *34*

[70] Fundamenta Mathematicae: an examination of its founding and significance. AMM **77** (1970), 485-492. *34*

Lao-Tzu *502*

Laver, Richard *129*

[82] Saturated ideals and non-regular ultrafilters. In: Metakides [82], 297-305. *237*

[86] Elementary embeddings of a rank into itself. AAMS **7** (1986), 6. *346*

[92] The left distributive law and the freeness of an algebra of elementary embeddings. AdM **91** (1992), 209-231. *346, 347*

[94] A division algorithm for the free left distributive algebra. In: Juha Oikkonen and Jouko A. Väänänen (eds.) *Logic Colloquium '90.* Lecture Notes in Logic #2. New York, Springer-Verlag 1994, 155-162. *347*

[95] On the algebra of elementary embeddings of a rank into itself. AdM **110** (1995), 334-346. *347*

Lavine, Shaughan M.

[94] *Understanding the Infinite.* Cambridge, Harvard University Press 1994. *2*

Lebesgue, Henri *144, 158, 159, 164*

[02] Intégrale, longueur, aire. Annali di Matematica Pura ed Applicata **(3)7** (1902), 231-359. Reprinted in [72] below, vol. 1, 203-331. *25, 34, 158*

[05] Sur les fonctions représentables analytiquement. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **(6)1** (1905), 139-216. Reprinted in [72] below, vol. 3, 103-180. *6, 158-160, 161, 163, 170, 172, 180*

[07] Contributions à l'etude des correspondances de M. Zermelo. Bulletin de la Société Mathématique de France **35** (1907), 202-212. Reprinted in [72] below, vol. 3, 227-237. *34*

[72] *Oeuvres Scientifiques.* Geneva, Kundig 1972.

Leibniz, Gottfried W. *2, 494*

Lerman, Manuel

[83] *Degrees of Unsolvability.* Perspectives in Mathematical Logic. Berlin, Springer-Verlag 1983. *126*

Levinski, Jean-Pierre

[84] Instances of the conjecture of Chang. IJM **48** (1984), 225-243. *363*

Carr, Donna M., Jean-Pierre Levinski, and Donald H. Pelletier も参照.

Donder, Hans-Dieter, Peter G. Koepke, and Jean-Pierre Levinski も参照.

Levy, Azriel *34, 47, 126, 137, 141, 142, 148, 183, 227, 327, 403*

[57] Indépendance conditionelle de $V = L$ et d'axiomes qui se rattachent au système de M. Gödel. CRP **245** (1957), 1582-1583. *46*
[60] A generalization of Gödel's notion of constructibility. JSL **25** (1960), 147-155. *46*
[60a] Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory. PJM **10** (1960), 223-238. *8, 69-71*
[63] Independence results in set theory by Cohen's method IV (abstract). NAMS **10** (1963), 593. *139, 149*
[64] Measurable cardinals and the continuum hypothesis (abstract). NAMS **11** (1964), 769-770. *139*
[65] A hierarchy of formulas in set theory. Memoirs of the American Mathematical Society **57** (1965). *18, 314*
[65a] Definability in axiomatic set theory I. In: Bar-Hillel [65], 127-151. *191*
[70] Definability in axiomatic set theory II. In: Bar-Hillel [70], 129-145. *139, 149, 191*
[71] The sizes of the indescribable cardinals. In: Scott [71], 205-218. *8, 69, 75-79*
[79] *Basic Set Theory.* Perspectives in Mathematical Logic. Berlin, Springer-Verlag 1979. *13, 24, 84, 239*
Fraenkel, Abraham A., Yehoshua Bar-Hillel, and Azriel Levy も参照.

Levy, Azriel, and Robert M. Solovay
[67] Measurable cardinals and the continuum hypothesis. IJM **5** (1967), 234-248. *139*
[72] On the decomposition of sets of reals to Borel sets. AML **5** (1972), 1-19. *181*

Łoś, Jerzy
[55] Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres. In: Skolem, Thoralf, *et al.* (eds.) *Mathematical Interpretation of Formal Systems.* Amsterdam, North-Holland 1955, 98-113. *21, 50*
Ehrenfeucht, Andrzej, and Jerzy Łoś も参照.

Louveau, Alain
[83] Some results in the Wadge hierarchy of Borel sets. In: Kechris-Martin-Moschovakis [83], 28-55. *436, 462*

Louveau, Alain, and Jean Saint-Raymond
[87] Borel classes and closed games: Wadge-type and Hurewicz-type results. TAMS **304** (1987), 431-467. *436, 462, 463*
[88] The strength of Borel Wadge Determinacy. In: Kechris-Martin-Steel [88], 1-30. *436, 462, 463*

Luzin, Nikolai N. *6, 159, 160, 164*
[17] Sur la classification de M. Baire. CRP **164** (1917), 91-94. *161, 162, 198*
[25] Sur un problème de M. Emile Borel et les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue; les ensembles analytiques. CRP **180** (1925), 1318-1320. *161*
[25a] Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue. CRP **180** (1925), 1572-1574. *161, 162*
[25b] Les propriétés des ensembles projectifs. CRP **180** (1925), 1817-1819. *162*
[25c] Sur les ensembles non mesurables B et l'emploi de la diagonale Cantor. CRP **181** (1925), 95-96. *162, 171*
[27] Sur les ensembles analytiques. FM **10** (1927), 1-95. *161, 178, 424*
[30] *Leçons sur Les Ensembles Analytiques et Leurs Applications.* Paris, Gauthier-Villars 1930. Reprinted with corrections in New York, Chelsea 1972. *161-163*
[30a] Sur le problème de M.J. Hadamard d'uniformisation des ensembles. CRP **190** (1930), 349-351. *163*

[35] Sur les ensembles analytiques nuls. FM **25** (1935), 109-131. *181*

Luzin, Nikolai N., and Petr S. Novikov

[35] Choix éffectif d'un point dans un complémentaire analytique arbitraire, donné par un crible. FM **25** (1935), 559-560. *163*

Luzin, Nikolai N., and Wacław Sierpiński

[18] Sur quelques propriétés des ensembles (A). Bulletin de l'Académie des Sciences Cracovie, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Série A (1918), 35-48. Reprinted in Sierpiński [75], 192-204. *172, 176-178, 428, 444*

[23] Sur un ensemble non mesurable B. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **(9)2** (1923), 53-72. Reprinted in Sierpiński [75], 504-519. *172, 175-180, 444*

Lyubeckij, V.A.

[70] The existence of a nonmeasurable set of type A_2 implies the existence of an uncountable set of type CA which does not contain a perfect subset. Doklady Akademii Nauk SSSR **195** (1971), 548-550. Translated in Soviet Mathematics, Doklady **11** (1970), 1513-1515. *199*

[71] Independence of certain propositions of set theory from Zermelo-Fraenkel set theory. Vestnik Moskovskogo Universiteta Seriia I, Matematika Mehanika **26**(2) (1971), 78-82. Translated in Moscow University Mathematics Bulletin **26**(2) (1971), 116-119. *199*

Mackey, George W.

[44] Equivalence of a problem in measure theory to a problem in the theory of vector lattices. BAMS **50** (1944), 719-722. *40*

Maddy, Penelope

[88] Believing the Axioms. I. JSL **53** (1988), 481-511. *7*

[88a] Believing the Axioms. II. JSL **53** (1988), 736-764. *7*

Magidor, Menachem *12, 312, 325, 342, 483*

[71] There are many normal ultrafilters corresponding to a supercompact cardinal. IJM **9** (1971), 186-192. *322, 325*

[71a] On the role of supercompact and extendible cardinals in logic. IJM **10** (1971), 147-157. *318, 319, 325, 332*

[74] Combinatorial characterization of supercompact cardinals. PAMS **42** (1974), 279-285. *369*

[76] How large is the first strongly compact cardinal? or: A study on identity crises. AML **10** (1976), 33-57. *325*

[80] Precipitous ideals and Σ^1_4 sets. IJM **35** (1980), 109-134. *481*

Burke, Maxim, and Menachem Magidor も参照.

Feng, Qi, Menachem Magidor, and W. Hugh Woodin も参照.

Foreman, Matthew, Menachem Magidor, and Saharon Shelah も参照.

Gitik, Moti, and Menachem Magidor も参照.

Kanamori, Akihiro, and Menachem Magidor も参照.

Mahlo, Paul *58*

[11] Über lineare transfinite Mengen. BKSG **63** (1911), 187-225. *6, 29, 30*

[12] Zur Theorie und Anwendung der ρ_0-Zahlen. BKSG **64** (1912), 108-112. *6, 29*

[13] Zur Theorie und Anwendung der ρ_0-Zahlen II. BKSG **65** (1913), 268-282. *6, 29*

[13a] Über Teilmengen des Kontinuums von dessen Mächtigkeit. BKSG **65** (1913), 283-315. *29*

Makowsky, Johann A.

[85] Vopěnka's Principle and compact logics. JSL **50** (1985), 42-48. *357*

Mansfield, Richard B.

[70] Perfect subsets of definable sets of real numbers. PJM **35** (1970), 451-457. *197*

[71] A Souslin operation for Π^1_2. IJM **9** (1971), 367-379. *207, 214, 217, 220, 439*

Mansfield, Richard B., and Galen Weitkamp

[85] *Recursive Aspects of Descriptive Set Theory.* Oxford Logic Guides #11. New York, Oxford University Press 1985. *158*

Marek, Wiktor

Di Prisco, Carlos A., and Wiktor Marek を参照.

Marshall, M. Victoria

[89] Higher order reflection principles. JSL **54** (1990), 474-489. *348*

Martin, Donald A. *11, 125, 158, 185, 207, 208, 219, 220, 386-387, 399, 402, 405, 408, 410, 411, 415, 421, 422, 425, 431, 432, 435, 436, 441, 444-449, 451-455, 459-465, 470, 473, 478-480, 482, 483*

[68] The axiom of determinateness and reduction principles in the analytical hierarchy. BAMS **74** (1968), 687-689. *406, 430*

[70] Measurable cardinals and analytic games. FM **66** (1970), 287-291. *12, 457, 460-462*

[75] Borel determinacy. AM **102** (1975), 363-371. *461*

[76] Hilbert's first problem: The Continuum Hypothesis. In: Browder, Felix (ed.) *Mathematical Developments Arising from Hilbert's Problems.* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics vol. 28. Providence, American Mathematical Society 1976, 81-92. *43*

[80] Infinite games. In: Lehto, Olli (ed.) *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Helsinki 1978, vol. 1. Helsinki, Academia Scientiarum Fennica 1980, 269-273. *346, 469*

[83] The largest countable this, that, and the other. In: Kechris-Martin-Moschovakis [83], 97-106. *441, 450, 452*

[83a] The real game quantifier propagates scales. In: Kechris-Martin-Moschovakis [83], 157-171. *451*

[85] A purely inductive proof of Borel determinacy. In: Nerode-Shore [85], 303-308. *461*

[90] An extension of Borel determinacy. APAL **49** (1990), 279-293. *461, 465*

[∞] Forthcoming book on determinacy. *461, 463, 465, 470*

Baumgartner, James E., Donald A. Martin, and Saharon Shelah も参照.

Jackson, Steve, and Donald A. Martin も参照.

Kechris, Alexander S., and Donald A. Martin も参照.

Kechris, Alexander S., Donald A. Martin, and Yiannis N. Moschovakis も参照.

Kechris, Alexander S., Donald A. Martin, and John R. Steel も参照.

Martin, Donald A., and William J. Mitchell

[79] On the ultrafilter of closed, unbounded sets. JSL **44** (1979), 503-506. *405*

Martin, Donald A., Yiannis N. Moschovakis, and John R. Steel.

[82] The extent of definable scales. BAMS (New Series) **6** (1982), 435-440. *450*

Martin, Donald A., and Robert M. Solovay

[69] A basis theorem for Σ^1_3 sets of reals. AM **89** (1969), 138-159. *9, 207, 212, 214, 220, 439, 457, 470*

[70] Internal Cohen extensions. AML **2** (1970), 143-178. *43, 181, 194, 446*

Martin, Donald A., and John R. Steel

[83] The extent of scales in $L(\mathbb{R})$. In: Kechris-Martin-Moschovakis [83], 86-96. *401, 450*
[88] Projective determinacy. PNAS **85** (1988), 6582-6586. *483*
[89] A proof of Projective Determinacy. JAMS **2** (1989), 71-125. *379, 482, 483*
[94] Iteration trees. JAMS **7** (1994), 1-73. *483*

Máté, Attila
Erdös, Paul, András Hajnal, Attila Máté, and Richard Rado を参照.

Mathias, Adrian R.D. *254*
[68] On a generalization of Ramsey's theorem (abstract). NAMS **15** (1968), 931. *156, 157*
[73] On sequences generic in the sense of Prikry. Journal of the Australian Mathematical Society **15** (1973), 409-414. *253*
[77] Happy families. AML **12** (1977), 59-111. *156, 157, 254, 260*
[79] Surrealist landscape with figures (a survey of recent results in set theory). Periodica Mathematica Hungarica **10** (1979), 109-175. *129*
[83] (ed.) *Surveys in Set Theory.* London Mathematical Society Lecture Note Series #87. Cambridge, Cambridge University Press, 1983.
Woodin, W. Hugh, Robert M. Solovay, and Adrian R.D. Mathias も参照.

Mathias, Adrian R.D., and Hartley Rogers Jr.
[73] (eds.) *Cambridge Summer School in Mathematical Logic.* Lecture Notes in Mathematics #337. Berlin, Springer-Verlag 1973.

Matsubara, Yo
[87] Menas' conjecture and generic ultrapowers. APAL **36** (1987), 225-234. *361*
[88] Splitting $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ into stationary subsets. JSL **53** (1988), 385-389. *364*
[88a] Variations of cub filter on $\mathcal{P}_\kappa\lambda$. PAMS **102** (1988), 1009-1017. *363*
[90] Consistency of Menas' conjecture. Journal of the Mathematical Society of Japan **42** (1990), 259-263. *363*

Mauldin, R. Daniel
[81] (ed.) *The Scottish Book.* Boston, Birkhäuser 1981. *390, 392*

Mazur, Stanisław *390, 392, 396*

Mazurkiewicz, Stefan
[36] Über die Menge der differenzierbaren Funktionen. FM **27** (1936), 244-249. *180*

Menas, Telis K. *362-364*
[74] On strong compactness and supercompactness. AML **7** (1974), 327-359. *324, 325, 359, 360*
[76] A combinatorial property of $p_\kappa\lambda$. JSL **41** (1976), 225-234. *325, 366-368*
[76a] Consistency results concerning supercompactness. TAMS **223** (1976), 61-91. *325*

Metakides, George
[82] (ed.) *Patras Logic Symposion.* Amsterdam, North-Holland 1982.

Mignone, Robert J.
[84] The ultrafilter characterization of huge cardinals. PAMS **90** (1984), 585-590. *352*

Mirimanov, Dmitry
[17] Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles. L'Enseignment Mathématique **19** (1917), 37-52. *4, 33*

Mitchell, William J. *129, 293, 490*
[74] Sets constructible from sequences of ultrafilters. JSL **39** (1974), 57-66. *321*

[79] Hypermeasurable cardinals. In: Boffa, Maurice, Dirk van Dalen, and Kenneth McAloon (eds.) *Logic Colloquium '78*. Amsterdam, North-Holland 1979, 303-316. *371, 378, 469*

Martin, Donald A., and William J. Mitchell も参照.

Monk, J. Donald, and Dana S. Scott

[64] Additions to some results of Erdös and Tarski. FM **53** (1964), 335-343. *88*

Monk, Leonard *435*

Montague, Richard M.

[55] Non-finitizable and essentially non-finitizable theories (abstract). BAMS **61** (1955), 172-173. *69*

[61] Fraenkel's addition to the axioms of Zermelo. In: Bar-Hillel-Poznanski-Rabin-Robinson [61], 91-114. *69, 70*

Montague, Richard M., and Robert L. Vaught

[59] Natural models of set theories. FM **47** (1959), 219-242. *32*

Moore, Gregory H.

[82] *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins, Development and Influence.* New York, Springer-Verlag 1982. *2, 159*

[88] The origins of forcing. In: Drake, Frank R., and John K. Truss (eds.) *Logic Colloquium '86*. Amsterdam, North-Holland 1988, 143-173. *44, 126*

Morel, Ann C.

Frayne, Thomas E., Ann C. Morel, and Dana S. Scott を参照.

Morgenstern, Carl F.

[79] On the ordering of certain large cardinals. JSL **44** (1979), 563-565. *351*

Morgenstern, Oskar

von Neumann, John, and Oskar Morgenstern を参照.

Morley, Michael D.

[65] Categoricity in power. TAMS **114** (1965), 514-538. *113*

[65a] Omitting classes of elements. In: Addison-Henkin-Tarski [65], 265-273. *113*

Moschovakis, Yiannis N. *11, 386, 387, 417, 422, 425, 428, 430, 432, 436, 441-444, 447, 455*

[70] Determinacy and prewellorderings of the continuum. In: Bar-Hillel [70], 24-62. *416-418, 443, 445, 446, 448*

[71] Uniformization in a playful universe. BAMS **77** (1971), 731-736. *438-440, 445, 447*

[73] Analytical definability in a playful universe. In: Suppes, Patrick, *et al.* (eds.) *Logic, Methodology and Philosophy of Science IV.* Proceedings of the 1971 International Congress, Bucharest. Amsterdam, North-Holland 1973, 77-83. *440, 441*

[76] Indescribable cardinals in L (abstract). JSL **41** (1976), 554-555. *79*

[78] Inductive scales on inductive sets. In: Kechris-Moschovakis [78], 185-192. *450*

[80] *Descriptive Set Theory.* Amsterdam, North-Holland 1980. *15, 40, 46, 47, 158, 194, 387, 422, 440, 441, 446, 448, 450*

[81] Ordinal games and playful models. In: Kechris-Martin-Moschovakis [81], 169-201. *441*

[83] Scales on coinductive sets. In: Kechris-Martin-Moschovakis [83], 77-85. *450*

Addison Jr., John W., and Yiannis N. Moschovakis も参照.

Becker, Howard S., and Yiannis N. Moschovakis も参照.

Kechris, Alexander S., Eugene M. Kleinberg, Yiannis N. Moschovakis, and W. Hugh Woodin も参照.
Kechris, Alexander S., Donald A. Martin, and Yiannis N. Moschovakis も参照.
Kechris, Alexander S., and Yiannis N. Moschovakis も参照.
Martin, Donald A., Yiannis N. Moschovakis, and John R. Steel も参照.

Mostowski, Andrzej M. *49, 88, 112, 164*
[47] On definable sets of positive integers. FM **34** (1947), 81-112. Reprinted in [79] below, vol. 1, 339-370. *164*
[49] An undecidable arithmetical statement. FM **36** (1949), 143-164. Reprinted in [79] below, vol. 1, 531-552. *20, 31, 32*
[79] Kuratowski, Kazimierz, *et al.* (eds.) *Foundational Studies. Selected Works.* Amsterdam, North-Holland 1979.
Ehrenfeucht, Andrzej, and Andrzej M. Mostowski も参照.

Müller, Gert H.
[76] (ed.) *Sets and Classes.* Amsterdam, North-Holland 1976.

Müller, Gert H., Arnold Oberschelp, and Klaus Potthoff
[75] (eds.) *Logic Conference, Kiel 1974.* Lecture Notes in Mathematics #499. Berlin, Springer-Verlag 1975.

Mycielski, Jan *461*
[64] On the axiom of determinateness. FM **53** (1964), 205-224. *148, 183, 396-398*
[66] On the axiom of determinateness II. FM **59** (1966), 203-212. *396*

Mycielski, Jan, and Hugo Steinhaus
[62] A mathematical axiom contradicting the axiom of choice. BAPS **10** (1962), 1-3. Reprinted in Steinhaus [85], 778-781. *11, 396*

Mycielski, Jan, and Stanisław Swierczkowski
[64] On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness. FM **54** (1964), 67-71. *394, 396*

Mycielski, Jan, Stanisław Swierczkowski, and A. Zieba
[56] On infinite positional games. BAPS **4** (1956), 485-488. *396*

Mycielski, Jan, and A. Zieba
[55] On infinite games. BAPS **3** (1955), 133-136. *396*

Nagel, Ernest, Patrick Suppes, and Alfred Tarski
[62] (eds.) *Logic, Methodology and Philosophy of Science.* Proceedings of the 1960 International Congress, Stanford. Stanford, Stanford University Press 1962.

Namba, Kanji *321*

Negrepontis, Stylianos
Comfort, W. Wistar, and Stylianos Negrepontis を参照.

Nerode, Anil, and Richard A. Shore
[85] (eds.) *Recursion Theory.* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics vol. 42. Providence, American Mathematical Society 1985.

Newton, Isaac *2, 494*

Normann, Dag
Fenstad, Jens E., and Dag Normann を参照.

Novikov, Petr S.

[31] Sur les fonctions implicites mesurables B. FM **17** (1931), 8-25. *163*

[35] Sur la séparabilité des ensembles projectifs de seconde class. FM **25** (1935), 459-466. *423, 428*

[51] On the consistency of some propositions of the descriptive theory of sets (in Russian). Trudy Matematičeskogo Instituat imeni V.A. Steklova **38** (1951), 279-316. Translated in American Mathematical Society Translations **29** (1963), 51-89. *164, 430*

Luzin, Nikolai N., and Petr S. Novikov を参照.

Oxtoby, John C.

[57] The Banach-Mazur game and Banach Category Theorem. In: Dresher, Melvin, Alan W. Tucker, and Philip Wolfe (eds.) *Contributions to the Theory of Games.* Vol. 3. Annals of Mathematics Studies #39. Princeton, Princeton University Press 1957, 159-163. *392*

[71] *Measure and Category. A Survey of the Analogies between Topological and Measure Spaces.* New York, Springer-Verlag 1971. *27*

Paris, Jeffrey B. *252, 299, 415*

[69] Boolean extensions and large cardinals. Ph.D. thesis, Manchester University 1969. *287*

[72] ZF $\vdash \Sigma^0_4$ determinateness. JSL **37** (1972), 661-667. *461*

[74] Patterns of indiscernibles. BLMS **6** (1974), 183-188. *201, 203*

Devlin, Keith J., and Jeffrey B. Paris も参照.

Kunen, Kenneth, and Jeffrey B. Paris も参照.

Peano, Giuseppe *3, 499*

Pelletier, Donald H.

[81] The partition property for certain extendible measures on supercompact cardinals. PAMS **81** (1981), 607-612. *368*

Carr, Donna M., Jean-Pierre Levinski, and Donald H. Pelletier も参照.

Carr, Donna M., and Donald H. Pelletier も参照.

Kunen, Kenneth, and Donald H. Pelletier も参照.

Phillips, Esther R.

[78] Nicolai Nicolaevich Luzin and the Moscow school of the theory of functions. Historia Mathematica **5** (1978), 275-305. *159*

Phillips, Iain

Kranakis, Evangelos, and Iain Phillips を参照.

Poincaré, Henri *498*

Pospíšil, Bedřich

[37] Remark on bicompact spaces. AM **38** (1937), 845-846. *420*

Post, Emil L. *126*

Powell, William C.

[72] Almost huge cardinals and Vopěnka's principle (abstract). NAMS **19** (1972), A-616. *356*

[74] Variations of Keisler's theorem for complete embeddings. FM **81** (1974), 121-132. *343, 371*

Prikry, Karel L. *104, 156, 250*

[66] Measurable cardinals and saturated ideals (abstract). NAMS **13** (1966), 720-721. *236, 237*

[70] Changing measurable into accessible cardinals. Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne) **68** (1970), 5-52. *103, 236-238, 251, 252, 254, 256, 259*

[75] Ideals and powers of cardinals. BAMS **81** (1975), 907-909. *104, 235*

[76] Determinateness and partitions. PAMS **54** (1976), 303-306. *401*

Galvin, Fred, and Karel L. Prikry を参照.

Rado, Richard *83*

Erdös, Paul, András Hajnal, Attila Máté, and Richard Rado を参照.

Erdös, Paul, András Hajnal, and Richard Rado も参照.

Erdös, Paul, and Richard Rado も参照.

Hajnal, András, Richard Rado, and Vera T. Sós も参照.

Ramsey, Frank P.

[30] On a problem of formal logic. PLMS **(2)30** (1930), 264-286. Reprinted in Gessel-Rota [87], 2-24. *8, 82, 87, 113*

Rasiowa, Helena, and Roman Sikorski

[63] *The Mathematics of Metamathematics.* Monografie Matematyczne #41. Warsaw, Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1963. *126*

Reid, Constance

Albers, Donald J., Gerald L. Alexanderson, and Constance Reid を参照.

Reinhardt, William N. *10, 313, 313, 318, 323, 327-331, 357*

[70] Ackermann's set theory equals ZF. AML **2** (1970), 189-249. *327*

[74] Set existence principles of Shoenfield, Ackermann, and Powell. FM **84** (1974), 5-34. *328, 329*

[74a] Remarks on reflection principles, large cardinals, and elementary embeddings. In: Jech [74], 189-205. *329, 335*

[80] Satisfaction definitions and axioms of infinity in a theory of properties with necessity operator. In: Arruda, Ayda I., Rolando Chuaqui, and Newton C.A. da Costa (eds.) *Mathematical Logic in Latin America.* Amsterdam, North-Holland 1980, 267-303. *331*

Solovay, Robert M., William N. Reinhardt, and Akihiro Kanamori も参照.

Reinhardt, William N., and Jack H. Silver

[65] On some problems of Erdös-Hajnal (abstract). NAMS **12** (1965), 723-724. *95, 122*

Richter, Wayne H., and Peter Aczel

[74] Inductive definitions and reflecting properties of admissible ordinals. In: Fenstad-Hinman [74], 301-381. *79*

Robinson, Abraham

[62] Recent developments in model theory. In: Nagel-Suppes-Tarski [62], 60-79. Reprinted in [79] below, vol. 1, 12-31. *52*

[65] Formalism 64. In: Bar-Hillel [65], 228-246. Reprinted in [79] below, vol. 2, 505-523. *127, 501*

[79] Keisler, H. Jerome *et al.* (eds.) *Selected Papers of Abraham Robinson.* New Haven, Yale University Press 1979.

Rogers, Claude A., *et al.*

[80] (eds.) *Analytic Sets.* London, Academic Press 1980. *158*

Rosser, J. Barkley

[69] *Simplified Independence Proofs.* New York, Academic Press 1969. *129*

Firestone, C.D., and J. Barkley Rosser も参照.

Rothschild, Bruce L.

Graham, Ronald L., Bruce L. Rothschild, and Joel H. Spencer を参照.

Rowbottom, Frederick *56, 80, 99, 100, 107, 111, 112, 199*

[64] Large cardinals and small constructible sets. Ph.D. thesis, University of Wisconsin at Madison 1964. Published as [71] below. *8, 95, 97, 98, 100, 102*

[71] Some strong axioms of infinity incompatible with the axiom of constructibility. AML **3** (1971), 1-44. *8, 95, 98, 100, 102*

Keisler, H. Jerome, and Frederick Rowbottom も参照.

Russell, Bertrand *3, 4, 14, 41, 82*

[03] *The Principles of Mathematics.* Cambridge, Cambridge University Press 1903. *497*

Sacks, Gerald E.

[76] Countable admissible ordinals and hyperdegrees. AdM **19** (1976), 213-262. *185*

[90] *Higher Recursion Theory.* Perspectives in Mathematical Logic. Berlin, Springer-Verlag 1990. *170, 180*

Saint-Raymond, Jean

Louveau, Alain, and Jean Saint-Raymond を参照.

Sami, Ramez *443, 463*

Šanin, Nikolai A.

[46] A theorem from the general theory of sets (in Russian). Doklady Academii Nauk S.S.S.R. **53** (1946), 399-400. *133*

Scott, Dana S. *8, 28, 40, 44, 56, 64-66, 68, 70, 72, 100, 126, 128, 261, 274, 278, 312, 397*

[55] Definitions by abstraction in axiomatic set theory. BAMS **61** (1955), 442. *59*

[61] Measurable cardinals and constructible sets. BAPS **9** (1961), 521-524. *7, 56, 62*

[67] A proof of the independence of the Continuum Hypothesis. Mathematical Systems Theory **1** (1967), 89-111. *128*

[71] (ed.) *Axiomatic Set Theory.* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics vol. 13, part 1. Providence, American Mathematical Society 1971.

Frayne, Thomas E., Ann C. Morel, and Dana S. Scott も参照.

Hanf, William P., and Dana S. Scott も参照.

Monk, J. Donald, and Dana S. Scott も参照.

Shelah, Saharon *12, 110, 111, 194, 348, 470, 480-483*

[75] Notes on partition calculus. In: Hajnal-Rado-Sós [75] vol. 3, 1257-1276. *84*

[78] Jonsson algebras in successor cardinals. IJM **30** (1978), 57-64. *109, 110*

[79] Weakly compact cardinals: a combinatorial proof. JSL **44** (1979), 559-562. *89*

[80] A problem of Kurosh, Jónsson groups and applications. In: Adian, Sergei I., William W. Boone, and Graham Higman (eds.) *Word Problems II.* Amsterdam, North-Holland 1980, 373-394. *108*

[82] *Proper Forcing.* Lecture Notes in Mathematics #940. Berlin, Springer-Verlag, 1982. *480*

[84] Can you take Solovay's inaccessible away? IJM **48** (1984), 1-47. *9, 149, 153, 194*

[86] *Around Classification Theory of Models.* Lecture Notes in Mathematics #1182. Berlin, Springer-Verlag 1986. *369, 490*

[87] Iterated forcing and normal ideals on ω_1. IJM **60** (1987), 345-380. *482*

Kanamori, Akihiro, and Saharon Shelah も参照.

Baumgartner, James E., Donald A. Martin, and Saharon Shelah も参照.

Foreman, Matthew, Menachem Magidor, and Saharon Shelah も参照.

Shelah, Saharon, and Lee J. Stanley

[90] Coding and reshaping when there are no sharps. In: Judah-Just-Woodin [92], 407-416. *202*

[95] A combinatorial forcing for coding the universe by a real when there are no sharps. JSL **60** (1995), 1-35. *202*

[95a] The combinatorics of combinatorial coding by a real. JSL 60 (1995), 36-57. *202*

Shelah, Saharon, and W. Hugh Woodin

[90] Large cardinals imply that every reasonably definable set of reals is Lebesgue measurable. IJM **70** (1990), 381-394. *481*

Shepherdson, John C.

[51] Inner models for set theory – Part I. JSL **16** (1951), 161-190. *20, 45*

[52] Inner models for set theory – Part II. JSL **17** (1952), 225-237. *33, 45*

[53] Inner models for set theory – Part III. JSL **18** (1953), 145-167. *45*

Shioya, Masahiro

[93] Infinitary Jónsson functions and elementary embeddings. In: Shinoda, Juichi (ed.) *Mathematical Logic and Applications '92*, Research Institute for Mathematical Sciences #818. Kyoto University 1993, 111-117. *342*

Shoenfield, Joseph R. *188, 328, 329*

[59] On the independence of the axiom of constructibility. American Journal of Mathematics **81** (1959), 537-540. *47*

[61] The problem of predicativity. In: Bar-Hillel-Poznanski-Rabin-Robinson [61], 132-139. *185, 187, 189*

[71] Unramified forcing. In: Scott [71], 357-381. *129*

Sierpiński, Wacław *6, 34, 160, 161, 164, 181*

[25] Sur une classe d'ensembles. FM **7** (1925), 237-243. Reprinted in [75] below, 571-576. *161, 162, 171, 180*

[28] Sur une décomposition d'ensembles. Monatshefte für Mathematik und Physik **35** (1928), 239-242. Reprinted in [75] below, 719-722. *226*

[30] Sur l'uniformisation des ensembles mesurables (B). FM **16** (1930), 136-139. Reprinted in [76] below, 44-46. *163*

[33] Sur un problème de la théorie des relations. Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa **(2)2** (1933), 285-287. Reprinted in [76] below, 120-122. *86*

[38] Fonctions additives non complètement additives et fonctions non mesurables. FM **30** (1938), 96-99. Reprinted in [76] below, 380-382. *403*

[50] *Les ensembles projectifs et analytiques.* Mémorial des Sciences Mathématiques #112. Paris, Gauthier-Villars 1950. *160*

[75] Hartman, Stanisław, *et al.* (eds.) *Oeuvres Choisies*, vol. 2. Warsaw, Państwowe Wydawnidwo Naukowe 1975.

[76] Hartman, Stanisław, *et al.* (eds.) *Ouevres Choisies*, vol. 3. Warsaw, Państwowe Wydawnidwo Naukowe 1976.

Luzin, Nikolai N., and Wacław Sierpiński も参照.

Sierpiński, Wacław, and Alfred Tarski

[30] Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles. FM **15** (1930), 292-300. Reprinted in Sierpiński [76], 29-35, and in Tarski [86] vol. 1, 289-297. *6, 29, 31*

Sikorski, Roman

Rasiowa, Helena, and Roman Sikorski を参照.

Silver, Jack H. *56, 80, 99, 100, 109, 111, 112, 114, 120, 123, 199, 224, 227, 232, 250, 261, 278, 281, 291, 311, 312, 327-329, 347*

[66] Some applications of model theory in set theory. Ph.D. thesis, University of California at Berkeley 1966. Published in abridged form as [71] below. *8, 92, 94, 112, 113, 120, 121*

[66a] The consistency of the generalized continuum hypothesis with the existence of a measurable cardinal (abstract). NAMS **13** (1966), 721. *280*

[70] A large cardinal in the constructible universe. FM **69** (1970), 93-100. *121*

[70a] Every analytic set is Ramsey. JSL **35** (1970), 60-64. *401*

[71] Some applications of model theory in set theory. AML **3** (1971), 45-110. *8, 52, 92, 113, 117, 120, 199*

[71a] The consistency of the GCH with the existence of a measurable cardinal. In: Scott [71], 391-395. *280*

[71b] Measurable cardinals and Δ^1_3 well-orderings. AM **94** (1971), 414-446. *184, 289, 290, 293, 430*

Reinhardt, William N., and Jack H. Silver も参照.

Simms, John C. *465*

[79] Semihypermeasurables and $\Pi^0_1(\Pi^1_1)$ games. Ph.D. thesis, Rockefeller University 1979. *464*

Simpson, Stephen G.

[77] First-order theory of the degrees of unsolvability. AM **105** (1977), 121-139. *201*

Skolem, Thoralf *5, 8, 34, 497*

[23] Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. In: *Matematikerkongressen i Helsingfors den 4-7 Juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelse.* Helsinki, Akademiska-Bokhandeln 1923, 217-232. Reprinted in [70] below, 137-152. Translated in van Heijenoort [67], 290-301. *3, 4, 33, 40, 98*

[33] Ein kombinatorischer Satz mit Anwendung auf ein logisches Entscheidungsproblem. FM **20** (1933), 254-261. Reprinted in [70] below, 337-344. *82*

[70] Fenstad, Jens E. (ed.) *Selected Works in Logic.* Oslo, Univesitetsforlaget 1970.

Smith Jr., Edgar C., and Alfred Tarski

[57] Higher degrees of distributivity and completeness in Boolean algebras. TAMS **84** (1957), 230-257. Reprinted in Tarski [86] vol. 3, 623-650. *228*

Solovay, Robert M. *10, 11, 38, 56, 56, 67, 68, 112, 123, 125, 128, 137, 142, 144, 148-152, 154-158, 181, 184, 192-195, 197, 199, 201-203, 205, 207, 224, 227, 236, 238, 239, 276, 278, 279, 290, 291, 294, 300, 305, 313, 313, 318, 321, 323, 324, 338, 344, 358, 364, 367, 368, 386-387, 397, 402-407, 409, 418, 445, 451, 457, 462, 465, 470, 486*

[63] Independence results in the theory of cardinals. I, II (abstracts). NAMS **10** (1963), 595. *128*

[65] $2^{\aleph_0}$ can be anything it ought to be. In: Addison-Henkin-Tarski [65], 435. *128*

[65a] Measurable cardinals and the continuum hypothesis (abstract). NAMS **12** (1965), 132. *139*

[65b] The measure problem (abstract). NAMS **12** (1965), 217. *9, 126, 144, 149-152*

[66] Real-valued measurable cardinals (abstract). NAMS **13** (1966), 721. *10, 225, 240*

[67] A nonconstructible Δ^1_3 set of integers. TAMS **127** (1967), 50-75. *8, 120, 199*

[69] The cardinality of Σ^1_2 sets of reals. In: Bulloff-Holyoke-Hahn [69], 58-73. *9, 198, 199, 326, 397*

[70] A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. AM **92** (1970), 1-56. *9, 126, 128, 134, 143, 144, 149-152*

[71] Real-valued measurable cardinals. In: Scott [71], 397-428. *10, 73, 225, 229, 231-236, 240, 281, 479*

[74] Strongly compact cardinals and the GCH. In: Henkin *et al.* [74], 365-372. *366*

[78] A Δ^1_3 coding of the subsets of ω_ω. In: Kechris-Moschovakis [78], 133-150. *450, 455*

[78a] The independence of DC from AD. In: Kechris-Moschovakis [78], 171-184. *400, 401, 419, 420, 453, 487*

Jensen, Ronald B., and Robert M. Solovay も参照.

Kechris, Alexander S., and Robert M. Solovay も参照.

Kechris, Alexander S., Robert M. Solovay, and John R. Steel も参照.

Levy, Azriel, and Robert M. Solovay も参照.

Martin, Donald A., and Robert M. Solovay も参照.

Woodin, W. Hugh, Robert M. Solovay, and Adrian R.D. Mathias も参照.

Solovay, Robert M., William N. Reinhardt, and Akihiro Kanamori

[78] Strong axioms of infinity and elementary embeddings. AML **13** (1978), 73-116. *313, 319, 323, 331, 335, 342, 345, 348, 352, 353, 357*

Solovay, Robert M., and Stanley Tennenbaum

[71] Iterated Cohen extensions and Souslin's problem. AM **94** (1971), 201-245. *128, 129, 135, 136*

Sós, Vera T.

Hajnal, András, Richard Rado, and Vera T. Sós を参照.

Specker, Ernst

[49] Sur un problème de Sikorski. Colloquium Mathematicum **2** (1949), 9-12. *91*

[57] Zur Axiomatik der Mengenlehre (Fundierungs- und Auswahlaxiome). ZML **3** (1957), 173-210. *9, 148, 149, 397*

Spector, Clifford *126*

[55] Recursive well-orderings. JSL **20** (1955), 151-163. *180*

Spencer, Joel H.

Graham, Ronald L., Bruce L. Rothschild, and Joel H. Spencer を参照.

Stanley, Lee J.

Shelah, Saharon, and Lee J. Stanley を参照.

Stanley, Mack C.

[94] A Π^1_2 singleton incompatible with $0^\#$. APAL **66** (1994), 27-88. *202*

Steel, John R. *12, 347, 386-387, 435, 457, 463, 470, 482, 483, 490*

[81] Determinateness and the separation property. JSL **46** (1981), 41-44. *435*

[81a] Closure properties of pointclasses. In: Kechris-Martin-Moschovakis [81], 147-163.

[82] Determinacy in the Mitchell models. AML **22** (1982), 109-125. *465, 469*

[83] Scales in $L(\mathbb{R})$. In: Kechris-Martin-Moschovakis [83], 107-156. *450-453, 455*

[88] Long games. In: Kechris-Martin-Steel [88], 56-97. *487*

Kechris, Alexander S., Robert M. Solovay, and John R. Steel も参照.
Martin, Donald A., Yiannis N. Moschovakis, and John R. Steel も参照.
Martin, Donald A., and John R. Steel も参照.

Steel, John R., and Robert A. Van Wesep

[82] Two consequences of determinacy consistect with choice. TAMS **272** (1982), 67-85. *419, 479, 487, 490*

Steinhaus, Hugo

[25] Definicje potrzebne do teorji gry i pościgu. Myśl Akademicka (Lwów) **1** (1925), 13-14. Translated as: Definitions for a theory of games and pursuit. Naval Research Logistics Quarterly **7** (1960), 105-108. Translation reprinted in [85] below, 332-336. *390*

[65] Games, an informal talk. AMM **72** (1965), 457-468. Reprinted in [85] below, 805-817. *390, 396*

[85] Edward Marczewski *et al.* (eds.) *Selected Papers.* Warsaw, Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1985.

Mycielski, Jan, and Hugo Steinhaus も参照.

Steprāns, Juris, and Stephen Watson

[89] (eds.) *Set Theory and its Applications.* Lecture Notes in Mathematics #1401. Berlin, Springer-Verlag 1989.

Stewart, Frank M.

Gale, David, and Frank M. Stewart を参照.

Sureson, Claude

[86] ω_1-constructible universe and measurable cardinals. APAL **30** (1986), 293-320. *274*

[89] About Prikry generic extensions. APAL **51** (1989), 247-278. *254*

Suslin, Mikhail Ya. *158-162, 164, 180, 198*

[17] Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis. CRP **164** (1917), 88-91. *6, 160, 161, 178, 195*

[20] Problème 3. FM **1** (1920), 223. *34*

Swierczkowski, Stanisław *397*

Mycielski, Jan, and Stanisław Swierczkowski を参照.
Mycielski, Jan, Stanisław Swierczkowski, and A. Zieba も参照.

Szekeres, György

Erdös, Paul, and György Szekeres を参照.

Takeuti, Gaisi *397*

[70] A relativization of axioms of strong infinity to ω_1. Annals of the Japan Association for the Philosophy of Science **3** (1970), 191-204. *403*

Tan, It Beng

[81] Sequentially large cardinals. In: Chong, Chi Tat, and Malcolm J. Wicks (eds.) *Southeast Asian Conference on Logic.* Amsterdam, North-Holland 1981, 197-210. *352*

Barbanel, Julius B., Carlos A. Di Prisco, and It Beng Tan も参照.

Tarski, Alfred *4, 28, 34, 43, 49, 50, 52, 56, 82, 95, 105, 112, 323, 324*

[29] Sur les fonctions additives dans les classes abstraites et leur application au problème de la mesure. Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III **22** (1929), 114-117. Reprinted in [86] below, vol. 1, 243-248. *37*

[33] Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych. (The concept of truth in the languages of deductive sciences.) Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III (Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III) #34 (1933). See also [35] below. *5*

[35] Der Wahreitsbegriff in den formalisierten Sprachen. (German translation of [33] with an appendix) Studia Philosophica **1** (1935), 261-405. Reprinted in [86] below, vol. 2, 51-198. Translated in [83] below, 152-278. *5*

[38] Über unerreichbare Kardinalzahlen. FM **30** (1938), 68-89. Reprinted in [86] below, vol. 2, 359-380. *32, 33*

[39] Ideale in vollständigen Mengenkörpern. I. FM **32** (1939), 45-63. Reprinted in [86] below, vol. 2, 509-527. *39, 420*

[39a] On well-ordered subsets of any set. FM **32** (1939), 176-183. Reprinted in [86] below, vol. 2, 551-558. *33*

[45] Ideale in vollständigen Mengenkörpern. II. FM **33** (1945), 51-65. Reprinted in [86] below, vol. 3, 3-17. *39, 225, 226*

[58] Remarks on predicate logic with infinitely long expressions. Colloquium Mathematicum **6** (1958), 171-176. Reprinted in [86] below, vol. 4, 11-16. *49*

[62] Some problems and results relevant to the foundations of set theory. In: Nagel-Suppes-Tarski [62], 125-135. Reprinted in [86] below, vol. 4, 115-125. *7, 49, 52, 55*

[83] *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938.* Translations by J.H. Woodger. Second edition. Indianapolis, Hackett Publishing Company 1983.

[86] Givant, Steven R., and Ralph N. McKenzie (eds.) *Collected Papers.* Basel, Birkhäuser 1986.

Addison Jr., John W., Leon Henkin, and Alfred Tarski も参照.
Erdös, Paul, and Alfred Tarski も参照.
Keisler, H. Jerome, and Alfred Tarski も参照.
Kuratowski, Kazimierz, and Alfred Tarski も参照.
Nagel, Ernest, Patrick Suppes, and Alfred Tarski も参照.
Sierpiński, Wacław, and Alfred Tarski も参照.
Smith Jr., Edgar C., and Alfred Tarski も参照.

Tarski, Alfred, and Robert L. Vaught

[57] Arithmetical extensions of relational systems. Compositio Mathematica **13** (1957), 81-102. Reprinted in Tarski [86], 653-674. *21*

Taylor, Alan D.

Baumgartner, James E., and Alan D. Taylor を参照.
Baumgartner, James E., Alan D. Taylor, and Stanley Wagon も参照.

Teichmüller, Oswald
[39] Braucht der Algebraiker das Auswahlaxiom? Deutsche Mathematik **4** (1939), 567-577. Reprinted in [82] below, 323-333. *144*
[82] Ahlfors, Lars V., and Frederick W. Gehring (eds.) *Gesammelte Abhandlungen. Collected Papers.* Berlin, Springer-Verlag 1982.

Tennenbaum, Stanley *128*
Solovay, Robert M., and Stanley Tennenbaum を参照.

Thompson, S. *95*

Todorčević, Stevo B. *92, 99, 111, 337*
[84] Trees and linearly ordered sets. In: Kunen-Vaughan [84], 235-293. *84*
[87] Partitioning pairs of countable ordinals. Acta Mathematica **159** (1987), 261-294. *90, 91, 97, 110*

Tryba, Jan
[81] A few remarks on Rowbottom cardinals. IJM **40** (1981), 193-196. *105*
[84] On Jónsson cardinals with uncountable cofinality. IJM **49** (1984), 315-324. *109*
[86] Rowbottom-type properties and a cardinal arithmetic. PAMS **96** (1986), 661-667. *105, 110*
[87] No Jónsson filters over $\aleph_\omega$. JSL **52** (1987), 51-53. *110*

Ulam, Stanisław M. *28, 34, 52, 69, 99, 164, 312, 390*
[29] Concerning functions on sets. FM **14** (1929), 231-233. Reprinted in [74] below, 6-8. *37*
[30] Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre. FM **16** (1930), 140-150. Reprinted in [74] below, 9-19. *6, 37, 39, 225, 226*
[74] Beyer, W.A., Jan Mycielski, and Gian-Carlo Rota (eds.) *Sets, Numbers, and Universes.* Selected Works. Cambridge, The MIT Press 1974.
Kuratowski, Kazimierz, and Stanisław M. Ulam も参照.

Uspenskii, Vladimir A.
[85] Luzin's contribution to the descriptive theory of sets and functions: concepts, problems, predictions. RMS **40**(3) (1985), 97-134. *159*

van Heijenoort, Jean
[67] (ed.) *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931.* Cambridge, Harvard University Press 1967. *498*

Van Wesep, Robert A.
[78] Separation principles and the axiom of determinateness. JSL **43** (1978), 77-81. *435*
[78a] Wadge degrees and descriptive set theory. In: Kechris-Moschovakis [78], 151-170. *435*
Steel, John R., and Robert A. Van Wesep も参照.

Vaughan, Jerry E.
Kunen, Kenneth, and Jerry E. Vaughan を参照.

Vaught, Robert L. *327*
[63] Models of complete theories. BAMS **69** (1963), 299-313. *97*
[63a] Indescribable cardinals (abstract). NAMS **10** (1963), 126. *73*
Montague, Richard M., and Robert L. Vaught も参照.
Tarski, Alfred, and Robert L. Vaught も参照.

Veblen, Oswald

[08] Continuous increasing functions of finite and transfinite ordinals. TAMS **9** (1908), 280-292. *66*

Vitali, Giuseppe *144*

[05] *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta.* Bologna, Tip. Gamberini e Parmeggiani 1905. *34*

von Neumann, John *40, 83, 390, 391, 497*

[23] Zur Einführung der transfiniten Zahlen. ALS **1** (1923), 199-208. Reprinted in [61] below, vol. 1, 24-33. Translated in van Heijenoort [67], 346-354. *4*

[25] Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. Journal für die reine und angewandte Mathematik **154** (1925), 219-240. Reprinted in [61] below, vol. 1, 34-56. Translated in van Heijenoort [67], 393-413. *4, 33, 42*

[28] Zur theorie der Gesellschaftsspiele. MA **100** (1928), 295-320. Reprinted in [61] below, vol. 6, 1-26. *390*

[49] On rings of operators. Reduction theory. AM **50** (1949), 401-485. Reprinted in [61] below, vol. 3, 400-484. *163*

[61] Taub, Abraham H. (ed.) *John von Neumann. Collected Works.* New York, Pergamon Press 1961.

von Neumann, John, and Oskar Morgenstern

[44] *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton, Princeton University Press 1944. Second edition, 1947. Third edition, 1953. *390*

Vopěnka, Petr *128, 250*

[62] Construction of models of set theory by the method of ultraproducts (in Russian). ZML **8** (1962), 293-304. *64*

[64] The independence of the Continuum Hypothesis (in Russian). CMUC **5** Supplement I (1964), 1-48. Translated in American Mathematical Society Translations **57** (1966), 85-112. *128*

[65] The first measurable cardinal and the Generalized Continuum Hypothesis. CMUC **6** (1965), 367-370. *69*

[67] The general theory of ∇-models. CMUC **8** (1967), 145-170. *128*

Vopěnka, Petr, and Karel Hrbáček

[66] On strongly measurable cardinals. BAPS **14** (1966), 587-591. *64*

Wadge, William W. *462*

[72] Degrees of complexity of subsets of the Baire space. NAMS **19** (1972), A-714. *434*

[83] Reducibility and determinateness on the Baire space. Ph.D. thesis, University of California at Berkeley 1983. *434-436*

Wagon, Stanley

Baumgartner, James E., Alan D. Taylor, and Stanley Wagon を参照.

Wang, Hao

[74] *From Mathematics to Philosophy.* New York, Humanities Press 1974. *41, 43*

Watro, Ronald J.

Henle, James M., Eugene M. Kleinberg, and Ronald J. Watro を参照.

Wehrung, Friedrich

[89] Nonabsoluteness of elementary embeddings. JSL **54** (1989), 774-778. *275*

Weierstrass, Karl *495, 499*

Weitkamp, Galen

Mansfield, Richard B., and Galen Weitkamp を参照.

Welch, Philip *465*

Beller, Aaron, Ronald B. Jensen, and Philip Welch を参照.

Weyl, Hermann *3*

Whitehead, Alfred N. *3, 14*

Wittgenstein, Ludwig *82, 500, 502*

Wolfe, Philip

[55] The strict determinateness of certain infinite games. PJM **5** (1955), 841-847. *391*

Woodin, W. Hugh *12, 109, 260, 326, 337, 339, 346, 362, 383, 386-387, 451-454, 457, 469, 470, 473, 477-484, 486-490*

[82] On the consistency strength of projective uniformization. In: Jacques Stern (ed.) *Proceedings of Herbrand Symposium. Logic Colloquium '81.* Amsterdam, North-Holland 1982, 365-384. *488*

[83] AD and the uniqueness of the supercompact measures on $\mathrm{P}_{\omega_1}(\lambda)$. In: Kechris-Martin-Moschovakis [83], 67-72. *422*

[83a] Some consistency results in ZFC using AD. In: Kechris-Martin-Moschovakis [83], 172-198. *480*

[86] Aspects of determinacy. In: Marcus, Ruth B., Georg J. Dorn, and Paul Weingartner (eds.) *Logic, Methodology and Philosophy of Science VII.* Proceedings of the 1983 International Congress, Salzburg. Amsterdam, North-Holland 1986, 171-181. *479*

[88] Supercompact cardinals, sets of reals, and weakly homogeneous trees. PNAS **85** (1988), 6587-6591. *482, 490*

[∞] The axiom of determinacy, forcing axioms and the nonstationary ideal. To appear. *490*

Dales, H. Garth, and W. Hugh Woodin も参照.

Feng, Qi, Menachem Magidor, and W. Hugh Woodin も参照.

Judah, Haim (Jaime Ihoda), Winfried Just, and W. Hugh Woodin も参照.

Kechris, Alexander S., Eugene M. Kleinberg, Yiannis N. Moschovakis, and W. Hugh Woodin も参照.

Kechris, Alexander S., and W. Hugh Woodin も参照.

Shelah, Saharon, and W. Hugh Woodin も参照.

Woodin, W. Hugh, Robert M. Solovay, and Adrian R.D. Mathias

[∞] *The Axiom of Determinacy.* To appear. *470, 486*

Yankov, Vladimir

[41] Sur l'uniformisation des ensembles *A*. Doklady Akademiia Nauk SSSR **30** (1941), 597-598. *163*

Young, William H.

[03] Zur Lehre der nicht abgeschlossenen Punktmengen. BKSG **55** (1903), 287-293. *160*

Zeno *493*

Zermelo, Ernst *4, 34, 390, 391, 497*

[04] Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe). MA **59** (1904), 514-516. Translated in van Heijenoort [67], 139-141. *3, 159*

[08] Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. MA **65** (1908), 107-128. Translated in van Heijenoort [67], 183-198. *3, 4*

[08a] Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. MA **65** (1908), 261-281. Translated in van Heijenoort [67], 199-215. *3, 4, 29*

[13] Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. In: Hobson, E.W., and A.E.H. Love (eds.) *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, Cambridge 1912, vol. 2. Cambridge, Cambridge University Press 1913, 501-504. *11, 390*

[29] Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik. FM **14** (1929), 339-344. *32*

[30] Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchngen über die Grundlagen der Mengenlehre. FM **16** (1930), 29-47. *3, 4, 6, 7, 31-33, 41, 43, 46, 127*

Zieba, A.

Mycielski, Jan, Stanisław Swierczkowski, and A. Zieba を参照.

Mycielski, Jan, and A. Zieba も参照.

Zwicker, William S.

[84] $P_\kappa\lambda$ combinatorics I: Stationary coding sets rationalize the club filter. In: Baumgartner-Martin-Shelah [84], 243-259. *369*

[86] $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ combinatorics II: The RK ordering beneath a supercompact measure. JSL **51** (1986), 604-616. *369*

[89] A beginning for structural properties of ideals on $P_\kappa\lambda$. In: Steprāns-Watson [89], 201-217. *369*

Di Prisco, Carlos A., and William S. Zwicker も参照.

索引

この索引では定義（イタリックで書いたページに見いだすことができる），基本的性質，および，重要だが一回しか現れないような全般的な事項で，索引からしか見つけることが困難であると思われるものを中心に挙げてある．[訳注] ギリシャ文字や他の記号は，日本語で読み下したときの発音表記で配列している．また読者の便のために各項目には対応する原語を付記してある．

[か行]

[さ行]

[た行]

[な行]

著　者
A. J. カナモリ (Akihiro Kanamori)
Department of Mathematics
Boston University
Boston, MA 02215
USA

訳　者
渕野　昌 (ふちの　さかえ)
ベルリン自由大学数学科卒業，Doctor rer. nat.
専攻：集合論とその代数や位相空間論などへの応用
現在，北見工業大学工学部情報システム工学科教授
主要訳書：「現代のブール代数」(共立出版)，「数学の基礎」(シュプリンガー・フェアラーク東京)

巨大基数の集合論　定価 (本体 6,200 円＋税)

発　行　1998 年 10 月 18 日
著　者　A. カナモリ
訳　者　渕野　昌
発行者　平野　皓正
発行所　シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社
〒113-0033　東京都文京区本郷 3 丁目 3 番 13 号
TEL (03) 3812-0757 (営業直通)
印刷所　平河工業社

Originally published in English under the title
"The Higher Infinite" by Akihiro Kanamori
ISBN 3-540-57071-3

ISBN 4-431-70769-7 C3041

Printed in Japan